Spis treści

1. Wprowadzenie 3
1.1. O matematyce 3
1.2. O kursie 3
1.3. Ciągłość 3
1.4. Pochodna 5
1.5. Całka 6
1.6. Liczby rzeczywiste 6
2. Liczby rzeczywiste 8
2.1. Formalna definicja 8
2.2. Liczby naturalne i zasada indukcji 9
2.3. Rozkład na czynniki pierwsze 11
2.4. Inne zbiory liczb 11
2.5. Kresy 13
3. Ciągi liczbowe (część I) 16
3.1. Definicje 16
3.2. Zbieżność 17
3.3. Zbieżność a liczby rzeczywiste 21
3.4. Szeregi 23
4. Funkcja wykładnicza i logarytm 25
4.1. Funkcja wykładnicza 25
4.2. Logarytm naturalny 28
4.3. Potęgowanie 29
4.4. Funkcje trygonometryczne 30
5. Ciągi liczbowe (część II) 31
5.1. Granice niewłaściwe 31
5.2. Podciągi 33
5.3. Granica dolna i granica górna 35
5.4. Przykłady 37
6. Funkcje rzeczywiste, funkcje elementarne, funkcje ciągłe 38
6.1. Funkcje rzeczywiste 38
6.2. Funkcje trygonometryczne 39
6.3. Funkcje cyklometryczne 40
6.4. Funkcje elementarne 41
6.5. Ciągłość funkcji elementarnych 42
7. Granice funkcji i funkcje ciągłe 45
7.1. Granice funkcji 45
7.2. Granice niewłaściwe funkcji 48
7.3. Granice jednostronne funkcji 48
7.4. Definicje Cauchy'ego 51
7.5. Asymptoty funkcji 52
7.6. Funkcje ciągłe 54
7.7. Funkcje nieciągłe 55
7.8. Ujęcie topologiczne 56
7.9. Własności funkcji ciągłych 56
8. Pochodne 61
8.1. Definicje 61

8.2. Obliczanie pochodnych 62
8.3. Twierdzenia o wartości średniej 66
8.4. Ekstrema i monotoniczność 69
8.5. Reguła de l'Hospitala 70
8.6. Własność Darboux funkcji pochodnej 73
8.7. Pochodne wyższych rzędów i wzór Taylora 73
8.8. Druga pochodna 75
9. Całka nieoznaczona 78
9.1. Definicje 78
9.2. Podstawowe techniki obliczania całek nieoznaczonych 78
9.3. Całkowanie funkcji wymiernych 82
9.4. Sprowadzanie niektórych całek do całek z funkcji wymiernych 84
10. Całka oznaczona 89
10.1. Definicja i interpretacje 89
10.2. Podstawowe własności 90
10.3. Wzór Taylora 91
10.4. Przykłady zastosowań całek oznaczonych 94

1. Wprowadzenie

1.1. **O matematyce.** Matematyka to przede wszystkim dowodzenie twierdzeń, czyli sztuka logicznego wyciągania wniosków. Najlepszym przykładem jest geometria euklidesowa: kilka stwierdzeń przyjmuje się za pewniki — są to *aksjomaty* albo *postulaty* — i na ich podstawie tworzy się teorię matematyczną, czyli zbiór twierdzeń. Język matematyki musi być ścisły, tak, aby każdy mógł bez trudu go zrozumieć i sprawdzić poprawność rozumowania.

Język matematyki nie może odwoływać się do intuicji: pozornie oczywiste stwierdzenia wymagają często pracochłonnego uzasadnienia. Przykładem niech będzie *twierdzenie Jordana o krzywej*: każda ciągła linia zamknięta na płaszczyźnie dzieli ją na dwie części, z których jedna jest ograniczona (*wnętrze*), a druga nieograniczona (*zewnętrze*)*. Długo uznawano, że fakt ten nie wymaga uzasadnienia, dopiero Bernard Bolzano dostrzegł potrzebę ścisłego dodwodu, który następnie został podany przez Camille'a Jordana.

Z drugiej strony dowody matematyczne mogą być bardzo atrakcyjne (mówi się często: eleganckie). Najlepszym przykładem jest chyba słynny dowód twierdzenia Pitagorasa, podany przez Bhāskarę drugiego i opatrzony wyłącznie komentarzem „Patrz!". [[rysunek]]

Trzeba tu podkreślić, że intuicja jest niezwykle ważna w matematyce: pomaga stawiać prawidłowe hipotezy i znajdować właściwe argumenty. Należy jednak pamiętać, by zawsze sprawdzać to, co wydaje się oczywiste**.

1.2. **O kursie.** Tradycyjna (i precyzyjniejsza) nazwa kursu to *Rachunek różniczkowy i całkowy*. Celem zajęć jest zapoznanie Państwa z pojęciem *pochodnej* i *całki*, dwiema operacjami na *funkcjach rzeczywistych*, czyli funkcjach odwzorowujących podzbiór zbioru liczb rzeczywistych (najczęściej sumę przedziałów) w zbiór liczb rzeczywistych. Operacje te wprowadzone zostały przez Isaaca Newtona i Gottfrieda Leibniza pod koniec XVII wieku. Podobne idee można odnaleźć już w starożytności w pracach Archimedesa. Język matematyczny stosowany przez Newtona i Leibniza był nieprecyzyjny i przez to nie wszystkie uzyskane przez nich rezultaty były prawdziwe. Próby uściślenia teorii pochodnej i całki zakończyły się sukcesem dopiero w XIX wieku i jest to sukces wielu matematyków, m.in. Augustina-Louisa Cauchy'ego, Karla Weierstrassa i Bernharda Riemanna. Współczesny, bardzo sformalizowany język pochodzi już z XX wieku, o czym w szczegółach dowiedzą się Państwo na kursie *Wstęp do logiki i teorii mnogości*.

Cztery najważniejsze pojęcia w rachunku różniczkowym i całkowym, a zapewne i w całej analizie matematycznej, to *ciągłość* (oraz pokrewne pojęcie *granicy*), *pochodna*, *całka* i *liczba rzeczywista*. Szczegółowo zostaną one omówione później, w tym miejscu warto jednak zasygnalizować, czym właściwie one są.

1.3. **Ciągłość.** Jedna wielkość zależy od drugiej w sposób *ciągły*, jeśli odpowiednio mała zmiana pierwszej zmienia drugą tylko nieznacznie. Nie jest to precyzyjna definicja, ale stanowi dobry punkt wyjścia.

Stwierdzenie „druga zmienna zależy od pierwszej" oznacza, że druga zmienna jest funkcją pierwszej zmiennej. Aby wyrazić się precyzyjnie, potrzebne są oznaczenia: niech t będzie pierwszą zmienną (argumentem), zaś $f(t)$ drugą zmienną (funkcją). Wygodnie mieć przed oczami konkretny obraz: niech na przykład t oznacza czas, w sekundach, zaś $f(t)$ odległość przejechaną przez samochód, w metrach. Funkcja f jest ciągła, jeśli

*Dla wielokątów i wielu innych linii dowód nie jest bardzo trudny. Ale linie mogą być bardzo nieregularne! Hasła do dalszej lektury: fraktale, krzywa Osgooda.

**Autor niniejszych notatek na stwierdzenie „to jest oczywiste" *zawsze* odpowiada pytaniem „dlaczego".

odpowiednio mała zmiana wartości zmiennej — na przykład z t na $t+h$ — oznacza małą zmianę wartości funkcji — z $f(t)$ na $f(t+h)$.

Ściślej: dla dowolnie zadanej maksymalnej zmiany wartości funkcji $\varepsilon > 0$ można dobrać maksymalną zmianę wartości zmiennej $\delta > 0$ tak, aby zmiana argumentu o mniej niż δ oznaczała zmianę wartości o mniej niż ε: z warunku $|h| < \delta$ ma wynikać warunek $|f(t+h) - f(t)| < \varepsilon$.

> Definicja 1.1. Funkcja f jest *ciągła* w punkcie* t, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ o następującej własności: z warunku $|h| < \delta$ wynika $|f(t+h) - f(t)| < \varepsilon$.

Słowo o historii: autorem powyższej *epsilonowo-deltowej* definicji jest Karl Weierstrass, choć wcześniej podobne sformułowanie podał Bernard Bolzano. Często nazywana jest ona definicją Cauchy'ego, mimo że Augustin-Louis Cauchy stosował zamiast niej sformułowanie oparte na nieprecyzyjnym pojęciu wielkości nieskończenie małych**.

Aby udowodnić, że dana funkcja jest ciągła, trzeba dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wskazać odpowiednią $\delta > 0$ (lub przynajmniej udowodnić jej isntienie). Dla ścisłości: δ może zależeć od wartości ε, funkcji f oraz argumentu t.

