# ANALIZA MATEMATYCZNA 1
## zadania z odpowiedziami

*Maciej Burnecki*

*strona główna*

## Spis treści


**1 Elementy logiki, zbiory, funkcje** **1**

**2 Funkcje trygonometryczne** **3**

**3 Ciągi** **3**

**4 Granice funkcji, ciągłość** **4**

**5 Rachunek różniczkowy** **6**

**6 Całki nieoznaczone** **8**

**7 Całki oznaczone** **9**

**8 Zadania trudniejsze** **10**

**9 Powtórzenie** **13**

**10 Pierwsze kolokwium** **17**

**11 Drugie kolokwium** **21**

**12 Egzamin** **23**


## 1 Elementy logiki, zbiory, funkcje

1. Określ jako zdanie, funkcję (inaczej: formę, formułę) zdaniową na podanym zbiorze $X$ lub jako żadne z powyższych dwóch wyrażenie:

   (a) tydzień ma siedem dni,

   (b) tydzień ma osiem dni,

   (c) $3^2 < 10$,

   (d) $\frac{1}{x} > 1, X = (0, \infty)$,

   (e) $\frac{1}{x} > 1, X = \mathbb{R}$.

   Zdania określ jako prawdziwe lub fałszywe oraz podaj ich wartości logiczne.

2. Zbadaj, czy jest prawem rachunku zdań (tautologią) wyrażenie

(a) $(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,

(b) $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)]$,

(c) $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg r] \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow q]$.

Zadanie rozwiąż najpierw analizując wyrażenie, a dopiero później przez wypełnianie tabelki.

3. Niech $\perp$ oznacza spójnik Pierce'a, tzn. $p \perp q = (\neg p \wedge \neg q)$. Za pomocą spójnika Pierce'a (jedyny, obok kreski Shefera, spójnik dwuargumentowy o tej własności) wyraź pozostałe dwuargumentowe spójniki logiczne oraz negację.

4. Zbadaj prawdziwość zdania:

   (a) $\bigvee_{x \in \mathbb{R}} \bigwedge_{y \in \mathbb{R}} \left[(xy \neq 0) \Rightarrow \left(x^2 < 0\right)\right]$,

   (b) $\bigvee_{x \in \mathbb{R}} \bigwedge_{y \in \mathbb{R}} \left[(y^2 = 1) \Rightarrow \left(x^2 < 0\right)\right]$.

5. Sprawdź, czy następujące dwa zbiory są równe, rozłączne lub jeden zawiera się w drugim:

   (a) $[(A \cap B) \setminus C] \cup [(A \cap C) \setminus B]$ oraz $A \cap (B \cup C)$,

   (b) $(A \setminus B) \triangle (A \setminus C)$ oraz $A \triangle B \triangle C$.

   Odpowiedź uzasadnij za pomocą diagramów Venna.

## *Odpowiedzi, wskazówki*

1. (a) Zdanie prawdziwe o wartości logicznej 1,
   (b) zdanie fałszywe o wartości logicznej 0,
   (c) zdanie prawdziwe o wartości logicznej 1,
   (d) funkcja zdaniowa,
   (e) ani zdanie, ani funkcja zdaniowa.

2. (a) nie,
   (b) tak,
   (c) tak,
   (d) tak.

3. Np. $\neg p = p \perp p, p \wedge q = (p \perp p) \perp (q \perp q), p \vee q = (p \perp q) \perp (p \perp q)$.

4. (a) zdanie prawdziwe,
   (b) zdanie fałszywe.

5. $L$ – lewa strona, $P$ – prawa strona,

   (a) $L \subseteq P$,

   (b) $L \cap P = \emptyset$.

## 2 Funkcje trygonometryczne

1. Niech $x$ oznacza miarę łukową kąta. Naszkicuj na płaszczyźnie okrąg o środku w $(0,0)$ i promieniu 1, a następnie kąt $x$.
   (a) Wyjaśnij znaczenie liczby $x$.
   (b) Zaznacz na osiach współrzędnych $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ (o ile dwie ostatnie wartości istnieją).
   (c) Załóżmy, że $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Udowodnij, że $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.
2. Wyznacz dziedzinę naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$, uprość wzór, podaj zbiór wartości i naszkicuj wykres funkcji
   (a) $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot |\sin x|$,
   (b) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}\left|\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right|$,
   (c) $f(x) = \cos\left(\frac{5}{2}\pi + \arcsin x\right)$,
   (d) $f(x) = \operatorname{tg} \arccos x$.

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. (a) Jest to długość łuku okręgu, odpowiadającego kątowi.
   (b) Dla zaznaczenia $\sin x, \cos x$ wykorzystaj trójkąt prostokątny o jednostkowej (długości 1) przeciwprostokątnej. Dla zaznaczenia $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ wykorzystaj trójkąty prostokątne o jednostkowych przyprostokątnych.
   (c) Porównaj pola wycinka koła i odpowiednich trójkątów.
2. (a) Dziedzina $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,
   $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla } x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \\ -\cos x & \text{dla } x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi), \end{cases}$
   zbiór wartości $W_f = (-1, 1)$,
   (b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x & \text{dla } x \in (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \\ 0 & \text{dla } x \in [\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi), \end{cases}$
   $W_f = [0, \infty)$,
   (c) $D_f = [-1, 1], f(x) = -x, W_f = [-1, 1]$,
   (d) $D_f = [-1, 0) \cup (0, 1], f(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} & \text{dla } x \in [-1, 0), \\ \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} & \text{dla } x \in (0, 1], \end{cases}$
   $W_f = \mathbb{R}$.

## 3 Ciągi

1. Wykaż zbieżność ciągu o wyrazach
   (a) $a_n = \dfrac{1}{7 + \operatorname{arc\,tg} 0} + \dfrac{1}{7^2 + \operatorname{arc\,tg} 1} + \ldots + \dfrac{1}{7^n + \operatorname{arc\,tg} n}$,
   (b) $f_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$,

   gdzie $n \in \mathbb{N}$.
2. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach
   (a) $a_n = \sqrt[n]{3^n - 5^n + 7^n}$,

(b) $a_n = \dfrac{n+\sqrt{1}}{n^2+1} + \dfrac{n+\sqrt{2}}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{n+\sqrt{n}}{n^2+n}$.

3. Rozważmy niektóre symbole nieoznaczone dla granic ciągów:

   (a) $\infty - \infty$,

   (b) $0\ \infty$,

   (c) $\frac{0}{0}$,

   (d) $\frac{\infty}{\infty}$.

   - Dla dowolnego $\lambda \in [-\infty, \infty]$ podaj przykłady ciągów, by dany symbol nieoznaczony odpowiadał ciągowi zbieżnemu lub rozbieżnemu (w przypadku granic niewłaściwych) do $\lambda$.
   - Podaj przykłady ciągów, aby powyższe symbole nieoznaczone odpowiadały ciągom, które nie są ani zbieżne, ani rozbieżne do granicy niewłaściwej.

4. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach

   (a) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n-2}\right)^{n+3}$,

   (b) $a_n = \left(\dfrac{n^2+n+2}{n^2+n+5}\right)^{-\frac{n^2}{3}}$.

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

2. (a) 7,

   (b) 1.

3. Np. $\lim\limits_{n\to\infty} ((n+\lambda)-n) = \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2-n\right) = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n-n^2\right) = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} ((n+(-1)^n)-n)$ nie istnieje.

4. (a) $e$,

   (b) $e$.

# 4 Granice funkcji, ciągłość

1. Wyznacz granicę funkcji $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, jeśli

   (a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}, x_0 = \pi$,

   (b) $f(x) = (1-3\sin x)^{\frac{1}{x-\pi}}, x_0 = \pi$,

   (c) $f(x) = \left(1+\dfrac{\sin x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, x_0 = 0$,

   (d) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right), x_0 = \infty$,

   (e) $f(x) = \dfrac{\mathrm{tg}(7x)}{\sqrt{16+14x}-4}, x_0 = 0$.

   *Uwaga:* nie można wykorzystywać reguły de l'Hospitala.

2. Wyznacz wszystkie asymptoty wykresu funkcji

(a) $f(x) = \dfrac{(x+2)^3}{x^2+6x+8}$,

(b) $f(x) = 4x + \arcsin \frac{5}{x}$,

(c) $f(x) = 3x + \ln \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$,

(d) $f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{|x|} \operatorname{arc\,tg} x$,

(e) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$.

3. Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x+\frac{\pi}{2}}{\cos x}$.

4. Naszkicuj wykres funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, spełniającej warunki:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$,
$f(-1) = f(1)$. Czy może być ona ciągła w całej swojej dziedzinie?

5. Wyznacz zbiór punktów ciągłości funkcji $f(x) = \lfloor x \rfloor \sin \dfrac{\pi x}{m}$ , gdzie symbol $\lfloor \cdot \rfloor$ oznacza część całkowitą, a $m$ jest liczbą całkowitą, różną od 0.

6. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ w podpunkcie (a) i parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ w pozostałych podpunktach, funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, jeśli

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x}\left(2^x - 1\right) & \text{dla } x \neq 0, \\ \ln 2 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-4x)}{x} \text{ dla } x < 0, \\ a+2 \text{ dla } x = 0, \\ \frac{\operatorname{tg}(bx)}{x} \text{ dla } x \in S_+(0), \end{cases}$
gdzie $S_+(0)$ oznacza pewne sąsiedztwo prawostronne punktu $x_0 = 0$,

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(bx)}{x} \text{ dla } x < 0, \\ 1 \text{ dla } x = 0, \\ (a+1)\ln(x+\mathrm{e}) \text{ dla } x > 0. \end{cases}$

7. Dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja
$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & \text{dla } x < 0, \\ ax+b & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 5, \\ \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) & \text{dla } 5 < x \end{cases}$ jest ciągła na $\mathbb{R}$?

8. Wyznacz granicę ciągu $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\ln(n+2) - \ln n\right)$.

9. Udowodnij, że równanie $\operatorname{arctg} x + x^3 = 1$ ma jednoznaczne rozwiązanie w przedziale $(0, 1)$.

10. Z dokładnością do $0,25$ wyznacz wszystkie rozwiązania równania
$x^5 + x^3 + x - 1 = 0$.

## *Odpowiedzi, wskazówki*

1. (a) $-\frac{1}{2\pi}$,
   (b) $e^3$,
   (c) $\sqrt{e}$,
   (d) 1,
   (e) 4.

