Lista zadań nr 9: Funkcje trygonometryczne i cyklometryczne

(1) Udowodnij, że

$$\cos(t+s) = \cos(t)\cos(s) - \sin(t)\sin(s),$$
$$\sin(t+s) = \cos(t)\sin(s) + \sin(t)\cos(s).$$

Wskazówka: wykorzystując definicję funkcji trygonometrycznych i znane własności geometryczne, zauważ, że:

(a) w wyniku obrotu punktu $(0,1)$ wokół $(0,0)$ o kąt t w lewo otrzymujemy punkt $(\cos(\frac{\pi}{2}+t), \sin(\frac{\pi}{2}+t)) = (-\sin(t), \cos(t))$;

(b) w wyniku obrotu punktu (x,y) wokół $(0,0)$ o kąt t w lewo otrzymujemy punkt $(x\cos(t) - y\sin(t), x\sin(t) + y\cos(t))$.

Następnie obróć punkt $(1,0)$ najpierw o kąt t w lewo, a następnie o kąt s w lewo.

(2) Wyprowadź wzory na $\cos(t-s)$, $\sin(t-s)$, $\mathrm{tg}(t+s)$, $\mathrm{tg}(t-s)$.

(3) Wywnioskuj, że

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t),$$
$$\cos(2t) = (\cos(t))^2 - (\sin(t))^2 = 2(\cos(t))^2 - 1 = 1 - 2(\sin(t))^2,$$
$$\sin(t) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - t),$$
$$\cos(t) = \sin(\tfrac{\pi}{2} - t).$$

(4) Wyprowadź wzory

$$\sin(t) + \sin(s) = 2\sin(\tfrac{t+s}{2})\cos(\tfrac{t-s}{2}),$$
$$\sin(t)\sin(s) = \tfrac{1}{2}\cos(t-s) - \tfrac{1}{2}\cos(t+s).$$

(5) Rozwiąż równanie $\sin(t) + \cos(t) = \sqrt{2}$.

(6) Rozwiąż równanie $(\mathrm{tg}(t))^3 = 3\,\mathrm{tg}(t)$.

(7) Rozwiąż równanie $\sin(3t) = \sin(t)$.

(8) Znajdź wzór na funkcję odwrotną do $\cos(t)$ na przedziale (a) $[-\pi, 0]$; (b) $[\pi, 2\pi]$; (c) $[2\pi, 3\pi]$. Naszkicuj odpowiednie wykresy.

(9) Naszkicuj wykresy funkcji $\sin(\arcsin(x))$ oraz $\arcsin(\sin(t))$.

(10) Udowodnij, że $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$. Wskazówka: oznacz $t = \arcsin(x)$ i oblicz $\cos(\frac{\pi}{2} - t)$.

(11) Udowodnij, że $\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. Wyprowadź wzory na $\cos(\mathrm{arctg}(x))$ i $\sin(\mathrm{arctg}(x))$.

(12) Znajdź funkcje odwrotne do $f(t) = t|t|$ oraz $g(t) = 2\lfloor t \rfloor - t$. Naszkicuj odpowiednie wykresy.

Zadania do samodzielnego rozwiązania przed ćwiczeniami

(i) Rozwiąż równania $\sin(t) = -\frac{1}{2}$, $\sin(t) = -1$, $\cos(t) = -\frac{1}{2}$, $\cos(t) = -1$ oraz $\mathrm{tg}(t) = -1$.

(ii) Znajdź wartość $\sin(\frac{\pi}{12})$. Wskazówka: $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

Zadania dodatkowe

(A) Podaj ściśle geometryczny dowód wzorów na cosinus i sinus sumy.

(B) Wiedząc, że liczba π jest niewymierna, udowodnij, że zbiór punktów o współrzędnych $(\cos(n), \sin(n))$ (gdzie $n \in \mathbb{N}_+$) jest *gęsty* na okręgu jednostkowym (tj. każdy łuk okręgu jednostkowego zawiera pewien taki punkt). Wywnioskuj, że z ciągu o wyrazach $\sin(n)$ można wybrać podciąg zbieżny do dowolnej liczby w przedziale $[-1, 1]$.

(C) Znajdź wartość $\sin(\frac{\pi}{5})$.

(D) Niech $a_n = \cos(\frac{\pi}{2^n})$. Zauważ, że $a_1 = 0$ oraz $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_n}$ i w takim razie

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \dots \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}};$$

w wyrażeniu po prawej stronie występuje $n-1$ pierwiastków. Wywnioskuj, że

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\left(2^n\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \dots \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}\right).$$

(E) Formalna definicja funkcji trygonometrycznych to

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Wykaż, że cos i sin są poprawnie określonymi funkcjami na $\mathbb{R}$. Udowodnij, że funkcje te są ciągłe i spełniają warunek $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, a także równości z zadania (1).

W przyszłości wykażemy, że istnieje taka liczba $p > 0$, że $\sin(x) > 0$ oraz $\cos(x) > 0$ dla $x \in (0, p)$, lecz $\cos(p) = 0$. Liczbę π formalnie definuje się wtedy wzorem $\pi = 2p$.

Uwagi:

- Miara kąta półpełnego to $\pi = 180°$;
- $(\cos(t), \sin(t))$ to współrzędne punktu $(1, 0)$ obróconego wokół punktu $(0, 0)$ o kąt t w lewo (lub o kąt $-t$ w prawo — gdy $t < 0$);
- $\mathrm{tg}(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$;
- g jest funkcją odwrotną do f na przedziale I jeśli zachodzi:

$$g(y) = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \in I \text{ oraz } f(x) = y;$$

- arcsin jest funkcją odwrotną do sin na przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
- arccos jest funkcją odwrotną do cos na przedziale $[0, \pi]$;
- arctg jest funkcją odwrotną do tg na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
- $\sin(t) < t < \mathrm{tg}(t)$ dla $t \in (0, \frac{\pi}{2})$.