Przykład. Funkcja $f(t) = \sqrt{t}$ jest ciągła w punkcie 1. Zachodzi bowiem

$$|f(1+h) - f(1)| = |\sqrt{1+h} - \sqrt{1}| = \left|\frac{(1+h)-1}{\sqrt{1+h}+1}\right| = \frac{|h|}{\sqrt{1+h}+1}\,.$$

Niech $\varepsilon > 0$ i niech δ będzie mniejszą z liczb ε i 1. Przy tym wyborze δ z warunku $|h| < \delta$ wynika [[rysunek]]

$$|f(1+h) - f(1)| = \frac{|h|}{\sqrt{1+h}+1} < \frac{\delta}{0+1} = \delta \leqslant \varepsilon.$$

Przykład. Funkcja $f(t) = \frac{1}{t}$ jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny. Zachodzi bowiem

$$|f(t+h) - f(t)| = \left|\frac{1}{t+h} - \frac{1}{t}\right| = \left|\frac{(t+h)-t}{(t+h)t}\right| = \frac{|h|}{|t+h|\cdot|t|}\,.$$

Niech $t \neq 0$ oraz $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $\delta > 0$ taka, że $\delta < \frac{|t|}{2}$ oraz $\delta < \frac{1}{2}|t|^2\varepsilon$. Przy tym wyborze δ z warunku $|h| < \delta$ wynika $|t+h| \geqslant ||t| - |h|| \geqslant |t| - |h| > |t| - \frac{|t|}{2} = \frac{|t|}{2}$ (dowód pierwszej nierówności to jedno z ćwiczeń na liście zadań nr 1) i wobec tego [[rysunek]]

$$|f(t+h) - f(t)| = \frac{|h|}{|t+h|\cdot|t|} < \frac{\delta}{\frac{|t|}{2}\cdot|t|} = \frac{2\delta}{|t|^2} < \varepsilon.$$

Przykład. Wielkość $\lfloor t \rfloor$, nazywana *podłogą* lub *częścią całkowitą* liczby t, jest zdefiniowana jako największa liczba całkowita mniejsza lub równa t (czyli zaokrąglenie t w dół do najbliższej liczby całkowitej). Funkcja $f(t) = \lfloor t \rfloor$ jest nieciągła w punkcie 0. W istocie dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nie istnieje taka $\delta > 0$, dla której spełniony byłby warunek ciągłości: jeśli $|h| < \delta$ i $-1 < h < 0$, to $\lfloor h \rfloor = -1$ i w takim razie [[rysunek]]

$$|f(0+h) - f(0)| = |\lfloor h \rfloor - \lfloor 0 \rfloor| = |-1-0| = |-1| = 1 > \tfrac{1}{2} = \varepsilon.$$

*„Punkt" oznacza tu to samo, co „argument".

**Wielkości nieskończenie małe można ująć w formalne ramy, zajmuje się tym *analiza niestandardowa*, lecz — zgodnie z nazwą — jest to teoria wykraczająca poza standardowy program studiów z matematyki, a przy tym mająca stosunkowo niewiele zastosowań.

Powyższe trzy przykłady wiele mówią o tym, jak należy przeprowadzać dowody matematyczne. Pojęcie ciągłości rozszerza się w różnych kierunkach: rozważa się funkcje wielu zmiennych lub o wartościach na płaszczyźnie czy w przestrzeni (na przykład we wspomnianym twierdzeniu Jordana).

Jedną z podstawowych własności funkcji ciągłych jest *własność wartości pośredniej*, nazywana zwykle w Polsce *własnością Darboux*. [[rysunek]]

> TWIERDZENIE 1.2. Jeśli funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału $[a, b]$ oraz y jest zawarte pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$, to równanie $f(t) = y$ ma rozwiązanie w przedziale $[a, b]$.

Kolejnym podstawowym twierdzeniem jest *własność osiągania kresów*. [[rysunek]]

> TWIERDZENIE 1.3. Jeśli funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału $[a, b]$, to przyjmuje ona w tym przedziale wartość najmniejszą oraz wartość największą.

Podobnie jak twierdzenie Jordana, powyższe własności wydają się oczywiste; wymagają jednak dowodu. Ten na szczęście jest dość łatwy, choć wymaga dokładnego zrozumienia, czym są liczby rzeczywiste i wobec tego zostanie podany w części dotyczącej ciągłości.

1.4. **Pochodna.** Jeśli funkcja $f(t)$ opisuje położenie w czasie, to średnia prędkość w przedziale czasowym $[t, t + h]$ wyraża się wzorem [[rysunek]]

$$g(h) = \frac{f(t+h) - f(h)}{h}.$$

Gdy na przykład $f(t) = \frac{1}{2}t^2$, to

$$g(h) = \frac{\frac{1}{2}(t+h)^2 - \frac{1}{2}t^2}{h} = t + \tfrac{h}{2}.$$

Środkowe wyrażenie nie jest określone, gdy $h = 0$, ale już wyrażenie po prawej stronie ma wtedy sens. Naturalne jest zatem rozszerzenie definicji g tak, aby $g(0) = t$.

Nie zawsze jest tak prosto: jeśli $f(t) = 2^t$, to wyrażenia

$$g(h) = \frac{2^{t+h} - 2^t}{h}$$

nie sposób uprościć tak, by miało ono sens dla $h = 0$. Mimo to funkcję $g(h)$ można rozszerzyć (zadając odpowiednią wartość $g(0)$) tak, aby uzyskać funkcją ciągłą. Dowód tego faktu zostanie podany w części dotyczącej pochodnych. [[rysunek]]

Wartość $g(0)$, która czyni z danej funkcji $g(h)$ funkcję ciągłą w punkcie 0, nazywana jest *granicą* tej funkcji w 0 i oznaczana $\lim h \to 0 g(h)$. Jeśli dla zadanej wartości t funkcja $(f(t+h) - f(t))/h$ zmiennej h ma granicę w punkcie 0, to opisuje ona *prędkość chwilową* i nazywana jest *pochodną* funkcji f w punkcie t.

> DEFINICJA 1.4. Funkcja $f(t)$ jest *różniczkowalna* w punkcie t, jeśli istnieje granica
>
> $$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Interpretacją geometryczną pochodnej jest tangens kąta nachylenia stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(t, f(t))$ — styczna jest w odpowiednim sensie granicą siecznych. Spotykane oznaczenia pochodnej to pochodzące od Newtona (i stosowane tutaj) $f'(t)$,

wprowadzone przez Leibniza $\frac{df}{dt}$, podobne zapisy $\frac{d}{dt}f(t)$ i $\dot{f}(t)$, a także zapis operatorowy $Df(t)$. Obliczanie pochodnej funkcji zadanej wzorem nazywane jest *różniczkowaniem* i jest zazwyczaj czynnością zaskakująco łatwą.

1.5. **Całka.** Zagadnienie odwrotne: wyznaczanie funkcji, jeśli znana jest jej pochodna, jest znacznie trudniejsze i nazywane jest *całkowaniem*.

> DEFINICJA 1.5. Jeśli funkcja $g(t)$ jest pochodną funkcji $f(t)$, tj. $g(t) = f'(t)$, to funkcja $f(t)$ nazywana jest *funkcją pierwotną* lub *całką nieoznaczoną* funkcji $g(t)$ i oznaczana symbolem $\int g(t)dt$.

O ile każdą funkcję zadaną „prostym wzorem" można łatwo zróżniczkować, o tyle całki niektórych funkcji (na przykład $\sqrt{t^3+1}$) nie wyrażają się „prostym wzorem"*. Warto wspomnieć, że (w odróżnieniu od pochodnej) całka nieoznaczona nie jest wyznaczona jednoznacznie: jeśli $f(t)$ jest całką $g(t)$, to dla dowolnej stałej C funkcja $f(t)+C$ również jest całką $g(t)$.

Jednym z zaskakujących zastosowań całki jest obliczanie pola pod wykresem funkcji: pole *trapezu krzywoliniowego* zawartego pomiędzy przedziałem $[a,b]$ na osi poziomej i położonym nad tym przedziałem odcinkiem wykresu funkcji $g(t)$ dane jest wzorem $f(b)-f(a)$, gdzie $f(t)$ jest całką nieoznaczoną z $g(t)$. [[rysunek]] Wielkość tą nazywa się *całką oznaczoną* funkcji $g(t)$ na przedziale $[a,b]$.

> DEFINICJA 1.6. Jeśli $g(t)$ jest pochodną $f(t)$ na przedziale $[a,b]$, tj. $g(t) = f'(t)$ dla $t \in [a,b]$, to wielkość $f(b)-f(a)$ nazywana jest *całką oznaczoną* funkcji $g(t)$ na przedziale $[a,b]$ i oznaczana symbolem $\int_a^b g(t)dt$.