2. (a) $x = -4$ – asymptota pionowa obustronna, $y = x$ – asymptota ukośna w $\infty$ i w $-\infty$,

(b) $y = 4x$ – asymptota ukośna w $\infty$ i w $-\infty$,

(c) $x = -1$ – asymptota pionowa lewostronna, $x = 1$ – asymptota pionowa prawostronna, $y = 3x$ – asymptota ukośna w $\infty$ i w $-\infty$,

(d) $y = x + \frac{\pi}{2}$ – asymptota ukośna w $\infty$, $y = x - \frac{\pi}{2}$ – asymptota ukośna w $-\infty$,

(e) $x = 0$ – asymptota pionowa obustronna, $y = 0$ – asymptota ukośna (pozioma) w $\infty$ i w $-\infty$.

3. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

4. Nie może być ciągła w punkcie $x_0 = 1$.

5. Funkcja $f(x)$ jest ciągła na zbiorze $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{km : k \in \mathbb{Z}\}$.

6. (a) $a = 1$,

   (b) $a = -2, b = 0$,

   (c) $a = 0, b = 1$.

7. $a = -\frac{3}{10}, b = 2$.

8. 2.

9. Wykorzystaj własność Darboux na przedziale $[0, 1]$. Dla uzasadnienia jednoznaczności zauważ monotoniczność występującej funkcji.

10. Jedno rozwiązanie, $x_0 \approx \frac{3}{4}$.

# 5 Rachunek różniczkowy

1. Oblicz pochodną $f'(x_0)$, jeśli

   (a) $f(x) = x^{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}, x_0 = 1$,

   (b) $f(x) = \sqrt[\sin x]{x + \dfrac{\pi}{2}}, x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie o odciętej $x_0$, jeśli

   (a) $f(x) = 5 + (2x + 0,5)\ln(2x + 0,5), x_0 = 0,25$,

   (b) $f(x) = (x + e)^{\ln(x+1)}, x_0 = 0$.

3. Za pomocą różniczki zupełnej wyznacz przybliżoną wartość funkcji $f(x) = (e + x)^{\sin x}$ w punkcie $x_1 = 0{,}1$.

4. Napisz równanie takiej stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \dfrac{1}{3}$, która jest prostopadła do prostej $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

5. Wyznacz kąt, pod którym przecinają się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = \dfrac{2}{x}$ i $g(x) = x^2 + x$.

6. Wykaż, że funkcja $f(x)$ ma dokładnie jedno mejsce zerowe w przedziale $I$, jeśli

   (a) $f(x) = \operatorname{tg} x - 3x + 1, I = \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$,

   (b) $f(x) = x - \operatorname{arc\,tg} x, I = (-1, 1)$.

7. Udowodnij, że dla $x > 1$ zachodzi nierówność $\ln x < 2\sqrt{x} - 2$.

8. Wyznacz ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności funkcji

(a) $f(x) = \left(x^2 + x + 1\right) e^{-x}$,

(b) $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{2}{x^2}}$.

9. Wyznacz przedziały wypukłości, wklęsłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji

   (a) $f(x) = x^2 - \dfrac{64}{x}$,

   (b) $f(x) = -x \sin x - 2\cos x$.

10. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)$ na przedziale $I$, jeśli

    (a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4, I = \left[\dfrac{3}{4}, 3\right]$.

    (b) $f(x) = x^3 - 3x - 1, I = \left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$.

11. Za pomocą wzoru Taylora oblicz $\sin 0,1$ z dokładnością do $10^{-10}$.

12. Wyznacz wzór wielomianu, według którego można wypełniać tablice matematyczne dla funkcji $\cos x$ w przedziale $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ z dokładnością do $10^{-9}$.

13. Wyznacz granicę $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, jeśli

    (a) $f(x) = \ln(2x) \operatorname{tg} x, x_0 = 0^+$,

    (b) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}, x_0 = 0$.

## *Odpowiedzi, wskazówki*

1. (a) 1,

   (b) 1.

2. (a) $y = 2x + \frac{9}{2}$,

   (b) $y = x + 1$.

3. $f(0,1) \approx 1,1$.

4. $y = -2x + 1$.

5. $\frac{\pi}{4}$.

6. Do uzasadnienia istnienia miejsca zerowego można wykorzystać własność Darboux na przedziale $\overline{I}$ (domknięcie przedziału $I$, czyli w tym przypadku przedział wraz z końcami) w podpunktach (a) i (b), a w podpunkcie (c) na przedziale $[\delta, 1]$, gdzie liczba dodatnia $\delta$ jest wystarczająco mała.

   Jedyność miejsca zerowego można uzasadnić za pomocą ścisłej monotoniczności każdej z funkcji, wykazanej za pomocą pochodnej.

7. Obie strony nierówności są funkcjami są ciągłymi na $[1, \infty)$. Porównaj pochodne tych funkcji na przedziale $(1, \infty)$ i wartości w punkcie 1 lub równoważnie, rozważ różnicę tych funkcji, jej pochodną na $(1, \infty)$ i wartość w 1.

8. (a) Funkcja $f(x)$ maleje na przedziałach $(-\infty, 0], [1, \infty)$, rośnie na przedziale $[0, 1]$ i przyjmuje dwa ekstrema lokalne: 1 – minimum lokalne właściwe (w punkcie $x_0 = 0$), $\frac{3}{e}$ – maksimum lokalne właściwe (w punkcie $x_0 = 1$),

   (b) $f(x)$ maleje na przedziałach $[-2, 0), (0, 2]$, rośnie na przedziałach $(-\infty, -2], [2, \infty)$ i przyjmuje dwa ekstrema lokalne: $2\sqrt{e}$ – minimum lokalne właściwe (w punkcie $x_0 = -2$), $-2\sqrt{e}$ – maksimum lokalne właściwe (w punkcie $x_0 = 2$).

9. (a) Funkcja $f(x)$ jest ściśle wypukła na przedziałach $(-\infty, 0), [4, \infty)$, ściśle wklęsła na przedziale $(0, 4]$, a punktem przegięcia wykresu funkcji jest $(4, 0)$,
   (b) $f(x)$ jest ściśle wypukła na przedziale $[-\pi, \pi]$, przedziałach postaci $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ i przedziałach postaci $[-(2k+1)\pi, -2k\pi]$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $f(x)$ jest ściśle wklęsła na przedziałach postaci $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ i przedziałach postaci $[-2k\pi, -(2k-1)\pi, ]$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$, punkty przegięcia wykresu funkcji są postaci $(2k\pi, -2)$ dla $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz $((2k+1)\pi, 2)$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

10. (a) Największą wartością jest 5, a najmniejszą 0,
    (b) największą wartością jest 1, a najmniejszą $-3$.

11. $\sin 0,1 \approx 0,1 - \frac{0,1^3}{3!} + \frac{0,1^5}{5!}$.

12. $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$.

13. (a) 0,
    (b) $-\frac{1}{2}$.

# 6 Całki nieoznaczone

1. Oblicz $\int f(x)\,dx$, jeśli
   (a) $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$,
   (b) $f(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$.
   (c) $f(x) = x\cos(4x)$.

2. Oblicz całkę $\int f(x)\,dx$ z funkcji wymiernej
   (a) $f(x) = \dfrac{2}{4x^2 + 8x + 5}$,
   (b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + 2x}$.

3. Oblicz całkę $\int f(x)\,dx$ z funkcji trygonometrycznej
   (a) $f(x) = 3^{\sin^2 x}\sin(2x)$,
   (b) $f(x) = \dfrac{7^{\operatorname{tg} x}}{1 - \sin^2 x}$,
   (c) $f(x) = \dfrac{2^{\operatorname{ctg} x}}{1 - \cos^2 x}$.

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. (a) $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$,
   (b) $\frac{1}{\ln 2}\ln(2^x + 2^{-x}) + C$.

2. (a) $\operatorname{arc\,tg}(2x+2) + C$,
   (b) $\ln|x| + \operatorname{arc\,tg}(x+1) + C$,
   (c) $\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 2x + 2\right) - \operatorname{arc\,tg}(x+1) + C$.

3. (a) $\frac{1}{\ln 3}3^{\sin^2 x} + C$,
   (b) $\frac{1}{\ln 7}7^{\operatorname{tg} x} + C$,
   (c) $-\frac{1}{\ln 2}2^{\operatorname{ctg} x} + C$.

# 7 Całki oznaczone

1. Niech symbol $\lfloor\cdot\rfloor$ oznacza część całkowitą. Naszkicuj wykres funkcji $f$ i z jego pomocą oblicz całkę $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, jeśli:

   (a) $f(x) = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$, $a = 0, b = 9$,

   (b) $f(x) = \lfloor 2^x\rfloor$, $a = 1, b = 2$,

   (c) $f(x) = \lfloor x^2\rfloor$, $a = 1, b = 2$.

2. Za pomocą całki oznaczonej oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n} + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{4n} + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4n} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{4n}\right)$.

   *Uwaga:* nie ma pomyłki w zapisie ostatniego składnika.

3. Wyznacz funkcje $H$ pierwotne na $\mathbb{R}$ do funkcji $h(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{dla } x \leqslant 0, \\ -\cos x & \text{dla } 0 < x. \end{cases}$

4. Udowodnij, że $\pi\mathrm{e} \leqslant \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x \left(2\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 4\operatorname{arc\,tg} x\right)\,dx \leqslant 3\pi\mathrm{e}$.

5. Oblicz $\int\limits_0^1 \frac{4x-1}{2x^2-2x+3}\,dx$.

6. Oblicz pole obszaru na płaszczyźnie, ograniczonego następującymi krzywymi:

   (a) $y = \left(\frac{x-1}{\mathrm{e}-1}\right)^2$ oraz $y = \ln x$,

   (b) oś $OX$, $y = x\ln x, x = \mathrm{e}$,

   (c) $y = \ln(2x), y = 0, x = 1$,

   (d) $y = x^2, y = 1 - \ln x, y = 0$,

   (e) $y = \cos x, y = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$,

   (f) $y = x\sin^2 x$ dla $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, oś $OX$, $x = \frac{\pi}{3}$.

7. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi $OX$ pola pod wykresem funkcji

   (a) $f(x) = \operatorname{tg} x$ dla $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$,

   (b) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ dla $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

   (c) $f(x) = 3^x\sqrt{\cos(2x)}$ dla $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

8. Wyznacz długość wykresu funkcji:

   (a) $f(x) = (x-1)^{\frac{3}{2}}$, ograniczonej do przedziału $\left[1, \frac{7}{3}\right]$,

   (b) $f(x) = \left(\frac{2}{3}x - 1\right)^{\frac{3}{2}}$, ograniczonej do przedziału $[2,3]$.

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. (a) 13,
   (b) $5 - \ln 2 - \ln 3$,
   (c) $5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$..
2. $\frac{2}{\pi} \ln 2$.
3. $H(x) = \begin{cases} x^2 - x + C & dla\ x \leqslant 0, \\ -\sin x + C & dla\ 0 < x. \end{cases}$
4. *Wskazówka:* oszacuj największą i najmniejszą wartość funkcji na przedziale.
5. $\frac{2\sqrt{5}}{5} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{5}}{5}$.
6. (a) $\frac{4-\mathrm{e}}{3}$,
   (b) $\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$,
   (c) $\ln 2 - \frac{1}{2}$,
   (d) $\mathrm{e} - \frac{5}{3}$,
   (e) $2 + \frac{\pi^3}{6}$,
   (f) $\frac{\pi^2}{36} - \frac{\sqrt{3}\pi}{24} + \frac{3}{16}$.
7. (a) $\left(\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}\right)\pi$,
   (b) $2 - \frac{\pi}{2}$,
   (c) $\frac{\pi\left(3^{0,5\pi} - \ln 3\right)}{2(1+\ln^2 3)}$.
8. (a) $\frac{56}{27}$,
   (b) $2\sqrt{2} - \frac{8}{9}\sqrt{3}$.

# 8 Zadania trudniejsze

T.1. Przyjmuje się, że

   (a) dla dowolnego zbioru $X$ i obiektu $a$: $a \in X$ lub $a \notin X$ oraz
   (b) jeśli $\varphi(\cdot)$ jest dowolną formułą zdaniową na zbiorze $X$ (tzn. po podstawieniu elementu $a \in X$, wyrażenie $\varphi(a)$ jest zdaniem), to elementy ze zbioru $X$, spełniające formułę $\varphi$, tworzą zbiór.

   Z powyższych dwóch przesłanek wywnioskuj, że nie istnieje twór będący zbiorem złożonym ze wszystkich zbiorów (tzw. paradoks Russela).

T.2. Udowodnij, że różnica symetryczna zbiorów jest działaniem łącznym i przemiennym.

T.3. Udowodnij, że różnica symetryczna skończonej ilości zbiorów składa się z elementów należących do nieparzystej liczby zbiorów.

T.4. Wyprowadź wzory na sinus i kosinus sumy kątów.

T.5. Udowodnij następujące twierdzenia o granicach ciągów:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$,
   (b) dla $0 < a < \infty$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$,
   (c) dla $1 < a < \infty$ i $r \in \mathbb{R}$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^r}{a^n} = 0$.

T.6. Wykaż zbieżność ciągu o wyrazach $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

T.7. Oznaczmy $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, gdzie ciągi $(e_n), (f_n)$ zostały określone w poprzednich dwóch zadaniach. Udowodnij, że $e = f$.

T.8. Udowodnij, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

T.9. Niech $x$ oznacza miarę łukową kąta. Wykaż, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

T.10. Załóżmy, że funkcja $f : O(x_0) \to \mathbb{R}$ jest określona w pewnym otoczeniu $O(x_0)$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz że przyjmuje w $x_0$ ekstremum lokalne (właściwe lub nie). Udowodnij, że jeśli istnieje pochodna $f'(x_0)$, to $f'(x_0) = 0$ (twierdzenie Fermata).

T.11. Załóżmy, że funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$, różniczkowalna na $(a, b)$ oraz że $f(a) = f(b)$, gdzie $a < b \in \mathbb{R}$. Udowodnij istnienie takiego $c \in (a, b)$, dla którego $f'(c) = 0$ *(twierdzenie Rolle'a).*

T.12. Załóżmy, że funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na $(a, b)$, gdzie $a < b \in \mathbb{R}$. Udowodnij istnienie takiego $c \in (a, b)$, dla którego $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ *(twierdzenie Lagrange'a).*

T.13. Załóżmy, że funkcje $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe na $[a, b]$ i różniczkowalne na $(a, b)$, gdzie $a < b \in \mathbb{R}$. Udowodnij istnienie takiego $c \in (a, b)$, dla którego $[g(b) - g(a)]f'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c)$ *(twierdzenie Cauchy'ego).*

T.14. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \sinh x - \frac{5}{4}x$ na przedziale $I = [0, 1]$, gdzie funkcja $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ oznacza sinus hiperboliczny.

T.15. Oblicz: $\int\limits_1^2 \sqrt{x^2 - 1}\, \operatorname{arc\,ch} x \, dx$, gdzie symbol $\operatorname{arc\,ch}$ oznacza funkcję odwrotną do ograniczonej do przedziału $[0, \infty)$ funkcji kosinus hiperboliczny.

T.16. Wyznacz długość wykresu funkcji:

(a) $f(x) = \ln(2x + 1)$, ograniczonej do przedziału $\left[0, \frac{1}{2}\right]$,

(b) $f(x) = \mathrm{e}^{x-1}$, ograniczonej do przedziału $[1, \ln(2\mathrm{e})]$.

## *Odpowiedzi, wskazówki*

T.1. Gdyby taki zbiór $X$ istniał, to zbiorem byłby rownież $Y = \{A \in X : A \notin A\}$, a wtedy jednocześnie $Y \in Y$ oraz $Y \notin Y$.

T.2. Wynika to z łączności i przemienności spójnika logicznego „albo".

T.3. Różnica symetryczna $n$ zbiorów powstaje w wyniku obliczenia $n-1$ razy różnicy symetrycznej. Zauważ, że jeśli element należy do parzystej ilości zbiorów, to przy kolejnym obliczeniu pojawia się, znika lub pozostaje bez miany, a po ostatniej zmianie znika. Podobnie dla przynależności do nieparzystej ilości zbiorow.

T.4. Niech $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ – dla innych $x, y$ można wykorzystać wzory redukcyjne.

(a) Naszkicuj trójkąt, aby kąt $\alpha$ przy jednym z jego wierzchołków wynosił $\alpha = x + y$, a wysokość opuszczona z tego wierzchołka dzieliła $\alpha$ na kąty $x$ i $y$.

(b) Oblicz pole dużego trójkąta na dwa sposoby: bezpośrednio i jako sumę pól dwóch mniejszych trójkątów. Z równości pól wyprowadź wzór na sinus sumy kątów.

(c) Zastosuj otrzymany wzór na sinus sumy kątów i wzory redukcyjne $\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\varphi, \cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\varphi$ do przekształcania $\cos(x+y)=\sin\left(x+\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

T.5. (a) Z jednej strony, $n^{\frac{1}{n}}>1$ dla dowolnego $n\in\mathbb{N}_+$. Z drugiej strony, niech $\delta>0$ będzie dowolną liczbą. Dla dostatecznie dużych $n$, $n^{\frac{1}{n}}<1+\delta$, gdyż $(1+\delta)^n=1+n\delta+\frac{n(n-1)}{2}\delta^2+\ldots+\delta^n>\frac{n(n-1)}{2}\delta^2>n$.

(b) Dla $a\geqslant 1$, $1\leqslant a^{\frac{1}{n}}<n^{\frac{1}{n}}$ od pewnego miejsca.

(c) Oznaczmy $a=1+\delta$, gdzie $\delta>0$. Ustalmy liczbę $k,r<k\in\mathbb{N}_+$. Dla dostatecznie dużych $n$, $a^n=(1+\delta)^n=1+n\delta+\frac{n(n-1)}{2}\delta^2+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{(k+1)!}\delta^{k+1}+\ldots+\delta^n>\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{(k+1)!}\delta^{k+1}>\frac{\delta^{k+1}}{(k+1)!}\frac{n^{k+1}}{2}$.

T.6. (a) Wykorzystując wzór Newtona na potęgę dwumianu zauważ, że
$e_n=1+\frac{1}{1}+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2}+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$ .

(b) Wywnioskuj, że ciąg $(e_n)$ jest rosnący.

(c) Udowodnij, że $e_n\leqslant 1+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}$ oraz że ciag $(e_n)$ jest ograniczony.

T.7. (a) Zauważ, że $e_n\leqslant f_n$ dla $n\in\mathbb{N}_+$. Wywnioskuj, że $e\leqslant f$.

(b) Ustalmy dowolne $n_0\in\mathbb{N}_+$. Rozważ ciąg $(g_n)$ o wyrazach $g_n=1+\frac{1}{1}+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2}+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n_0-1}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n_0}$, określonych dla $n\geqslant n_0$. Zauważ, że $g_n\leqslant e_n$. Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty}g_n=f_{n_0}$ i dalej, że $f_{n_0}\leqslant e$. Wywnioskuj, że $f\leqslant e$.

T.8. Niech $\lfloor x\rfloor$ oznacza część całkowitą liczby $x\in\mathbb{R}$. Dla wystarczająco dużych $n$ zachodzi $|a_n|>1$.

- Jeśli $a_n\geqslant 1$, to $\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor a_n\rfloor+1}\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)^{-1}\leqslant\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$
$\leqslant\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor}\right)^{\lfloor a_n\rfloor}\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor}\right)$.
- Dla $a_n<-1$ wykorzystaj równość
$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=\left(1+\frac{1}{-a_n-1}\right)^{-a_n-1}\left(1+\frac{1}{-a_n-1}\right)$.

T.9. Zauważ, że $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$. Za pomocą twierdzenia o trzech funkcjach i nierówności z zadania 1.1 wywnioskuj, że $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$. Dla $x<0$ skorzystaj z nieparzystości funkcji $\sin x$ i $x$.

T.10. Oznaczmy $I(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (iloraz różnicowy) dla $x\in S(x_0)=O(x_0)\backslash\{x_0\}$ (sąsiedztwo punktu). Zauważ, że ilorazy różnicowe $I(x)$ z jednej strony punktu $x_0$ są niedodatnie, a z drugiej nieujemne.

T.11. W pewnym punkcie $c\in(a,b)$ funkcja $f$ przyjmuje najmniejszą lub największą wartość na całym przedziale $[a,b]$; wartość ta jest równocześnie ekstremum lokalnym, zatem $f'(c)=0$.