Aby zrozumieć, dlaczego powyższą wielkość można interpretować jako pole trapezu krzywoliniowego, trzeba odpowiedzieć na pytanie o to, czym właściwie jest pole takiej figury. Naturalną definicją wydaje się graniczna wartość pól figur otrzymanych przez przybliżanie prostokątami:

$$\int_a^b g(t)dt = \lim_{\max\{\Delta t_k\}\to 0} \sum_k g(t_k)\Delta t_k.$$

Nie precyzujemy teraz, jak rozumiemy granicę w powyższym wzorze, powiemy tylko, że definiuje on *całkę Riemanna*, a równość całki Riemanna i całki oznaczonej nazywana jest *zasadniczym twierdzeniem rachunku różniczkowego i całkowego*. Dawniej sumę oznaczano literą S zamiast symbolu $\sum$ (pochodzącego od greckiej litery Σ), zaś symbol całki $\int$ powstał w wyniku stopniowego przekształcania sposobu kreślenia litery S.

Całki nieoznaczone, oznaczone i Riemanna mają mnóstwo innych zastosowań, o których więcej zostanie powiedziane w części dotyczącej całkowania.

1.6. **Liczby rzeczywiste.** W dowodzie własności Darboux funkcji ciągłej potrzebna jest następująca *własność kresów*: jeśli niepusty podzbiór A zbioru liczb rzeczywistych jest ograniczony z góry, to ma *kres górny*, czyli istnieje liczba a o własnościach:

- $x \leqslant a$ dla wszystkich elementów x zbioru A;
- jeśli liczba b ma analogiczną własność, to $a \leqslant b$.

*To zdanie jest ścisłym twierdzeniem matematycznym: nie istnieje wzór opisujący $\int \sqrt{t^3+1}\,dt$, choć skądinąd wiadomo, że całka istnieje.

Faktu tego nie da się udowodnić, wykorzystując tylko prawa działań i nierówności (wtedy bowiem własność tę miałyby też liczby wymierne). Są dwa rozwiązania: można przyjąć to stwierdzenie za *aksjomat*, albo odpowiednio *skonstruować* zbiór liczb rzeczywistych przy pomocy bardziej podstawowych pojęć.

Podejście aksjomatyczne (przedstawione w kolejnym rozdziale) wymaga mniej pracy, ale nie gwarantuje istnienia zbioru liczb rzeczywistych. Konstrukcja jest bardziej pracochłonna, ale też bardziej namacalna — jest treścią ćwiczenia dodatkowego na liście zadań nr 2.

2. Liczby rzeczywiste

2.1. **Formalna definicja.** Ten rozdział jest inny niż wszystkie pozostałe. Wszyscy intuicyjnie rozumieją, czym są liczby rzeczywiste, ale dla pełnej ścisłości potrzeba formalnych definicji. Dla porządku: zbiór A jest ograniczony z góry, jeśli istnieje x o następującej własności: $a \leqslant x$ dla wszystkich $a \in A$. Podobnie A jest ograniczony z dołu, jeśli istnieje x o własności: $x \leqslant a$ dla wszystkich $a \in A$.

DEFINICJA 2.1. *Liczby rzeczywiste* to zbiór $\mathbb{R}$, w którym wyróżniono dwa różne elementy 0 i 1, określono działania „$+$" i „$\cdot$" oraz zadano porządek „$\leqslant$" w taki sposób, że spełnione są następujące postulaty:

(R1) działanie $+$ jest *przemienne* i *łączne*, 0 jest *elementem neutralnym* (tj. $x+0 = x$), a każda liczba ma *liczbę przeciwną* (tj. taką liczbę $-x$, że $x + (-x) = 0$);

(R2) działanie $\cdot$ jest *przemienne* i *łączne*, 1 jest *elementem neutralnym* (tj. $x \cdot 1 = x$ dla $x \neq 0$), a każda rózna od zera liczba ma *liczbę odwrotną* (tj. taką liczbę x^{-1}, że $x \cdot x^{-1} = 1$);

(R3) działanie $\cdot$ jest *rozdzielne* względem działania $+$ (tj. $(x+y)\cdot z = (x\cdot z)+(y\cdot z)$);

(R4) porządek $\leqslant$ to relacja *zwrotna* (tj. $x \leqslant x$), *antysymetryczna* (tj. jeśli $x \leqslant y$ oraz $y \leqslant x$, to $x = y$) i *przechodnia* (tj. jeśli $x \leqslant y$ oraz $y \leqslant z$, to $x \leqslant z$), która dodatkowo spełnia warunek *liniowości* (tj. $x \leqslant y$ lub $y \leqslant x$);

(R5) działania są *zgodne* z porządkiem (tj. jeśli $x \leqslant y$, to $x + z \leqslant y + z$, zaś jeśli $0 \leqslant x$ i $0 \leqslant y$, to $0 \leqslant x \cdot y$);

(R6) jeśli niepusty podzbiór A zbioru liczb rzeczywistych jest ograniczony z góry, to ma *kres górny*, czyli istnieje liczba a o własnościach:
- $x \leqslant a$ dla wszystkich elementów $x \in A$;
- jeśli liczba b ma analogiczną własność, to $a \leqslant b$.

Warunek (R1) oznacza, że zbiór $\mathbb{R}$ z działaniem dodawania „$+$" jest *grupą przemienną*, zaś warunek (R2) — że grupą przemienną jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ z działaniem mnożenia „$\cdot$". Warunki (R1)–(R3) oznaczają, że zbiór $\mathbb{R}$ z działaniami „$+$" i „$\cdot$" jest *ciałem liczbowym*. Warunek (R4) oznacza, że $\mathbb{R}$ z relacją „$\leqslant$" jest zbiorem *liniowo uporządkowanym*. Wszystkie warunki oprócz (R6) oznaczają, że $\mathbb{R}$ z działaniami „$+$" i „$\cdot$" oraz relacją „$\leqslant$" jest *ciałem uporządkowanym*. Warunek (R6) nosi nazwę *warunku zupełności Dedekinda*.

Kres górny zbioru A nazywany jest też *supremum* A i oznaczany $\sup A$. Analogicznie zdefiniować można *kres dolny* A, nazywany *infimum* A i oznaczany $\inf A$. Nie trzeba zakładać istnienia infimum zbiorów ograniczonych z dołu, jest to konsekwencja aksjomatów (R1)–(R6) (jest to ćwiczenie na liście zadań nr 2).

Oczywiście stosowany będzie zapis $x - y$ zamiast $x + (-y)$, xy zamiast $x \cdot y$ oraz x/y lub $\frac{x}{y}$ zamiast $x \cdot y^{-1}$. Ponadto $x < y$ oznacza $x \leqslant y$ i $x \neq y$, $x \geqslant y$ zaś to samo, co $y \leqslant x$; podobnie $x > y$ to inny zapis $y < x$. Dzięki łączności wolno pisać na przykład $x + y + z$; tradycyjnie też $x \cdot y + z$ oznacza $(x \cdot y) + z$. Ponadto $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x$ itd. Wszystko to wydaje się oczywiste, ale jest elementem formalnej definicji stosowanych tu oznaczeń.

Z aksjomatów (R1)–(R6) można wywnioskować wszystkie dobrze znane własności zbioru liczb rzeczywistych, choć nie zawsze jest to łatwe. Kilka ćwiczeń na ten temat znajduje się na liście zadań nr 2, ilustracją jest poniższy przykład. Tego typu rozważania nie są głównym tematem kursu, ale warto choć raz się z nimi zmierzyć.

TWIERDZENIE 2.2. Zachodzi $0 < 1$.

Dowód. Dowód jest zadziwiająco skomplikowany i składa się z kilku części:

- element przeciwny jest wyznaczony jednoznacznie; w istocie, jeśli $a + x = 0$ oraz $b + x = 0$, to $a = a + 0 = a + b + x = b + a + x = b + 0 = b$;
- element neutralny dodawania jest wyznaczony jednoznacznie; w istocie, jeśli dla wszystkich x zachodzi $x + a = x$ i $x + b = x$, to $a = a + b = b$;
- $0 \cdot x = 0$; w istocie, $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, skąd $0 = 0 \cdot x$;
- $(-1) \cdot x = -x$; w istocie, $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0$, zatem $(-1) \cdot x$ jest elementem przeciwnym do x;
- $-(-x) = x$; w istocie, x z definicji jest elementem przeciwnym do $-x$;
- $(-1) \cdot (-1) = 1$; w istocie, $(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$;
- jeśli $x \leqslant 0$, to $-x \geqslant 0$; w istocie, $x \leqslant 0$ oznacza $x + (-x) \leqslant 0 + (-x)$, czyli $0 \leqslant -x$;
- $x \cdot x \geqslant 0$; w istocie, jeśli $x > 0$, to $x \cdot x \geqslant 0$; jeśli zaś $x \leqslant 0$, to $-x \geqslant 0$, więc $x \cdot x = 1 \cdot x \cdot x = (-1) \cdot (-1) \cdot x \cdot x = (-x) \cdot (-x) \geqslant 0$.

Pozostaje zauważyć, że $1 = 1 \cdot 1 \geqslant 0$, zaś z definicji $1 \neq 0$. □

W dalszej części własności liczb rzeczywistych znane ze szkoły średniej będą wykorzystywane bez szczegółowego dowodu (takiego jak powyżej), czasem tylko szkic dowodu będzie podany w formie uwagi. Należy jednak pamiętać, że wszystkie te własności można wyprowadzić wprost z aksjomatów. Ważne też jest następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 2.3. Zbiór liczb rzeczywistych istnieje (tj. można skonstruować zbiór i działania o pożądanych własnościach przy pomocy metod logiki i teorii mnogości).

Dowód (konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych) jest ćwiczeniem dodatkowym na liście zadań nr 2.

2.2. **Liczby naturalne i zasada indukcji.** Formalna definicja zbioru liczb naturalnych jest nieco nienaturalna. Możliwa jest też definicja nie odwołująca się do pojęcia zbioru liczb rzeczywistych (pochodząca od Peana), a także konstrukcja wykorzystująca wyłącznie zbiór pusty i proste operacje na zbiorach (pochodząca od von Neumanna).

DEFINICJA 2.4. Liczby naturalne to podzbiór $\mathbb{N}$ zbioru $\mathbb{R}$ o następujących własnościach:

(a) 1 należy do $\mathbb{N}$;
(b) jeśli $n \in \mathbb{N}$, to $n + 1 \in \mathbb{N}$;
(c) dowolny podzbiór A zbioru $\mathbb{R}$ o powyższych dwóch własnościach zawiera $\mathbb{N}$.

Dowód poprawności definicji. Niech B będzie częścią wspólną wszystkich zbiorów $A \subseteq \mathbb{R}$ o własnościach: $1 \in A$; jeśli $n \in A$, to $n + 1 \in A$. Wówczas $1 \in B$ oraz jeśli $n \in B$, to $n + 1 \in B$. Ponadto B jest podzbiorem każdego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ o tych własnościach. Zatem B jest zbiorem liczb naturalnych. □

Pozornie oczywistym, ale bardzo ważnym twierdzeniem jest poniższa *zasada indukcji.*

TWIERDZENIE 2.5. Niech $\varphi(n)$ oznacza pewne zdanie dotyczące liczby $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $\varphi(0)$ jest prawdziwe, a ponadto dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest implikacja: z $\varphi(n)$ wynika $\varphi(n+1)$, to $\varphi(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. Niech A będzie zbiorem tych liczb naturalnych, dla których $\varphi(n)$ jest prawdziwe. Z założenia $0 \in A$ oraz jeśli $n \in A$, to $n+1 \in A$. Z definicji zbioru liczb naturalnych zachodzi $\mathbb{N} \subseteq A$. Ale $A \subseteq \mathbb{N}$, zatem $A = \mathbb{N}$. □

Przykład. Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $2^n > n$.

W istocie, dla $n = 1$ zachodzi $2^n = 2 > 1 = n$. Jeśli zaś dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $2^n > n$ (*założenie indukcyjne*), to $2^{n+1} = 2^n + 2^n \geqslant 2^n + 1 > n + 1$ (ostatnia nierówność wynika z założenia indukcyjnego, zaś „oczywista" nierówność $2^n \geqslant 1$ formalnie też ma dowód indukcyjny: $2^0 = 1$ oraz jeśli $2^n \geqslant 1$, to $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geqslant 2 \cdot 1 \geqslant 1$). Dowodzona nierówność wynika zatem na mocy zasady indukcji.

Często wykorzystywać będziemy zbiór nieujemnych liczb całkowitych $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Też ma on własność indukcji, jest bowiem najmniejszym zbiorem, który zawiera 0 i wraz z każdym swoim elementem n zawiera element $n+1$. Ogólniej: indukcję można zaczynać od dowolnej liczby naturalnej, a nawet całkowitej.

TWIERDZENIE 2.6. Niech $\varphi(n)$ oznacza pewne zdanie dotyczące liczby $n \in \mathbb{N}$ i niech N będzie ustaloną liczbą naturalną. Jeśli $\varphi(N)$ jest prawdziwe, a ponadto dla każdego naturalnego $n \geqslant N$ prawdziwa jest implikacja: z $\varphi(n)$ wynika $\varphi(n+1)$, to $\varphi(n)$ jest prawdziwe dla każdego naturalnego $n \geqslant N$. W niniejszym twierdzeniu można zastąpić zbiór $\mathbb{N}$ zbiorem $\mathbb{N}_0$.

Dowód. Niech $\psi(k)$ oznacza zdanie $\varphi(N - 1 + k)$. Wówczas ψ spełnia założenia zasady indukcji, a więc $\psi(k)$ zachodzi dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Stąd $\varphi(n)$ zachodzi dla każdego naturalnego $n \geqslant N$. □

W powyższym dowodzie wykorzystano następującą własność liczb naturalnych: jeśli $n > m$, $n, m \in \mathbb{N}$, to $n - m \in \mathbb{N}$. Na marginesie warto zauważyć, że formalny dowód tej własności jest żmudny (i przynależy raczej do kursu *Wstęp do logiki i teorii mnogości*; w skrócie: dowodzi się, że (1) $n \in \mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1$ lub $n - 1 \in \mathbb{N}$; (2) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ z warunków $m \in \mathbb{N}$, $m < n$ wynika $n - m \in \mathbb{N}$). Inne bardzo użyteczne (i dobrze znane) fakty to: $n \geqslant 1$ dla $n \in \mathbb{N}$; jeśli $n, m \in \mathbb{N}$ i $n > m$, to $n \geqslant m + 1$; jeśli $n, m \in \mathbb{N}$, to $n + m \in \mathbb{N}$ i $n \cdot m \in \mathbb{N}$ (wybrane własności są treścią niektórych ćwiczeń na liście zadań nr 2).

Przykład. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ zachodzi $2^n \geqslant n^2$.

W istocie, dla $n = 4$ zachodzi $2^n = 16 = n^2$. Jeśli zaś dla pewnego naturalnego $n \geqslant 4$ zachodzi $2^n \geqslant n^2$ (zał. ind.), to $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geqslant 2n^2 \geqslant (n+1)^2$ (pierwsza nierówność wynika z założenia indukcyjnego, drugiej nierówności można zaś dowieść następująco: $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 \geqslant 4n - 2n - 1 = 2n - 1 \geqslant 0$).

Ważnym twierdzeniem równoważnym zasadzie indukcji jest następująca *zasada minimum.*

TWIERDZENIE 2.7. Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych ma element najmniejszy.

Dowód. Niech A będzie podzbiorem $\mathbb{N}$ bez elementu najmniejszego. Niech B będzie zbiorem tych $b \in \mathbb{N}$, dla których $b \leqslant a$ dla wszystkich $a \in A$. Wówczas $1 \in B$ (bo wszystkie liczby naturalne są większe lub równe 1). Przypuśćmy, że $b \in B$, ale $b+1 \notin B$, a więc $b+1 > a$ dla pewnego $a \in A$. Skoro $b \leqslant a$, to $b = a$ (bo z nierówności $b+1 > a$ wynika $b \geqslant a$), a więc a jest najmniejszym elementem A, wbrew założeniu. Zatem jeśli $b \in B$, to $b+1 \in B$.

Na mocy definicji $\mathbb{N}$ zachodzi $B = \mathbb{N}$. Jeśli więc $a \in A$, to $a+1 \in \mathbb{N} = B$, skąd $a+1 \leqslant a$, sprzeczność. Wobec tego A jest zbiorem pustym. □

Niezwykle ważnym twierdzeniem o liczbach rzeczywistych jest następujący rezultat, nazywany czasem *zasadą Archimedesa* (bowiem w starożytności Eudoksos wprowadził następujący postulat: każdy odcinek jest krótszy od pewnej wielokrotności długości każdego innego odcinka).

> Twierdzenie 2.8. Nie istnieje dodatnia liczba rzeczywista mniejsza od wszystkich liczb $\frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Podobnie nie istnieje liczba rzeczywista większa od wszystkich liczb naturalnych.

Ścisły dowód tego twierdzenia jest treścią dwóch ćwiczeń na liście zadań nr 3.

2.3. **Rozkład na czynniki pierwsze.** Jednym z fundamentalnych pojęć teorii liczb są liczby pierwsze.

> Definicja 2.9. Liczbę $p \in \mathbb{N}$ nazywa się *liczbą pierwszą*, jeśli $p > 1$ oraz każdy rozkład na czynniki $p = n \cdot m$ (gdzie $n, m \in \mathbb{N}$) zawiera czynnik 1, tj. $n = 1$ lub $m = 1$.

> Twierdzenie 2.10. Każda liczba naturalna $n > 1$ jest iloczynem skończenie wielu liczb pierwszych.