T.12. Wystarczy zastosować twierdzenie Rolle'a do funkcji
$h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

T.13. Wystarczy zastosować twierdzenie Rolle'a do funkcji
$h(x)=[f(b)-f(a)]g(x)-[g(b)-g(a)]f(x)$.

T.14. Największą wartością jest 0, a najmniejszą $\frac{3-5\ln 2}{4}$.

T.15. $-\frac{1}{8}\ln^2\left(2+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\frac{3}{8}$.

T.16. (a) $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2}+\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$,

(b) $\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln 2-\ln\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$.

# 9 Powtórzenie

1. Zbadaj, czy jest prawem rachunku zdań (tautologią) wyrażenie

$$[\ p \Rightarrow (q \veebar r)\ ] \Rightarrow [\ (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)\ ],$$

gdzie symbol $\veebar$ oznacza „albo” (alternatywę wykluczającą koniunkcję). Zadanie rozwiąż najpierw analizując wyrażenie, a dopiero później przez wypełnianie tabelki.

2. Niech $|$ oznacza kreskę Shefera, tzn. $p|q = (\neg p \vee \neg q)$. Za pomocą kreski Shefera wyraź pozostałe dwuargumentowe spójniki logiczne oraz negację.

3. Zbadaj prawdziwość zdania:

   (a) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigvee_{y\in\mathbb{R}} [(x+y>0) \Rightarrow (x+y<0)]$,

   (b) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigvee_{y\in\mathbb{R}} [(xy=0) \Rightarrow (xy=1)]$.

4. Sprawdź, czy następujące dwa zbiory są równe, rozłączne lub jeden zawiera się w drugim:

   (a) $(A \triangle B) \cap (A \triangle C)$ oraz $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$,
   gdzie różnica symetryczną $\triangle$ jest określona wzorem $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$,

   (b) $[A \setminus (B \triangle C)]$ oraz $[(A \setminus (B \cup C)] \cup (A \cap B \cap C)$.

   Odpowiedź uzasadnij za pomocą diagramów Venna.

5. Wyznacz dziedzinę naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$, uprość wzór, podaj zbiór wartości i naszkicuj wykres funkcji

   (a) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}|\operatorname{tg} x|$,

   (b) $f(x) = \left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| \sin x$,

   (c) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} x\right)$,

   (d) $f(x) = \operatorname{ctg} \arcsin x$.

6. Wyznacz granicę $\lim_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach

   (a) $a_n = \sqrt[n]{\frac{100^n + \sin n}{3^n + 10^n}}$,

   (b) $a_n = \frac{2n^2-1}{n^3+2} + \frac{2n^2-2}{n^3+4} + \ldots + \frac{2n^2-n}{n^3+2n}$.

7. Rozważmy symbole nieoznaczone dla granic ciągów:

   (a) $1^\infty$,

   (b) $0^0$,

   (c) $\infty^0$.

   - Dla dowolnego $\lambda \in [0,\infty]$ w (a), $\lambda \in [0,1]$ w (b) oraz $\lambda \in [1,\infty]$ w (c), podaj przykłady ciągów, by dany symbol nieoznaczony odpowiadał ciągowi zbieżnemu lub rozbieżnemu (w przypadku granicy niewłaściwej) do $\lambda$.
   - Podaj przykłady ciągów, aby powyższe symbole nieoznaczone odpowiadały ciągom, które nie są ani zbieżne, ani rozbieżne do granicy niewłasciwej.

8. Wyznacz granicę funkcji $\lim_{x\to x_0} f(x)$, jeśli

(a) $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{x^2-4}, x_0 = 2,$

(b) $f(x) = (1 + 2\sin x)^{\frac{1}{2x}}, x_0 = 0,$

(c) $f(x) = x^2\left(\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3-1}\right), x_0 = \infty,$

(d) $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x\ln(x+1)}, x_0 = 0,$

(e) $f(x) = \dfrac{\ln(1+\sin(5x))}{\ln(1+\sin x)}, x_0 = 0.$

*Uwaga:* nie można wykorzystywać reguły de l'Hospitala.

9. Wyznacz wszystkie asymptoty wykresu funkcji $f : D \to \mathbb{R}$, rozpatrywanej z dziedziną naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$, jeśli

(a) $f(x) = 2x + \operatorname{arc\,tg}(3x),$

(b) $f(x) = 5x + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{7}{x},$

(c) $f(x) = \cos x + \ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2},$

(d) $f(x) = \dfrac{x^3+\sin x}{(x-\pi)^2}.$

10. Dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, jeśli

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{x} \text{ dla } x < 0, \\ b \text{ dla } x = 0, \\ \frac{\sin(2x)}{x} \text{ dla } x > 0, \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x\ln 2}\left(2^x - 1\right) & \text{dla } x < 0, \\ 2 & \text{dla } x = 0, \\ \frac{\sin(bx)}{4x} & \text{dla } x > 0, \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{2^{ax}-1}{\ln(1-4x)} \text{ dla } x < 0, \\ b \text{ dla } x = 0, \\ \frac{\sin(2x)}{\operatorname{arc\,tg}(8x)} \text{ dla } x > 0? \end{cases}$

11. Udowodnij, że równanie

(a) $\ln x = -\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right),$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}\,x} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}x\right),$

ma jednoznaczne rozwiązanie w przedziale $(0, 1)$.

12. Z dokładnością do $0,25$ wyznacz wszystkie rozwiązania równania $x^3 - 2^{-x} = 4$.

13. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie o odciętej $x_0$, jeśli

(a) $f(x) = (x+1)\sqrt{e^x + x}, x_0 = 0,$

(b) $f(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{\ln\frac{1}{x}}, x_0 = 1.$

14. Wyznacz ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = (x+3)^2(x-1)^2$.

15. Wyznacz przedziały wypukłości, wklęsłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji

(a) $f(x) = e^{\sqrt{2}\,\sin x}$,

(b) $f(x) = e^{2\,\mathrm{arc\,tg}\,x}$.

16. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 8\ln x - x^2$ na przedziale $I = [1, 3]$.

17. Wyznacz granicę $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, jeśli

(a) $f(x) = \dfrac{\ln \sin x}{\ln \sin(-3x)}, x_0 = \dfrac{\pi}{2}$,

(b) $f(x) = \dfrac{\mathrm{tg}\, x - x}{x^3}, x_0 = 0$.

18. Oblicz $\displaystyle\int f(x)\,dx$, jeśli

(a) $f(x) = x^2 e^{4x}$,

(b) $f(x) = 3^x \cos^2 x$.

19. Oblicz całkę $\displaystyle\int f(x)\,dx$ z funkcji wymiernej $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 4x + 2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}$.

20. Oblicz całkę $\displaystyle\int f(x)\,dx$ z funkcji trygonometrycznej

(a) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x + 9}$,

(b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x(\cos^2 x + 1)}$.

21. Niech symbol $\lfloor \cdot \rfloor$ oznacza część całkowitą. Naszkicuj wykres funkcji $f$ i z jego pomocą oblicz całkę $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$, jeśli:

(a) $f(x) = x\left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor$, $a = 0, b = 4$,

(b) $f(x) = \left\lfloor \mathrm{e}^{2x} \right\rfloor$, $a = 0, b = \ln 2$.

22. Oblicz pole obszaru na płaszczyźnie, ograniczonego następującymi krzywymi:

(a) $y^2 - x = 0,\ 3y - x - 2 = 0$,

(b) $5x + 4y^2 = 0, x + 2y = 0$,

(c) $y = \mathrm{e}^{x-1}, y = \dfrac{1}{x}, x = 2$,

(d) $x = 2, y = \dfrac{x^2}{8}, xy = 8$,

(e) $y = x^2 \ln 2, y = \ln(1 + x)$.

23. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi $OX$ pola pod wykresem funkcji

(a) $f(x) = \sqrt{x}\ \cos x$ dla $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

(b) $f(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$, dla $x \in [0,1]$,

(c) $y = \sqrt{\ln(\mathrm{e} + x)}$ dla $x \in [0, \mathrm{e}]$.

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. Tautologia.
2. Np. $\neg p = p|p, p \vee q = (p|p)|(q|q)$.
3. (a) Zdanie prawdziwe,
   (b) zdanie fałszywe.
4. $L$ – lewa strona, $P$ – prawa strona,
   (a) $L \cap P = \emptyset$,
   (b) $L = P$.
5. (a) Dziedzina $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,
   wzór $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi), \\ \operatorname{tg} x & \text{dla } x \in [k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \end{cases}$
   zbiór wartości $W_f = [0, \infty)$,
   (b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla } x \in (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \\ -\cos x & \text{dla } x \in [\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi), \end{cases}$
   $W_f = (-1, 1)$,
   (c) $D_f = [-1, 1], f(x) = -x, W_f = [-1, 1]$,
   (d) $D_f = [-1, 0) \cup (0, 1], f(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} & \text{dla } x \in [-1, 0), \\ \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} & \text{dla } x \in (0, 1], \end{cases}$
   $W_f = \mathbb{R}$.
6. (a) 10,
   (b) 2.
7. Np. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\ln \lambda}{n}\right)^n = \lambda \in (0, \infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\binom{n^2}{}} = 0$,
   $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\binom{n^2}{}} = \infty$.
8. (a) $\frac{1}{4}$,
   (b) $e$,
   (c) $\frac{2}{3}$,
   (d) $-\frac{1}{2}$,
   (e) 5.
9. (a) $y = 2x + \frac{\pi}{2}$ – asymptota ukośna w $\infty$, $y = 2x - \frac{\pi}{2}$ – asymptota ukośna w $-\infty$,
   (b) $y = 5x$ – asymptota ukośna w $\infty$ i w $-\infty$,
   (c) $x = -1$ – asymptota pionowa prawostronna, $x = 1$ – asymptota pionowa lewostronna,
   (d) $x = \pi$ – asymptota pionowa, $y = x + 2\pi$ – asymptota ukośna w $\infty$ i w $-\infty$.
10. (a) $a = b = 2$,
    (b) $a = 2, b = 8$,
    (c) $a = -\frac{1}{\ln 2}, b = \frac{1}{4}$.
11. Dla różnicy funkcji wykorzystaj własność Darboux na przedziale $[\delta, 1]$, gdzie liczba dodatnia $\delta$ jest wystarczająco mała. Dla uzasadnienia jednoznaczności wykaż ścisłą monotoniczność różnicy funkcji na przedziale $(0, 1)$..
12. Jedno rozwiązanie, $x_0 \approx \frac{7}{4}$.