Dowód. Gdyby twierdzenie nie było prawdziwe, z zasady minimum istniałaby najmniejsza liczba naturalna $k > 1$, która nie jest iloczynem skończenie wielu liczb pierwszych. W szczególności k nie jest liczbą pierwszą, a więc ma rozkład $k = n \cdot m$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$ oraz $n > 1$ i $m > 1$. Stąd $n < k$ oraz $m < k$, czyli n i m są iloczynami skończenie wielu liczb pierwszych. Zatem i $k = n \cdot m$ ma tę własność, sprzeczność. □

Dowód kolejnego twierdzenia, nazywanego *twierdzeniem o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze* albo *zasadniczym twierdzeniem arytmetyki*, stanowi treść ćwiczenia dodatkowego na liście zadań nr 2. Ten pozornie oczywisty wynik jest nieoczekiwanym wnioskiem z (rozszerzonego) algorytmu Euklidesa znajdowania największego wspólnego dzielnika.

> Twierdzenie 2.11. Rozkład na czynniki pierwsze jest jednoznaczny: jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$, to istnieje *wyznaczony jednoznacznie* skończony ciąg liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_k$ taki, że $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ oraz $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_k$.

2.4. **Inne zbiory liczb.** Poniższe definicje przytoczone są głównie po to, by ustalić oznaczenia.

DEFINICJA 2.12. *Przedziałem skończonym* o końcach a i b (gdzie $a < b$) nazywa się każdy ze zbiorów

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \qquad [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\},$$
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}, \qquad (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}.$$

Przedziałem nieskończonym o końcu a nazywa się każdy ze zbiorów

$$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \qquad (-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\},$$
$$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}, \qquad (-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}.$$

Symbole ∞ i $-\infty$ nie mają tu żadnego matematycznego znaczenia. W szczególności nie są to liczby rzeczywiste!

DEFINICJA 2.13. *Liczby całkowite* to zbiór $\mathbb{Z}$ liczb postaci n lub $-n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_0$. *Liczby wymierne* to zbiór $\mathbb{Q}$ liczb postaci n/m, gdzie $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. *Liczby niewymierne* to liczby rzeczywiste, które nie są wymierne.

Zbiór $\mathbb{N}$ jest zamknięty ze względu na dodawanie, zbiór $\mathbb{Z}$ — dodawanie i odejmowanie. Zbiór $\mathbb{Q}$ jest uporządkowanym ciałem liczbowym: spełnia wszystkie postulaty $\mathbb{R}$ z wyjątkiem ostatniego, o istnieniu kresów. Wszystkie te zdania są twierdzeniami, których dowody pomijamy.

TWIERDZENIE 2.14. (a) Każdy przedział o długości większej niż 1 zawiera liczbę całkowitą.
(b) Każdy przedział zawiera zarówno liczbę wymierną, jak i liczbę niewymierną (a więc liczby te leżą *gęsto* w $\mathbb{R}$).

Dowód. Dla dowodu części (a), przypuśćmy, że (a,b) jest przedziałem długości większej niż 1, czyli $b - a > 1$. Jeśli $a < 0 < b$, to (a,b) zawiera liczbę całkowitą 0. Przypuśćmy, że $0 \leqslant a$ oraz (a,b) nie zawiera liczby całkowitej. Indukcyjnie dowodzimy, że a jest ograniczeniem z góry zbioru $\mathbb{N}_0$.

Oczywiście $0 \leqslant a$. Jeśli $n \leqslant a$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}_0$, to $n+1 \leqslant a+1$, a więc $n+1 < b$. Skoro jednak przedział (a,b) nie zawiera liczb całkowitych, zachodzi $n+1 \leqslant a$. Na mocy zasady indukcji w istocie a jest ograniczeniem górnym zbioru $\mathbb{N}_0$.

Z zasady Archimedesa wynika jednak, że $\mathbb{N}_0$ jest nieograniczony z góry. Wobec tego przedział (a,b) musi zawierać pewną liczbę całkowitą. W przypadku, gdy $b < 0$, przedział $(-b,-a)$ zawiera liczbę całkowitą, a więc również (a,b) zawiera pewną liczbę całkowitą.

Udowodnimy teraz część (b). Niech $b > a$ i niech $m \in \mathbb{N}$ będzie większe niż $\frac{1}{b-a}$. Przedział (ma,mb) ma długość większą od 1, zawiera więc liczbę całkowitą — niech będzie nią n. Zachodzi więc $ma < n < mb$, czyli $\frac{n}{m} \in (a,b)$.

Podobnie przedział $(a-\sqrt{2}, b-\sqrt{2})$ zawiera liczbę wymierną $\frac{k}{l}$. Wobec tego $\frac{k}{l}+\sqrt{2} \in (a,b)$. Zatem (a,b) zawiera liczbę wymierną $\frac{n}{m}$ i liczbę niewymierną $\frac{k}{l}+\sqrt{2}$ (niewymierność ostatniej wynika z ćwiczenia na liście zadań nr 2). □

Wiele obiektów w matematyce określa się w sposób *rekurencyjny*, nazywany czasem sposobem *indukcyjnym*: definicja odpowiadająca kolejnej liczbie naturalnej zależy od definicji dla liczby poprzedniej. Świetnym przykładem jest potęgowanie: z formalnego punktu widzenia liczba a^n dla $a \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ określona jest wzorami $a^1 = a$, $a^{n+1} =$

$a \cdot a^n$. Na mocy zasady indukcji definiuje to potęgę dla dowolnego naturalnego wykładnika: zbiór tych $n \in \mathbb{N}$ dla których a^n jest poprawnie określone zawiera 1 oraz wraz z każdą liczbą n zawiera $n+1$, zatem jest całym zbiorem liczb naturalnych.

Warto przy okazji podkreślić, że definicja potęgowania z rzeczywistym wykładnikiem wykorzystująca wyłącznie postulaty liczb rzeczywistych (w szczególności zaś postulat o istnieniu kresów) jest dość skomplikowana. Podamy ścisłą definicję później, gdy wprowadzimy pojęcie funkcji wykładniczej exp i logarytmicznej ln. Jeśli jednak wykładnik jest całkowity, definicja jest całkiem prosta: dla $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$ określamy $a^0 = 1$, $a^{-n} = (a^{-1})^n$ (definicja ta jest poprawna, bowiem $a^{-1} \neq 0$, oraz zgodna z oznaczeniem a^{-1} dla $n = 1$). Znane ze szkoły własności: $a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^x b^x = (ab)^x$ można dla $x, y \in \mathbb{Z}$ udowodnić metodą indukcji.

2.5. **Kresy.** Przypomnijmy: zbiór A jest *ograniczony z góry*, jeśli istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$ o własności $x \leqslant a$ dla wszystkich $x \in A$. Taką liczbę a nazywa się *ograniczeniem z góry* zbioru A. Element $a \in A$ jest *elementem największym* zbioru A, jeśli jest ograniczeniem z góry zbioru A, a więc $x \leqslant a$ dla każdego $x \in A$. W tej sytuacji a jest jednocześnie *kresem górnym* zbioru A, czyli najmniejszym ograniczeniem z góry zbioru A.

Oczywiście zbiory nieograniczone nie mają elementu największego. Nie wszystkie zbiory ograniczone z góry taki element posiadają (przykładem jest zbiór liczb ujemnych); na mocy warunku zupełności Dedekinda wszystkie niepuste zbiory ograniczone z góry mają jednak kres górny.

Zbiór ograniczeń górnych danego zbioru, o ile nie jest zbiorem pustym, jest zawsze przedziałem jednostronnie nieskończonym: jeśli a jest ograniczeniem z góry zbioru A, to każda liczba większa od a też ma tę własność. Warunek zupełności Dedekinda orzeka, że zbiór ograniczeń górnych jest zawsze przedziałem domkniętym, czyli mającym element najmniejszy.

Analogicznie mówi się o zbiorach *ograniczonych z dołu*, *ograniczeniach z dołu*, *elementach najmniejszych* i *kresach dolnych*. Elementy największe i najmniejsze zbioru A, o ile istnieją, oznaczamy symbolami $\min A$ oraz $\max A$. Kresy zaś oznaczamy przez $\inf A$ (kres dolny, czyli *infimum* zbioru A) oraz $\sup A$ (kres górny, czyli *supremum* zbioru A).

Definicję kresu można zapisać na wiele sposobów. Liczba $a = \sup A$ jest kresem górnym lub supremum zbioru A, jeśli:

(a) $x \leqslant a$ dla wszystkich $x \in A$;
(b) jeśli b ma własność: $x \leqslant b$ dla wszystkich $x \in A$, to $a \leqslant b$.

Drugą własność równoważnie można zapisać w postaci

(b_2) jeśli $b < a$, to $b < x$ dla pewnego $x \in A$,

lub jeszcze inaczej

(b_3) jeśli $\varepsilon > 0$, to $a - \varepsilon < x$ dla pewnego $x \in A$,

Równoważnie oba warunki można zapisać w bardziej geometrycznej postaci [[rysunek]]:

(a_4) $A \subseteq (-\infty, a]$;
(b_4) zbiór $A \cap (a - \varepsilon, a]$ jest niepusty dla dowolnego $\varepsilon > 0$.