13. (a) $y = 2x + 1$,
    (b) $y = -x \ln 3 + 1 + \ln 3$.

14. $f(x)$ maleje na przedziałach $(-\infty, -3], [-1, 1]$, rośnie na przedziałach $[-3, -1], [1, \infty)$, przyjmuje ekstrema lokalne: 0 – dwukrotnie jako minimum lokalne właściwe (w punktach $x_0 = -3$ i $x_0 = 1$), 16 – maksimum lokalne właściwe (w punkcie $x_0 = -1$).

15. (a) $f(x)$ jest ściśle wypukła na przedziałach postaci $\left[\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \frac{1}{4}\pi + (2k+1)\pi\right]$ dla $k \in \mathbb{Z}$, $f(x)$ jest ściśle wklęsła na przedziałach postaci $\left[\frac{1}{4}\pi + 2k\pi, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]$ dla $k \in \mathbb{Z}$, punkty przegięcia wykresu funkcji są postaci $\left(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi, e\right)$ oraz $\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, e\right)$ dla $k \in \mathbb{Z}$,
    (b) $f(x)$ jest ściśle wypukła na przedziale $(-\infty, 1]$, ściśle wklęsła na przedziale $[1, \infty)$, a wykres ma jeden punkt przegięcia: $\left(1, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$.

16. Największą wartością jest $8 \ln 2 - 4$, a najmniejszą $-1$.

17. (a) 1,
    (b) $\frac{1}{3}$.

18. (a) $\frac{1}{4}x^2 e^{4x} - \frac{1}{8}xe^{4x} + \frac{1}{32}e^{4x} + C$,
    (b) $\frac{2 \cdot 3^x}{4 + \ln^2 3}\left[\frac{1}{3}\sin(2x) + \frac{\ln 3}{4}\cos(2x)\right] + \frac{3^x}{2 \ln 3} + C$.

19. $\frac{1}{4}x \sin(4x) + \frac{1}{16}\cos(4x) + C$.

20. (a) $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin x}{3} + C$,
    (b) $-\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\ln\left(\cos^2 x + 1\right) + C$.

21. (a) $\frac{15}{2}$,
    (b) $\frac{5}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$.

22. (a) $\frac{1}{6}$,
    (b) $\frac{25}{12}$,
    (c) $\mathrm{e} - 1 - \ln 2$,
    (d) $8 \ln 2 - \frac{7}{3}$,
    (e) $\frac{5}{3}\ln 2 - 1$.

23. (a) $\frac{\pi^3}{16} - \frac{\pi}{4}$,
    (b) $\frac{\pi\left(\mathrm{e}^6 - 1\right)}{4}$,
    (c) $2\pi \mathrm{e} \ln 2$.

# 10 Pierwsze kolokwium

*Uwaga: zadania na kolokwiach i egzaminach mogą dotyczyć innych części obowiązującego materiału.*

## Zestaw A

1. Zbadaj, czy jest prawem rachunku zdań (tautologią) wyrażenie
   $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

2. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2^n - 7^n + 9^n}{3^n - 2^n}}$.

3. Wyznacz wszystkie asymptoty wykresu funkcji $f(x) = x - \arcsin\dfrac{1}{x}$, rozpatrywanej z dziedziną naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$.

4. Dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, jeśli $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(bx)}{x} \text{ dla } x < 0, \\ 1 \text{ dla } x = 0, \\ (a+1)\ln(x+\mathrm{e}) \text{ dla } x > 0. \end{cases}$

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. Nie jest tautologią, jest fałszywe przy prawdziwości zdań $p$ i $r$ oraz fałszywości $q$.
2. 3. Po wyłączeniu przed pierwiastek 9/3 występują tylko symbole oznaczone (nie potrzeba używać twierdzenia o trzech ciągach).
3. Dziedziną naturalną jest zbiór $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Nie ma asymptot pionowych. Prosta o równaniu $y = x$ jest asymptotą ukośną w $\infty$ oraz w $-\infty$.
4. $b = 1, a = 0$.

## Zestaw B

1. Sprawdź, czy następujące dwa zbiory są równe, rozłączne lub jeden zawiera się w drugim:
   $[(A \cap B) \setminus C] \cup (A \cap C)$ oraz $A \cap (B \cup C)$.
   Odpowiedź uzasadnij za pomocą diagramów Venna.
2. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach
   $a_n = \dfrac{n + \operatorname{arc\,tg} 1}{n^2} + \dfrac{n + \operatorname{arc\,tg} 2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n + \operatorname{arc\,tg} n}{n^2}$.
3. Wyznacz wszystkie asymptoty wykresu funkcji $f(x) = -x + \ln \dfrac{1}{x}$, rozpatrywanej z dziedziną naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$.
   Uwaga: można wykorzystać wzór $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
4. Dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, jeśli
   $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arc\,tg}(bx)}{x} \text{ dla } x < 0, \\ 1 \text{ dla } x = 0, \\ (a+1)\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ dla } x > 0. \end{cases}$

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. Zbiory są równe.
2. 1. Można wykorzystać twierdzenie trzech ciągach.
3. Dziedziną naturalną jest przedział $(0, \infty)$. Prosta o równaniu $x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną. Nie ma asymptot ukośnych.
4. $b = 1, a = -2$.

## Zestaw C

1. Wyznacz dziedzinę naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$, uprość wzór i naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left|\sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)\right| \operatorname{tg} x$.
2. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach $a_n = \sqrt[n]{2^n - \operatorname{arc\,tg}(n^n) - \sin n}$.

3. Wyznacz granicę funkcji $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, jeśli $f(x) = \dfrac{\cos x}{2x - 3\pi}$ oraz $x_0 = \dfrac{3\pi}{2}$. *Uwaga:* nie można wykorzystywać reguły de l'Hospitala.

4. Z dokładnością do $0,25$ wyznacz wszystkie rozwiązania równania
$2^{-x} - x = 0$.

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. Dziedzina $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$, $f(x) = f(x + k\pi) = \sin x$ dla $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. 2.
3. $\dfrac{1}{2}$.
4. Jedno rozwiązanie, $x_0 \approx \dfrac{3}{4}$.

## Zestaw D

1. Wyznacz dziedzinę naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$, uprość wzór i naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}\left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|$.
2. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach
$a_n = \dfrac{n - \sin 1}{n^2 + 1} + \dfrac{n - \sin 2}{n^2 + 2} + \ldots + \dfrac{n - \sin n}{n^2 + n}$.
3. Wyznacz granicę funkcji $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, jeśli $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{2x - 5\pi}$ oraz $x_0 = \frac{5\pi}{2}$. *Uwaga:* nie można wykorzystywać reguły de l'Hospitala.
4. Z dokładnością do $0,25$ wyznacz wszystkie rozwiązania równania
$1 - x - \operatorname{arc\,tg}(2x - 1) = 0$.

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. Dziedzina $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,
$f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x & \text{dla } x \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{dla } x \in \left(k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi\right), k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$
2. 1.
3. $-\dfrac{1}{2}$.
4. Jedno rozwiązanie, $x_0 \approx \dfrac{3}{4}$.

## Zestaw E

1. Używając symboli negacji i alternatywy oraz nawiasów wyraź koniunkcję. Odpowiedź uzasadnij przez wypełnienie odpowiedniej tabelki.
2. Wyznacz dziedzinę naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$, uprość wzór i naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left|\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right| \sin x$.
3. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach $a_n = \sqrt[n]{n^n + 2}\ \sin\dfrac{1}{n}$
4. Wyznacz wszystkie asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x^2 + \operatorname{arc\,tg} x}{x + 1}$, rozpatrywanej z dziedziną naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$.

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. $p \wedge q = \neg[(\neg p) \vee (\neg q)]$.
2. Dziedzina $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,
   $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla } x \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}, \\ -\cos x & \text{dla } x \in \left(k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi\right), k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$
3. 1.
4. Asymptota pionowa obustronna o równaniu $x = -1$, asymptoty ukośne w $\infty$ i w $-\infty$, o równaniu $y = x - 1$.

## Zestaw F

1. Używając symboli negacji i koniunkcji oraz nawiasów wyraź równoważność. Odpowiedź uzasadnij przez wypełnienie odpowiedniej tabelki.
2. Wyznacz dziedzinę naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$, uprość wzór i naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)$.
3. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach
   $a_n = \frac{n^2-1}{n^3+1} + \frac{n^2-2}{n^3+2} + \ldots + \frac{n^2-n}{n^3+n}$.
4. Wyznacz wszystkie asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\frac{1+x^2}{4-x^2}$, rozpatrywanej z dziedziną naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$.

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. $p \Leftrightarrow q = \{\neg[p \wedge (\neg q)] \wedge \neg[(\neg p) \wedge q]\}$.
2. Dziedzina $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
3. 1.
4. Asymptota pionowa obustronna o równaniu $x = 0$, asymptota pionowa prawostronna o równaniu $x = -2$, asymptota pionowa lewostronna o równaniu $x = 2$.
   *Wskazówka:* dziedziną naturalną jest $D = (-2, 0) \cup (0, 2)$.

## Zestaw G

1. Używając symbli negacji i alternatywy, liter na oznaczenia zdań oraz nawiasów wyraź koniunkcję. Odpowiedź uzasadnij przez wypełnienie odpowiedniej tabelki.
2. Wyznacz dziedzinę naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$, uprość wzór i naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)\right| \sin x$.
3. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sqrt[n]{n^n + 1}$
4. Wyznacz wszystkie asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2 - \operatorname{arc\,ctg} x}{x-1}$, rozpatrywanej z dziedziną naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$.

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. $p \wedge q = \neg[(\neg p) \vee (\neg q)]$.
2. Dziedzina $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,
   $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla } x \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}, \\ -\cos x & \text{dla } x \in \left(k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi\right), k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$
3. 1.
4. Asymptota pionowa obustronna o równaniu $x = 1$, asymptoty ukośne w $\infty$ i w $-\infty$, o równaniu $y = x + 1$.