W ostatnim warunku wystarczy rozważać dowolnie małe liczby $\varepsilon > 0$, tj. można zastąpić ten warunek jeszcze innym:

(b_5) zbiór $A \cap (a - \varepsilon, a]$ jest niepusty dla dowolnego $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

gdzie E jest dowolną ustaloną liczbą dodatnią. W istocie, jeśli $A \cap (a - \varepsilon, a]$ jest niepusty dla pewnego $\varepsilon > 0$, to jest niepusty dla wszystkich większych wartości ε. Dodajmy na

koniec, że niektóre ostre lub słabe nierówności można zastąpić nierównościami innego typu: zamiast warunku (b) możemy napisać dowolny z poniższych:

(b_6) jeśli b ma własność: $x < b$ dla wszystkich $x \in A$, to $a \leqslant b$;
(b_7) jeśli $b < a$, to $b \leqslant x$ dla pewnego $x \in A$;
(b_8) jeśli $\varepsilon > 0$, to $a - \varepsilon \leqslant x$ dla pewnego $x \in A$;
(b_9) zbiór $A \cap [a-\varepsilon, a]$ jest niepusty dla dowolnego $\varepsilon > 0$;
(b_{10}) zbiór $A \cap [a-\varepsilon, a]$ jest niepusty dla dowolnego $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

gdzie ε_0 jest dowolnie ustaloną liczbą dodatnią. Tego typu kosmetyczne zmiany definicji stosować będziemy niezwykle często przy omawianiu granic i nie będziemy ich szczegółowo komentować, dlatego dobrze teraz samodzielnie starannie przeanalizować równoważność wymienionych wyżej warunków.

Analogicznie wprowadza się pojęcie kresu dolnego: $a = \inf A$ jest kresem dolnym lub infimum zbioru A, jeśli

(a) $x \geqslant a$ dla wszystkich $x \in A$;
(b) jeśli b ma własność: $x \geqslant b$ dla wszystkich $x \in A$, to $a \geqslant b$.

Znów, możliwe są różnorakie warianty.

Przykład. Zbiór $\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ zawiera element najmniejszy 0 (bo $1 - \frac{1}{n} = 0$ dla $n = 1$ oraz $1 - \frac{1}{n} \geqslant 1 - \frac{1}{1} = 0$ dla $n \geqslant 1$), nie zawiera zaś elementu największego. Jego kres górny to 1 (bo $1 - \frac{1}{n} \leqslant 1$ oraz dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$ (równoważnie: $n > \frac{1}{\varepsilon}$; istnienie takiego n wynika z zasady Archimedesa).

Przykład. Niech $A = \{x + \frac{2}{x} : x \in (0, \infty)\}$. Zbiór A jest nieograniczony z góry, bo $x + \frac{2}{x} > x$, zatem żadna liczba $x > 0$ nie jest ograniczeniem A z góry. Ponieważ $x + \frac{2}{x} = 2\sqrt{2} + (\sqrt{x} - \sqrt{2/x})^2 \geqslant 2\sqrt{2}$, zbiór A jest ograniczony z dołu przez $2\sqrt{2}$. Równość w ostatniej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\sqrt{x} = \sqrt{2/x}$, czyli $x^2 = 2$, czyli $x = \sqrt{2}$. Wobec tego A zawiera element najmniejszy $2\sqrt{2}$.

Przykład. Niech $A = \{x + \frac{2}{x} : x \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)\}$. Jak poprzednio, A jest nieograniczony z góry i ograniczony z dołu przez $2\sqrt{2}$. Liczba ta nie należy do A, bowiem $x = \sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną (jest to ćwiczenie na liście zadań nr 2). Zachodzi jednak $\inf A = 2\sqrt{2}$: dla $\varepsilon > 0$ rozwiązaniem nierówności $x + \frac{2}{x} < 2\sqrt{2} + \varepsilon$ jest pewien przedział zawarty w $(0, \infty)$ (szczegóły są łatwym ćwiczeniem), który zawiera pewną liczbę wymierną. Wobec tego $2\sqrt{2} + \varepsilon$ nie jest ograniczeniem z dołu zbioru A. [[rysunek]]

Przykład. Zbiór $\mathbb{R}$ jest nieograniczony z góry i z dołu, nie ma więc elementu najmniejszego ani największego, nie ma też kresów. Zbiór pusty $\varnothing$ też nie ma elementu najmniejszego ani największego oraz kresów, natomiast jest ograniczony z dołu i z góry przez dowolną liczbę rzeczywistą (bowiem zdanie rozpoczynające się od słów „dla każdego elementu zbioru pustego" jest zawsze prawdziwe).

Przykład. Kresem dolnym zbioru $A = \{n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor : n \in \mathbb{N}_+\}$ jest 0, a kresem górnym jest 1. Dowód jest dość skomplikowany.

Oczywiście 0 jest ograniczeniem z dołu zbioru A. Niech x oznacza kres dolny A i przypuśćmy, że $x > 0$. Niech $k = \lceil \frac{1}{x} \rceil$. Wówczas $\frac{1}{x} \leqslant k < \frac{1}{x} + 1$, czyli $1 \leqslant kx < 1 + x$. W szczególności $\frac{1+x}{k} > x$. Niech $a \in A$ spełnia warunek $x \leqslant a < \frac{1+x}{k}$. Wtedy $1 \leqslant ka < 1 + x$.

Liczba a jest postaci $n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$, zatem $ka = kn\sqrt{2} - k\lfloor n\sqrt{2} \rfloor$. Niech $y = kn\sqrt{2} - k\lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ oraz $z = kn\sqrt{2} - \lfloor kn\sqrt{2} \rfloor$. Wówczas $y \in [1, 1 + x)$ oraz $z \in [0, 1)$, zatem

$0 < y - z < 1 + x$. Ponieważ $y - z = k\lfloor n\sqrt{2}\rfloor - \lfloor kn\sqrt{2}\rfloor$ jest liczbą całkowitą, zachodzi $y - z = 1$ i w związku z tym $z \in [0, x)$. Ale $z \in A$, więc $z \geqslant x$ — sprzeczność! Założenie, że $x > 0$, musi być zastem fałszywe.

Analogicznie (choć nieco trudniej) dowodzi się równości $\sup A = 1$.

3. Ciągi liczbowe (część I)

3.1. **Definicje.** Ciąg liczbowy to po prostu nieskończona lista liczb. Ciąg taki można zadać wzorem (np. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$); można określić go rekurencyjnie, (np. $b_1 = 1$, $b_{n+1} = b_n/2+1/b_n$ lub $c_1 = c_2 = 1$, $c_{n+2} = c_{n+1}+c_n$); można też zdefiniować wyrazy ciągu opisowo (np. d_n to liczba n-elementowych podzbiorów zbioru $2n$-elementowego). Formalnie ciąg liczbowy definiujemy następująco.

Definicja 3.1. *Ciąg* (formalnie: *nieskończony ciąg liczbowy*) to funkcja a z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{R}$. Wartości funkcji a nazywane są *wyrazami ciągu* i oznaczane $a_n = a(n)$, zaś argumenty n — *indeksami*. Zamiast a (oznaczenie funkcji, czyli całego ciągu) dla przejrzystości pisze się $(a_n : n \in \mathbb{N})$ lub w skrócie (a_n)*.

Definicja 3.2. Ciąg (a_n) jest

- *ograniczony z góry*, jeśli istnieje x o własności: $a_n \leqslant x$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$;
- *ograniczony z dołu*, jeśli istnieje x o własności: $a_n \geqslant x$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$;
- *ograniczony*, jeśli jeśli jest ograniczony z dołu i z góry;
- *rosnący* (lub *niemalejący*), jeśli $a_n \leqslant a_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$;
- *malejący* (lub *nierosnący*), jeśli $a_n \geqslant a_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$;
- *ściśle rosnący*, jeśli $a_n < a_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$;
- *ściśle malejący*, jeśli $a_n > a_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$;
- *monotoniczny*, jeśli jest rosnący lub malejący, zaś *ściśle monotoniczny*, jeśli jest ściśle rosnący lub ściśle malejący.

Definicja 3.3. Ciąg (a_n) ma daną własność *od pewnego miejsca* lub *dla dostatecznie dużych* n, jeśli własność ta jest spełniona przy dodatkowym założeniu, że wszystkie indeksy są równe co najmniej danej liczbie $k \in \mathbb{N}$. Na przykład ciąg jest *rosnący od pewnego miejsca*, jeśli istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \leqslant a_{n+1}$ dla wszystkich naturalnych $n \geqslant k$.

Przykład. Ciąg o wyrazach $\frac{1}{n}$ jest ograniczony (przez 0 i 1: $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$) i ściśle malejący ($\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$).

Przykład. Ciąg o wyrazach $a_n = (n^2 + 1)/(2n - 3)$ jest ograniczony z dołu przez -2: $a_1 = -2$, zaś $a_n > 0 > -2$ dla $n \geqslant 2$. Ciąg ten nie jest ograniczony z góry: dla $n \geqslant 2$ zachodzi $a_n \geqslant n^2/(2n) = \frac{n}{2}$, więc gdyby (a_n) był ograniczony z góry, to ograniczony z góry byłby zbiór $\{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\}$, który zawiera zbiór liczb naturalnych. Ciąg (a_n) nie jest ani rosnący, ani malejący: $a_1 < a_2 > a_3$, ale jest ściśle rosnący od pewnego miejsca. Aby to wykazać, zapiszmy wpierw

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{2n - 3} = \frac{1}{4}\left(2n + 3 + \frac{13}{2n - 3}\right).$$

*Jest to sposób zapisywania funkcji bez nadawania jej nazwy, np. $(\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N})$ lub $(x^2 : x \in \mathbb{R})$. Inne często stosowane oznaczenie to $\mathbb{N} \ni n \mapsto \frac{1}{n}$, $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2$.

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{4}\left(2 + \frac{13}{2(n+1)-3} - \frac{13}{2n-3}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2 - \frac{26}{(2n-1)(2n-3)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{13}{(2n-1)(2n-3)}\right). \end{aligned}$$

Jeśli $n \geqslant 3$, to $(2n-1)(2n-3) \geqslant 5 \cdot 3 = 15 > 13$, a więc $a_{n+1} - a_n > 0$. Innymi słowy, (a_n) jest ściśle rosnący od trzeciej pozycji.

Przykład. Ciąg o wyrazach $(-1)^n$ jest ograniczony (przez -1 i 1), lecz nie jest monotoniczny (nawet od pewnego miejsca).

Zauważmy, że każdy ciąg rosnący jest ograniczony z dołu, zaś każdy ciąg malejący — ograniczony z góry, a odpowiednim ograniczeniem jest wówczas pierwszy wyraz ciągu. Aby to wykazać, wystarczy zauważyć, że jeśli (a_n) jest ciągiem rosnącym, to $a_n \geqslant a_1$. Formalny dowód tego faktu jest indukcyjny: oczywiście $a_1 \geqslant a_1$, zaś z warunku $a_n \geqslant a_1$ wynika $a_{n+1} \geqslant a_1$ (bowiem $a_{n+1} \geqslant a_n$). Analogicznie gdy ciąg (a_n) jest malejący, to $a_n \leqslant a_1$.

Wiele podobnych własności jest treścią ćwiczeń na liście zadań nr 4.

Choć w definicji ciągi są numerowane liczbami naturalnymi, często numerowanie będziemy rozpoczynali od zera lub od innej liczby naturalnej. Na przykład ciągiem będziemy nazywali funkcję daną wzorem $a_n = \sqrt{2^n - n^3}$, choć jest ona określona jedynie dla $n \geqslant 10$ (oraz $n = 1$).

3.2. **Zbieżność.** Motywacja: ciąg jest zbieżny, jeśli kolejne wyrazy są coraz lepszymi, dowolnie dokładnymi przybliżeniami pewnej liczby, nazywanej granicą.

> Definicja 3.4. Ciąg (a_n) jest *zbieżny* do x (inaczej: ma *granicę* x lub *dąży* do x), jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że dla $n > N$ zachodzi $|a_n - x| < \varepsilon$. Fakt ten zapisuje się w postaci
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = x.$$
>
> Ciąg, który nie ma granicy, nazywany jest *rozbieżnym*.

Liczba N może zależeć od ε (i oczywiście od samego ciągu (a_n)), ale nie może zależeć od n. Można to interpretować w postaci gry: przeciwnik zadaje nam $\varepsilon > 0$, a my mamy podać odpowiedni indeks N.

Powyższą definicję można modyfikować (i uzyskać równoważną definicję) na kilka sposobów:

- zamiast dowolnego $\varepsilon > 0$ można rozważać na przykład tylko $\varepsilon = \frac{1}{k}$ dla $k \in \mathbb{N}$, albo $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ dla $k \in \mathbb{N}$, albo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ dla dowolnie ustalonego $\varepsilon_0 > 0$;
- warunek $n > N$ można zastąpić warunkiem $n \geqslant N$;
- warunek $|a_n - x| < \varepsilon$ można zastąpić warunkiem $|a_n - x| \leqslant \varepsilon$;
- można wymagać, by N było liczbą naturalną.

Dowód jest ćwiczeniem wstępnym na liście zadań nr 5. Warunek $|a_n - x| < \varepsilon$ oznacza tyle, co $x - \varepsilon < a_n < x + \varepsilon$, czyli $a_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Definicję zbieżności można wysłowić

następująco: ciąg (a_n) jest zbieżny do x wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ warunek $|a_n - x| < \varepsilon$ jest spełniony od pewnego miejsca.

Oczywiście jeśli dwa ciągi są równe od pewnego miejsca, to zbieżność jednego z nich oznacza zbieżność drugiego — do tej samej granicy. Podobnie pominięcie lub dopisanie skończenie wielu wyrazów ciągu nie wpływa na zbieżność i granicę, a pominięcie dowolnie wielu wyrazów ciągu zbieżnego prowadzi do ciągu zbieżnego do tej samej granicy. Dowody kilku tego typu faktów są ćwiczeniami wstępnymi na liście zadań nr 5.

Przykład. Ciągi o wyrazach $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ oraz $(-1)^n/n$ są zbieżne do zera (spełniają definicję odpowiednio z $N = \frac{1}{\varepsilon}$, $N = \frac{1}{\varepsilon^2}$ oraz $N = \frac{1}{\varepsilon}$).

Przykład. Ciąg stały jest zbieżny do swej (stałej) wartości (spełniona definicja z $N = 0$).

Przykład. Ciąg o wyrazach $(-1)^n$ nie jest zbieżny, bowiem dla dowolnego x definicja zbieżności nie jest spełniona: dla $\varepsilon = 1$ nie istnieje N takie, że $|a_n - x| < \varepsilon$ dla $n > N$, gdyż oznaczałoby to $|1 - x| < \varepsilon$ (istnieje parzysty $n > N$) oraz $|-1 - x| < \varepsilon$ (istnieje nieparzysty $n > N$), skąd $2 = |(1-x)+(1+x)| < |1-x|+|1-x| < 2\varepsilon = 2$, sprzeczność.

Przykład. Ciąg o wyrazach $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ jest zbieżny do zera:

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}},$$

zatem $|a_n - 0| < \varepsilon$ jeśli $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Przykład. Ciąg o wyrazach $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$ jest zbieżny do $\frac{1}{2}$:

$$a_n = n(\sqrt{n^2+1} - n) = \frac{n((n^2+1)-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1},$$

zatem $a_n < \frac{1}{2}$ oraz $a_n > 1/((1+\frac{1}{n})+1) = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$; wystarczy więc wziąć $N = \frac{1}{\varepsilon}$. (Łatwiejszy dowód tego faktu wynika z twierdzenia o pierwiastkowaniu granic, które jest treścią ćwiczenia na liście zadań nr 5).

Udowodnimy kilka prostych własności granicy ciągu. W wielu twierdzeniach wymagamy, by pewne warunki spełnione były od pewnego miejsca. Ponieważ jednak granica nie zależy od początkowych wyrazów ciągu, w dowodach będziemy zakładali, że rozważane warunki spełnione są dla wszystkich n.

TWIERDZENIE 3.5. Granica ciągu wyznaczona jest jednoznacznie.

Dowód. Jeśli $x < y$ i obie te liczby są granicami ciągu (a_n), to dla $\varepsilon = \frac{1}{2}(y-x)$ zachodzi $a_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ dla $n > N_1$ oraz $a_n \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ dla $n > N_2$. Dla n większego od obu liczb N_1 i N_2 zachodzi $a_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (y-\varepsilon, y+\varepsilon) = \varnothing$, sprzeczność. □

Powyższy dowód jest bardzo typowy: jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do granic x oraz y, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że dla $n > N$ spełnione są jednocześnie warunki $|a_n - x| < \varepsilon$ oraz $|b_n - y| < \varepsilon$: przy oznaczeniach z dowodu wystarczy bowiem określić $N = \max\{N_1, N_2\}$.

TWIERDZENIE 3.6. Jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne oraz $a_n \leqslant b_n$ (od pewnego miejsca), to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Dowód. Niech $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Gdyby $x > y$, to dla $\varepsilon = \frac{1}{2}(x-y)$ istniałoby N takie, że dla $n > N$ zachodziłoby $a_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ i $b_n \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$, wbrew $a_n \leqslant b_n$. □

WNIOSEK 3.7. Jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny oraz $a_n \leqslant b$ (od pewnego miejsca), to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant b$; jeśli zaś $a_n \geqslant b$ (od pewnego miejsca), to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant b$. □

TWIERDZENIE 3.8. Ciąg zbieżny jest ograniczony.