## Zestaw H

1. Używając symboli negacji i koniunkcji, liter na oznaczenia zdań oraz nawiasów wyraź alternatywę. Odpowiedź uzasadnij przez wypełnienie odpowiedniej tabelki.
2. Wyznacz dziedzinę naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$, uprość wzór i naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \operatorname{arc\,ctg} x\right)$.
3. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach
   $a_n = \frac{n^2 + \sqrt{1}}{n^3 - 1} + \frac{n^2 + \sqrt{2}}{n^3 - 2} + \ldots + \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n^3 - n}$.
4. Wyznacz wszystkie asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{2}{x+2} + \ln\frac{2 + x^2}{9 - x^2}$, rozpatrywanej z dziedziną naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$.

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. $p \vee q = \neg[(\neg p) \wedge (\neg q)]$.
2. Dziedzina $D = \mathbb{R}$, $f(x) = -x$.
3. 1.
4. Asymptota pionowa obustronna o równaniu $x = -2$, asymptota pionowa prawostronna o równaniu $x = -3$, asymptota pionowa lewostronna o równaniu $x = 3$.

   *Wskazówka:* dziedziną naturalną jest $D = (-3, -2) \cup (-2, 3)$.

# 11 Drugie kolokwium

## Zestaw A

1. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie o odciętej $x_0$, jeśli $f(x) = \ln(x + \cos x), x_0 = 0$.
2. Wyznacz przedziały ścisłej monotoniczności funkcji $f(x) = (x+1)^2(x+2)^2$.
3. Wyznacz pole ograniczonego obszaru na płaszczyźnie, wyznaczonego przez krzywe o równaniach $y^2 - x = 0,\ 3y - x - 2 = 0$.
4. Oblicz $\int e^x \cos x \, dx$.

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. $y = x$.
2. Funkcja $f$ jest ściśle rosnąca na przedziałach $\left[-2, -\frac{3}{2}\right], [-1, \infty)$, $f$ jest ściśle malejąca na przedziałach $(\infty, -2], \left[-\frac{3}{2}, -1\right]$; można podać w odpowiedzi przedziały otwarte, natomiast podanie sumy przedziałów jest błędem.
3. Punkty przecięcia wykresów to $(1,1), (4,2)$, pole to np. $P = \int\limits_1^2 (3y - 2 - y^2)dy = \frac{1}{6}$.
4. Po dwukrotnym całkowaniu przez części i przeniesieniu szukanej całki na jedą stronę, $I = \frac{\sin x + \cos x}{2} e^x + C$.

## Zestaw B

1. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie o odciętej $x_0$, jeśli $f(x) = \sin(\pi + \ln x), x_0 = 1$.
2. Wyznacz przedziały ścisłej wypukłości wykresu funkcji $f(x) = x^2 - \frac{64}{x}$.
3. Wyznacz pole ograniczonego obszaru na płaszczyźnie, wyznaczonego przez krzywe o równaniach $5x+4y^2 = 0, x + 2y = 0$,
4. Oblicz $\int x^2 e^{4x}\, dx$

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. $y = -x + 1$.
2. $(-\infty, 0), [4, \infty)$; drugi przedział można podać otwarty, suma przedziałów to błąd.
3. Punkty przecięcia wykresów to $(0,0), \left(-5, \frac{5}{2}\right)$, pole to np.

   $P = \int\limits_0^{\frac{5}{2}} \left(-\frac{4}{5}y^2 + 2y\right) dy = \frac{25}{12}$.
4. Po dwukrotnym całkowaniu przez części, $I = \frac{1}{4}x^2 e^{4x} - \frac{1}{8}xe^{4x} + \frac{1}{32}e^{4x} + C$.

## Zestaw C

1. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie o odciętej $x_0$, jeśli $f(x) = \ln(x + \sin x), x_0 = \frac{\pi}{2}$.
2. Wyznacz przedziały ścisłej monotoniczności funkcji $f(x) = x^2(x+2)^2$.
3. Wyznacz pole ograniczonego obszaru na płaszczyźnie, wyznaczonego przez krzywe o równaniach $x^2 - y = 0,\ 3x - y - 2 = 0$.
4. Oblicz $\int e^x \sin x\, dx$.

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. $y = \dfrac{2}{\pi+2}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)$.

2. Funkcja $f$ jest ściśle rosnąca na przedziałach $[-2,-1], [0,\infty)$, $f$ jest ściśle malejąca na przedziałach $(\infty,-2], [-1,0]$; można podać w odpowiedzi przedziały otwarte, natomiast podanie sumy przedziałów jest błędem.

3. Punkty przecięcia wykresów to $(1,1),(2,4)$, pole to np.
$P = \int\limits_1^2 (3x-2-x^2)dx = \dfrac{1}{6}$.

4. Po dwukrotnym całkowaniu przez części i przeniesieniu szukanej całki na jedą stronę, $I = \dfrac{\sin x - \cos x}{2}e^x + C$.

### Zestaw D

1. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie o odciętej $x_0$, jeśli $f(x) = \cos(\pi + \ln x), x_0 = 1$.

2. Wyznacz przedziały ścisłej wypukłości wykresu funkcji $f(x) = 9x^2 - \dfrac{64}{3x}$.

3. Wyznacz pole ograniczonego obszaru na płaszczyźnie, wyznaczonego przez krzywe o równaniach $5y+4x^2 = 0, y+2x = 0$,

4. Oblicz $\int x^2 e^{2x}\,dx$

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. $y = -1$.

2. $(-\infty,0), \left[\frac{4}{3},\infty\right)$; drugi przedział można podać otwarty, suma przedziałów to błąd.

3. Punkty przecięcia wykresów to $(0,0), \left(\dfrac{5}{2},-5\right)$, pole to np.
$P = \int\limits_0^{\frac{5}{2}} \left(-\dfrac{4}{5}x^2 + 2x\right)dx = \dfrac{25}{12}$.

4. Po dwukrotnym całkowaniu przez części, $I = \dfrac{1}{2}x^2e^{2x} - \dfrac{1}{2}xe^{2x} + \dfrac{1}{4}e^{2x} + C$.

## 12 Egzamin

### Zestaw A

1. Zbadaj, czy jest prawem rachunku zdań (tautologią) wyrażenie
$$[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r).$$

2. Wyznacz wszystkie asymptoty wykresu funkcji
$$f(x) = 2x + \arcsin\frac{5}{x},$$
rozpatrywanej z dziedziną naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$.

3. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie o odciętej $x_0 = 0$, jeśli
$$f(x) = \ln(1 + 2\sin x).$$

4. Wyznacz przedziały ścisłej monotoniczności funkcji
$$f(x) = (x-1)^2(x+5)^2.$$

5. Wyznacz pole ograniczonego obszaru na płaszczyźnie, wyznaczonego przez krzywe o równaniach
$$y^2 - 2x = 0,\ 3y - 2x - 2 = 0.$$

6. Oblicz
$$\int e^{2x} \cos x \, dx.$$

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. Nie jest tautologią, jest fałszywe przy prawdziwości zdań $p$ i $q$ oraz fałszywości $r$.

2. Dziedziną naturalną jest $D = (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$. Nie ma asymptot pionowych. Prosta o równaniu $y = 2x$ jest asymptotą ukośną w $\infty$ oraz w $-\infty$.

3. $y = 2x$.

4. $f'(x) = 4(x-1)(x+5)(x+2)$, $f$ jest ściśle rosnąca na przedziałach $[-5, -2], [1, \infty)$ (lub przedziały otwarte), $f$ jest ściśle malejąca na przedziałach $(-\infty, -5], [-2, 1]$ (lub przedziały otwarte); suma, np. $[-5, -2] \cup [1, \infty)$, to błąd.

5. Punkty przecięcia to $\left(\frac{1}{2}, 1\right), (2, 2)$, pole to np.
$$P = \int_1^2 \left(\frac{3y-2}{2} - \frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{9}{4} - 1 - \frac{7}{6} = \frac{1}{12}.$$

6. Po dwukrotnym całkowaniu przez części, $I = \dfrac{\sin x + 2\cos x}{5} e^{2x} + C$.

## Zestaw B

1. Wyznacz dziedzinę naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$, uprość wzór i naszkicuj wykres funkcji
$$f(x) = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| \operatorname{tg} x.$$

2. Wyznacz dwa pierwsze wyrazy ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a następnie oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, jeśli
$$a_n = \frac{n + 3\arccos\frac{1}{1}}{n^2} + \frac{n + 3\arccos\frac{1}{2}}{n^2} + \ldots + \frac{n + 3\arccos\frac{1}{n}}{n^2}.$$

3. Z dokładnością do $0,25$ wyznacz wszystkie rozwiązania równania
$$3^{-x} = 2x,$$

4. Wyznacz przedziały ścisłej wypukłości funkcji
$$f(x) = 9x^2 - \frac{64}{3x}.$$

5. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi $OX$ pola pod wykresem funkcji

$$f(x) = \mathrm{e}^{5x}$$

dla $x \in [0,1]$.

6. Oblicz

$$\int (x+1)^2 e^{2x}\, dx.$$

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. Dziedzina $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$, $f(x) = \sin x$
dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, funkcja jest okresowa o okresie $\pi$.

2. $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2} + \frac{2 + 3\frac{\pi}{3}}{4} = 1 + \frac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
Można wykorzystać twierdzenie trzech ciągach.

3. Co najwyżej jedno rozwiązanie ze ścisłej monotoniczności funkcji $f(x) = 3^{-x} - 2x$, przynajmniej jedno z własności Darboux: $f(0) > 0, f(1) < 0, f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. Odpowiedź: $x_0 \approx \frac{1}{4}$.

4. $f'(x) = 18x + \frac{64}{3x^2}, f''(x) = 2\frac{27x^3 - 64}{3x^3}$, przedziałami ścisłej wypukłości są $(-\infty, 0)$, $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$ (ten drugi przedział może być otwarty). Podanie w odpowiedzi sumy przedziałów to błąd.

5. $V = \frac{\pi\left(\mathrm{e}^{10} - 1\right)}{10}$.

6. Po dwukrotnym całkowaniu przez części, $I = \frac{1}{2}(x+1)^2 e^{2x} - \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$.

## Zestaw C

1. Sprawdź, czy następujące dwa zbiory są równe, rozłączne lub jeden zawiera się w drugim: $[(A \cap C) \setminus B] \cup (A \cap B)$, $A \cap (B \cup C)$. Odpowiedź uzasadnij na rysunkach – diagramach Venna.

2. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach

$$a_n = \left(\frac{2^n - 3^n + 5^n}{7^n + 10^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

3. Dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, jeśli $f(x) = \begin{cases} \frac{a \operatorname{arc\,tg}(x)}{x} \text{ dla } x < 0, \\ 5 \text{ dla } x = 0, \\ (b+2)\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) \text{ dla } x > 0. \end{cases}$

4. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji
$f(x) = 2\ln x - x$ na przedziale $I = [1, e]$.

5. Wyznacz pole ograniczonego obszaru na płaszczyźnie, wyznaczonego przez krzywe o równaniach $5x + 2y^2 = 0$, $5x + 2y = 0$.

6. Oblicz całkę $\int f(x)\, dx$ z funkcji trygonometrycznej
$f(x) = \cos x \left(\sin^2 x + 1\right)^2$.

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. Zbiory są równe.
2. $\frac{1}{2}$. Po wyłączeniu przed pierwiastek 5/10 występują tylko symbole oznaczone (nie potrzeba używać twierdzenia o trzech ciągach).
3. $a = 5, b = -7$.
4. $f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$, zbiór możliwych ekstremów globalnych $A = \{f(1), f(2), f(e)\} = \{-1, 2\ln 2 - 2, 2 - e\}$. Łatwo $f(1) < f(e)$. Na zadanym przedziale $f$ najpierw rośnie, potem (od $x = 2$) maleje, zatem $m = -1, M = 2\ln 2 - 2$.
5. Punkty przecięcia to $\left(-\frac{2}{5}, 1\right), (0, 0)$, pole to np.
   $P = \int\limits_0^1 \left(-\frac{2}{5}y^2 + \frac{2}{5}y\right) dy = \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{15}$.
6. Podstawienie $t = \sin x$, zatem
   $I = -\int (t^2+1)^2 dt = -\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x - \sin x + C$.

## Zestaw D

1. Wyznacz dziedzinę naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$, uprość wzór i naszkicuj wykres funkcji
   $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}\left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|$.
2. Wyznacz pierwszy wyraz ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a następnie oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, jeśli
   $$a_n = \frac{n + \operatorname{arc\,tg} 1}{n^2+n} + \frac{n + \operatorname{arc\,tg} 2}{n^2+n} + \ldots + \frac{n + \operatorname{arc\,tg} n}{n^2+n}.$$
3. Z dokładnością do $0,5$ wyznacz wszystkie rozwiązania równania $\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{3}\,x\right) = 1 - \ln\left(1 + (e-1)x\right)$.
4. Wyznacz granicę $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, jeśli $f(x) = \frac{\ln\cos(4x)}{x^2}$, $x_0 = 0$.
5. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi $OX$ pola pod wykresem funkcji
   $$y = \sqrt{\ln x}$$
   dla $x \in [1, e]$.
6. Oblicz całkę $\int f(x)\,dx$ z funkcji trygonometrycznej
   $$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 5}.$$

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. Dziedzina $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,
   $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x & \text{dla } x \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{dla } x \in \left[k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi\right), k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$
2. $a_1 = \frac{4+\pi}{8}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, można wykorzystać twierdzenie trzech ciągach.

3. Co najwyżej jedno rozwiązanie ze ścisłej monotoniczności funkcji $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{3}\ x\right) + \ln\left(1 + (e-1)x\right) - 1$, przynajmniej jedno z własności Darboux: $f(0) = -1 < 0, f(1) = \dfrac{\pi}{3} > 0$. Odpowiedź: $x_0 \approx \dfrac{1}{2}$.

4. Można zastosować regułę de l'Hospitala dla symbolu $\dfrac{0}{0}$, otrzymujemy po pierwszym kroku
$\dfrac{l'(x)}{m'(x)} = \dfrac{-4\sin(4x)}{2x\cos(4x)} = \dfrac{-8}{\cos(4x)} \cdot \dfrac{\sin(4x)}{4x} \to -8.$

5. $V = \pi \displaystyle\int_0^e \ln x\ dx = \pi\left[x\ln x - x\right]_{x=1}^{e} = \pi..$

6. Podstawienie $t = 5 + \cos x$, zatem
$I = -\displaystyle\int \frac{dt}{t+5} dt = -\ln|5 + \cos x| + C.$

## Zestaw E

1. Zbadaj, czy jest prawem rachunku zdań (tautologią) wyrażenie
$$[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (p \vee r).$$

2. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$
w punkcie o odciętej $x_0 = 0$, jeśli
$$f(x) = \ln(1 + \operatorname{arc\,tg} x).$$

3. Wyznacz przedziały ścisłej monotoniczności funkcji
$$f(x) = x^2(x+4)^2.$$

4. Wyznacz pole ograniczonego obszaru na płaszczyźnie, wyznaczonego przez krzywe o równaniach
$$y^2 - 4x = 0,\ 3y - 4x - 2 = 0.$$

5. Oblicz
$$\int e^{-x} \sin x\, dx.$$

6. Wyznacz wzór wielomianu, według którego można wypełniać tablice matematyczne dla funkcji
$$f(x) = \sin x$$
w przedziale $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

### *Odpowiedzi, wskazówki*

1. Nie jest tautologią, jest fałszywe przy fałszywości zdań $p$ i $r$ (zdanie $q$ dowolne).

2. $f(0) = 0, f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)(1+\operatorname{arc\,tg} x)}, f'(0) = 1, y = x.$

3. $f'(x) = 4x(x+4)(x+2)$, $f$ jest ściśle rosnąca na przedziałach $[-4,-2], [0,\infty)$ (lub przedziały otwarte), $f$ jest ściśle malejąca na przedziałach
$(-\infty,-4], [-2,0]$ (lub przedziały otwarte); suma, np. $[-4,-2] \cup [0,\infty)$, to błąd.

4. Punkty przecięcia to $\left(\dfrac{1}{4}, 1\right), (1,2)$, pole to np.
$P = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{3y-2}{4} - \frac{y^2}{4}\right) dy = \frac{9}{8} - \frac{1}{2} - \frac{7}{12} = \frac{1}{24}.$

5. np. $I = \int e^{-x}\sin x dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x dx = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x - I$, skąd $I = -\frac{\cos x + \sin x}{2}e^{-x} + C$.

6. $R_{2k+1}(x) = \frac{(-1)^k \cos c}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ stąd wystarczy $k = 2$, zatem $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$.

## Zestaw F

1. Wyznacz dziedzinę naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$, uprość wzór i naszkicuj wykres funkcji
$$f(x) = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right| \operatorname{ctg} x.$$

2. Wyznacz pierwszy wyraz ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a następnie oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, jeśli $a_n = \frac{n - \operatorname{arc\,tg} 1}{n^2} + \frac{n - \operatorname{arc\,tg} 2}{n^2} + \ldots + \frac{n - \operatorname{arc\,tg} n}{n^2}$.

3. Wyznacz przedziały ścisłej wypukłości funkcji
$$f(x) = 9x^2 - \frac{8}{3x}.$$

4. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi $OX$ pola pod wykresem funkcji
$$f(x) = 2^x$$
dla $x \in [0,1]$.

5. Oblicz
$$\int (x+3)^2 \sin x \, dx.$$

6. Wyznacz wzór wielomianu, według którego można wypełniać tablice matematyczne dla funkcji $f(x) = \ln(1+x)$ w przedziale $[0,1]$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

### *Odpowiedzi, wskazówki*

1. Dziedzina $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $f(x) = \cos x$ dla $x \in (0,\pi)$, funkcja jest okresowa o okresie $\pi$.

2. $a_1 = 1 - \frac{\pi}{4}$, $\frac{n - \frac{\pi}{2}}{n} \leqslant a_n \leqslant 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

3. $f'(x) = 18x + \frac{8}{3x^2}$, $f''(x) = 2\frac{27x^3 - 8}{3x^3}$, przedziałami ścisłej wypukłości są $(-\infty, 0)$, $\left[\frac{2}{3}, \infty\right)$ (ten drugi przedział może być otwarty). Podanie w odpowiedzi sumy przedziałów to błąd.

4. $V = \pi \int\limits_0^1 4^x dx = \frac{3\pi}{2\ln 2}$.

5. $\int (x+3)^2 \sin x dx = -(x+3)^2 \cos x + 2\int (x+3)\cos x dx = -(x+3)^2 \cos x + 2(x+3)\sin x + \cos x + C$.

6. $R_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+c)^n}$ stąd wystarczy $n = 3$, zatem $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$.

## Zestaw G

1. Sprawdź, czy następujące dwa zbiory są równe, rozłączne lub jeden zawiera się w drugim: $[(B \cap C) \setminus A] \cup (B \cap A)$, $B \cap (A \cup C)$. Odpowiedź uzasadnij na rysunkach – diagramach Venna.

2. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach

$$a_n = (2^n - 3^n + 5^n + 7^n + 10^n)^{\frac{1}{n}}.$$

3. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = \ln(2x) - x$$

na przedziale $I = \left[\frac{1}{2}, \frac{e}{2}\right]$.

4. Wyznacz pole ograniczonego obszaru na płaszczyźnie, wyznaczonego przez krzywe o równaniach $5x+8y^2 = 0$, $5x + 4y = 0$.

5. Oblicz całkę $\int f(x)\,dx$ z funkcji trygonometrycznej

$$f(x) = \sin x \left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right).$$

6. Wyznacz wzór wielomianu, według którego można wypełniać tablice matematyczne dla funkcji

$$f(x) = \cos x$$

w przedziale $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

### *Odpowiedzi, wskazówki*

1. Zbiory są równe.

2. 10. Po wyłączeniu przed pierwiastek 10 występują tylko symbole oznaczone (nie potrzeba używać twierdzenia o trzech ciągach).

3. $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, zbiór możliwych ekstremów globalnych $A = \{f(1/2), f(1), f(e/2)\} = \{-1/2, \ln 2 - 1, 1 - (e/2)\}$. Łatwo $f(1/2) < f(e/2)$. Na zadanym przedziale $f$ najpierw rośnie, potem (od $x = 1$) maleje, zatem $m = -1/2, M = \ln 2 - 1$.

4. Punkty przecięcia to $\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right), (0,0)$, pole to np.

$$P = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{8}{5}y^2 + \frac{4}{5}y\right) dy = \frac{1}{10}\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{30}.$$

5. $I = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C.$

6. $R_{2k}(x) = \frac{(-1)^k \cos c}{(2k)!} x^{2k}$ stąd wystarczy $k = 3$, zatem $\cos x \approx 1 - x^2/2 + x^4/24$.

## Zestaw H

1. Wyznacz dziedzinę naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$, uprość wzór i naszkicuj wykres funkcji
$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\left|\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

2. Wyznacz pierwszy wyraz ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a następnie oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, jeśli
$$a_n = \frac{n + \operatorname{arc\,ctg} 1}{n^2 + 2n} + \frac{n + \operatorname{arc\,ctg} 2}{n^2 + 2n} + \ldots + \frac{n + \operatorname{arc\,ctg} n}{n^2 + 2n}.$$

3. Wyznacz granicę $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, jeśli $f(x) = \dfrac{\ln\cos(-x)}{x^2}$, $x_0 = 0$.

4. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi $OX$ pola pod wykresem funkcji
$$y = \sqrt{\ln(x^2)}$$
dla $x \in [1, \sqrt{e}]$.

5. Oblicz całkę $\displaystyle\int f(x)\,dx$ z funkcji trygonometrycznej
$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}.$$

6. Wyznacz wzór wielomianu, według którego można wypełniać tablice matematyczne dla funkcji $f(x) = e^x$ w przedziale $[0, 1]$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

### *Odpowiedzi, wskazówki*

1. Dziedzina $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{gdy } \operatorname{tg} x \geqslant 0, \\ 0, & \text{gdy } \operatorname{tg} x < 0. \end{cases}$

2. $a_1 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\pi}{12}$, $\dfrac{n^2}{n^2 + 2n} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{n^2 + \frac{\pi}{2}}{n^2 + 2n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

3. Można zastosować regułę de l'Hospitala dla symbolu $\dfrac{0}{0}$, otrzymujemy
$\dfrac{l'(x)}{m'(x)} = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)2x} = \dfrac{-1}{2\cos(-x)} \cdot \dfrac{\sin(x)}{x} \to -\dfrac{1}{2}$.

4. $V = \pi \displaystyle\int_0^{\sqrt{e}} \ln\left(x^2\right)\ dx = 2\pi\left[x\ln x - x\right]_{x=1}^{\sqrt{e}} = \pi(2 - \sqrt{e})$.

5. $I = \displaystyle\int \sin^2 x \cos x\ dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$.

6. $R_n(x) = \dfrac{e^c}{n!}x^n$, stąd wystarczy $n = 5$, zatem $e^x \approx \displaystyle\sum_{n=0}^{4} \frac{x^n}{n!}$.

## Zestaw I

1. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach

$$a_n = \left(\frac{10^n - 3^n}{-2^n + 5^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

2. Dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left((a^2+1)x\right)}{x} \text{ dla } x < 0 \\ 10 \text{ dla } x = 0 \\ (b + \cos x)\ln\left(x + \mathrm{e}^5\right) \text{ dla } x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$?

3. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji

$$f(x) = \ln(\cos x + 2\sin x)$$

w punkcie o odciętej $x_0 = 0$.

4. * Oblicz $\sin\dfrac{1}{2}$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

5. Oblicz pole ograniczonego obszaru na płaszczyźnie, wyznaczonego przez krzywe o równaniach

$$y^2 - 8x = 0,\ 3y - 8x - 2 = 0.$$

6. Oblicz

$$\int e^x \cos(4x)\, dx.$$

### *Odpowiedzi, wskazówki*

1. Po wyłączeniu $\dfrac{10}{5} = 2$ przed pierwiastek, symbol oznaczony $2 \cdot 1^0 = 2$.

2. $a \in \{3, -3\}, b = 1$.

3. $y = 2x$.

4. Reszta we wzorze Maclaurina dla $f(x) = \sin x$:
$|R_n(c)| < \dfrac{1}{n!\ 2^n} \leqslant 10^{-3}$, wystarczy $n = 5$, $\sin\dfrac{1}{2} \approx \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{48} = \dfrac{23}{48}$.

5. Punkty przecięcia to $\left(\dfrac{1}{8}, 1\right), \left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$, pole to np.
$P = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{3y-2}{8} - \frac{y^2}{8}\right) dy = \frac{9}{16} - \frac{1}{4} - \frac{7}{24} = \frac{1}{48}.$

6. Po dwukrotnym całkowaniu przez części,
$I = \dfrac{4\sin(4x) + \cos(4x)}{17} e^x + C.$

## Zestaw J

1. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach

$$a_n = \frac{n^7-1}{n^8+1} + \frac{n^7-2}{n^8+2} + \ldots + \frac{n^7-n}{n^8+n}.$$

2. Wyznacz dziedzinę naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$ oraz, o ile istnieją, asymptoty ukośne wykresu funkcji

$$f(x) = 3x + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x+1}.$$

3. Wyznacz przedziały ścisłej monotoniczności funkcji

$$f(x) = (x+3)^2(x+1)^2.$$

4. * Wyznacz $\ln 1,5$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

5. Oblicz objętość bryły zakreślonej przez obrót dookoła osi $OX$ pola pod wykresem funkcji

$$f(x) = 5^x$$

dla $x \in [0,1]$.

6. Oblicz

$$\int (x-1)^2\ e^x\, dx.$$

### *Odpowiedzi, wskazówki*

1. Z tw. o trzech ciągach, granica wynosi 1.
2. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, asymptoty ukośne w obu nieskończonościach o równaniu $y = 3x$.
3. $f'(x) = 4(x+1)(x+2)(x+3)$, funkcja rośnie na przedziałach $[-3,-2], [-1,\infty)$, maleje na przedziałach $(-\infty,-3,], [-2,-1]$ (dopuszczalne są przedziały otwarte). Podanie w odpowiedzi sumy przedziałów to błąd.
4. Reszta $R_n(c)$ we wzorze Maclaurina dla $f(x) = \ln(1+x)$:
$|R_n(c)| < \dfrac{1}{n\ 2^n} \leqslant 10^{-2}$, wystarczy $n = 5$, $\ln 1,5 \approx \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\cdot 2^2} + \dfrac{1}{3\cdot 2^3} - \dfrac{1}{4\cdot 2^4}$.
5. $V = \dfrac{12\pi}{\ln 5}$.
6. Po dwukrotnym całkowaniu przez części, $I = (x-1)^2e^x - 2(x-1)e^x + 2e^x + C$.

## Zestaw K

1. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach

$$a_n = \left(\frac{4^n-3^n}{8^n-5^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

2. Dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, funkcja

$$f(x) = \begin{cases} (a+x)\ \cos(\pi x) \ \text{ dla } x < 0 \\ 8 \text{ dla } x = 0 \\ \frac{\ln\left(1+(b^2+4)x\right)}{x} \ \text{ dla } x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$?

3. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji
$$f(x) = \sin(\ \ln(1+2x)\ )$$
w punkcie o odciętej $x_0 = 0$.

4. * Oblicz $\cos\frac{1}{2}$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

5. Oblicz pole ograniczonego obszaru na płaszczyźnie, wyznaczonego przez krzywe o równaniach
$$x^2 - 8y = 0,\ 3x - 8y - 2 = 0.$$

6. Oblicz
$$\int 7^x \sin x\, dx.$$

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. Po wyłączeniu $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ przed pierwiastek, symbol oznaczony $\frac{1}{2} \cdot 1^0 = \frac{1}{2}$.
2. $b \in \{2, -2\}, a = 8$.
3. $y = 2x$.
4. Reszta $R_n(c)$ we wzorze Maclaurina dla $f(x) = \cos x$:
$|R_n(c)| < \frac{1}{n!\ 2^n} \leqslant 10^{-3}$, wystarczy $n = 5$, $\cos\frac{1}{2} \approx 1 - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{4! \cdot 2^4}$.
5. Punkty przecięcia to $\left(1, \frac{1}{8}\right), \left(2, \frac{1}{2}\right)$, pole to np.
$$P = \int_1^2 \left(\frac{3x-2}{8} - \frac{x^2}{8}\right) dx = \frac{9}{16} - \frac{1}{4} - \frac{7}{24} = \frac{1}{48}.$$
6. Po dwukrotnym całkowaniu przez części,
$I = \frac{-\cos x + \ln 7 \cdot \sin x}{1 + \ln^2 7} 7^x + C.$

## Zestaw L

1. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu o wyrazach
$$a_n = \frac{n^5+1}{n^6-1} + \frac{n^5+2}{n^6-2} + \ldots + \frac{n^5+n}{n^6-n}.$$

2. Wyznacz dziedzinę naturalną $D \subseteq \mathbb{R}$ oraz, o ile istnieją, asymptoty ukośne wykresu funkcji
$$f(x) = -x + \cos\frac{1}{x+4}.$$

3. Wyznacz przedziały ścisłej monotoniczności funkcji
$$f(x) = (x-1)^2(x+5)^2.$$

4. * Wyznacz $\ln 1,2$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

5. Oblicz objętość bryły zakreślonej przez obrót dookoła osi $OX$ pola pod wykresem funkcji
$$f(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$$
dla $x \in [0,1]$.

6. Oblicz
$$\int x^2\ 7^x\, dx.$$

*Odpowiedzi, wskazówki*

1. Z tw. o trzech ciągach, granica wynosi 1.
2. $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$, asymptoty ukośne w obu nieskończonościach o równaniu $y = -x + 1$.
3. $f'(x) = 4(x-1)(x+2)(x+5)$, funkcja rośnie na przedziałach $[-5,-2], [1,\infty)$, maleje na przedziałach $(-\infty,-5,], [-2,1]$ (dopuszczalne są przedziały otwarte). Podanie w odpowiedzi sumy przedziałów to błąd.
4. Reszta $R_n(c)$ we wzorze Maclaurina dla $f(x) = \ln(1+x)$:
   $|R_n(c)| < \dfrac{1}{n\ 5^n} \leqslant 10^{-3}$, wystarczy $n = 4$, $\ln 1,2 \approx \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2 \cdot 5^2} + \dfrac{1}{3 \cdot 5^3}$.
5. $V = \dfrac{\pi}{4}\left(e^6 - 1\right)$.
6. Po dwukrotnym całkowaniu przez części, $I = \left(\dfrac{x^2}{\ln 7} - \dfrac{2x}{\ln^2 7} + \dfrac{2}{\ln^3 7}\right) 7^x + C$.