Dowód. Niech $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Istnieje N takie, że gdy $n \geqslant N$, to $a_n \in (x-1, x+1)$ $(\varepsilon = 1)$. Ciąg (a_n) jest więc ograniczony z góry przez największą z liczb a_1, a_2, …, a_{N-1}, $x+1$, a z dołu przez najmniejszą z liczb a_1, a_2, …, a_{N-1}, $x-1$. □

Przykład. Ciąg o wyrazach $\sqrt{n}$ nie jest zbieżny (bo jest nieograniczony: jeśli $n > a^2$, to $\sqrt{n} > a$).

Poniższe twierdzenie to tzw. *twierdzenie o trzech ciągach.*

TWIERDZENIE 3.9. Jeśli ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy oraz $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ (od pewnego miejsca), to i ciąg (b_n) jest zbieżny, do tej samej granicy.

Dowód. Niech $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Dla dostatecznie dużych n zachodzi $a_n, c_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, a więc i $b_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. □

Przykład. Ciąg o wyrazach $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ jest zbieżny do zera, bo $0 < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{n}$.

Przykład. Ciąg o wyrazach $(-1)^n/n$ jest zbieżny do zera, bo $-\frac{1}{n} \leqslant (-1)^n/n \leqslant \frac{1}{n}$.

Poniższe fundamentalne twierdzenie nosi nazwę *twierdzenia o arytmetyce granic* lub *twierdzenia o ciągłości operacji arytmetycznych.*

TWIERDZENIE 3.10. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = y$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = x+y$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = x-y$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = xy$, a jeśli $y \neq 0$, to również $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{x}{y}$.

Dowód. Jeśli $|a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ i $|b_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$, to $|(a_n+b_n)-(x+y)| < \varepsilon$ i $|(a_n-b_n)-(x-y)| < \varepsilon$. Stąd wynikają pierwsze dwie własności.

Niech $\varepsilon > 0$ i niech δ będzie najmniejszą z liczb 1, $\frac{\varepsilon}{2(1+|x|)}$ oraz $\frac{\varepsilon}{2(1+|y|)}$. Jeśli $|a_n - x| < \delta$ oraz $|b_n - y| < \delta$, to

$$\begin{aligned} |a_n b_n - xy| &= |a_n(b_n - y) + (a_n - x)y| \\ &\leqslant |a_n(b_n - y)| + |(a_n - x)y| \\ &= |a_n||b_n - y| + |a_n - x||y| \\ &\leqslant |a_n|\delta + \delta|y|. \end{aligned}$$

Ponadto $|a_n| = |(a_n - x) + x| \leqslant |a_n - x| + |x| < \delta + |x| \leqslant 1 + |x|$, a więc

$$|a_n b_n - xy| < (1 + |x|)\delta + \delta|y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

To dowodzi trzeciej własności. Analogicznie jeśli δ jest najmniejszą z liczb 1, $\frac{|y|}{2}$, $\frac{\varepsilon|y|}{2}$ i $\frac{\varepsilon|y|^2}{4(1+|x|)}$, zaś $|a_n - x| < \delta$ i $|b_n - y| < \delta$, to

$$|b_n| = |y - (y - b_n)| \geqslant |y| - |y - b_n| \geqslant |y| - \delta \geqslant \tfrac{|y|}{2},$$

skąd

$$|\tfrac{1}{b_n} - \tfrac{1}{y}| = \tfrac{|y-b_n|}{|y||b_n|} \leqslant \tfrac{\delta}{|y||b_n|} \leqslant \tfrac{2\delta}{|y|^2}.$$

Dalej jak w dowodzie trzeciej własności:

$$\begin{aligned} |\tfrac{a_n}{b_n} - \tfrac{x}{y}| &\leqslant |a_n||\tfrac{1}{b_n} - \tfrac{1}{y}| + |a_n - x||\tfrac{1}{y}| \\ &\leqslant (1 + |x|)\tfrac{2\delta}{|y|^2} + \delta\tfrac{1}{|y|} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$ □

Uwaga: dopuszcza się sytuację, w której $b_n = 0$ dla pewnych n. Wtedy ciąg $(\frac{a_n}{b_n})$ jest określony tylko od pewnego miejsca, a w powyższym dowodzie należy przyjąć, że n należy do dziedziny ciągu $(\frac{a_n}{b_n})$ (czyli $b_n \neq 0$). Ogólniej: mówi się o granicach ciągów określonych tylko od pewnego miejsca, np. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n-7} = 0$, choć siódmy wyraz ciągu jest nieokreślony.

Przykład. Zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+1/n^2}{(1+1/n)^2} = \frac{1+0}{(1+0)^2} = 1.$

Jeśli (a_n) i (b_n) są ciągami zbieżnymi odpowiednio do x i y oraz $x > 0$, to ciąg o wyrazach $(a_n)^{b_n}$ dąży do x^y. Udowodnimy to twierdzenie po wprowadzeniu funkcji wykładniczej i logarytmicznej. Na razie nie będziemy go wykorzystywać, za to rozważymy dwa przypadki szczególne. Pierwszy to twierdzenie o pierwiastkowaniu granic, które jest treścią trzech ćwiczeń na liście zadań nr 5. Drugi wynik zawarty jest w kolejnym przykładzie, który wykorzystuje *nierówność Bernoulliego*.

TWIERDZENIE 3.11. Jeśli $x > -1$ oraz $n \in \mathbb{N}_0$, to $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.

Dowód. Teza jest oczywiście prawdziwa dla $n = 0$. Przypuśćmy, że $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}_0$ i $x > -1$. Wówczas

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geqslant (1 + x)(1 + nx) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n + 1)x.$$

Teza wynika więc z zasady indukcji. □

Zauważmy, że z dowodu łatwo wynika, że nierówność Bernoulliego jest ostra, jeśli $n \geqslant 2$ i $x \neq 0$.

Przykład. Ciąg o wyrazach $\sqrt[n]{2}$ jest zbieżny do 1, bo $1 < \sqrt[n]{2} \leqslant 1+\frac{1}{n}$ na mocy nierówności Bernoulliego, a ciągi o wyrazach 1 oraz $1 + \frac{1}{n}$ dążą do 1.

Ogólniej, jeśli $a > 1$, to $1 \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant 1 + \frac{a-1}{n}$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Przykład. Ciąg o wyrazach $\sqrt[n]{2^n - 7}$ jest zbieżny do 2, bo $\frac{1}{2}2^n < 2^n - 7 < 2^n$ dla $n \geqslant 4$, zatem $2/\sqrt[n]{2} \leqslant \sqrt[n]{2^n - 7} \leqslant 2$ dla $n \geqslant 4$, a ciągi o wyrazach $2/\sqrt[n]{2}$ oraz 2 dążą do 2.

Przykład. Po raz drugi, w prostszy sposób obliczamy granicę

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \Big(n(\sqrt{n^2+1} - n)\Big) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n((n^2+1) - n^2)}{\sqrt{n^2+1} + n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n^2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy tu twierdzenie o pierwiastkowaniu granic.

3.3. **Zbieżność a liczby rzeczywiste.** Postulat o istnieniu kresów, odróżniający liczby rzeczywiste od liczb wymiernych (i innych ciał uporządkowanych), ma fundamentalne znaczenie dla pojęcia zbieżności.

TWIERDZENIE 3.12. Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Dowód. Jeśli (a_n) jest rosnący, to kres górny x zbioru $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest jego granicą: $a_n \leqslant x$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, zaś dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_N > x - \varepsilon$ i wobec tego $a_n > x - \varepsilon$ dla $n \geqslant N$. □

Przykład. Ciąg $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ jest rosnący (jasne) i ograniczony — jest to ćwiczenie na liście zadań nr 3, a inny dowód to

$$\begin{aligned} a_n &\leqslant 1 + \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \tfrac{1}{(n-1)\cdot n} \\ &= 1 + (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + \ldots + (\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}) \\ &= 1 + 1 - \tfrac{1}{n} \leqslant 2. \end{aligned}$$

Ciąg (a_n) jest zatem zbieżny. (Granicą jest $\frac{\pi^2}{6}$, dowód zostanie przedstawiony na drugim semestrze).

Przykład. Ciąg (a_n) dany wzorami $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ (gdzie $n \in \mathbb{N}$) jest rosnący (indukcja: $a_1 = \sqrt{2} \leqslant \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_2$ i ponadto jeśli $a_n \leqslant a_{n+1}$, to $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leqslant \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}$; uogólnienie jest ćwiczeniem na liście zadań nr 5) i ograniczony (indukcja: $a_1 \leqslant 2$ i ponadto jeśli $a_n \leqslant 2$, to $a_{n+1} \leqslant \sqrt{2 + 2} = 2$). Wobec tego ciąg (a_n) jest zbieżny. Skoro $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$, granica x ciągu (a_n) spełnia równanie $x^2 = 2 + x$, skąd łatwo $x = 2$ lub $x = -1$. Skoro $a_n > 0$, musi zachodzić $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. Nieformalnie:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}} = 2.$$

Poniższa definicja jest jedną z fundamentalnych idei w analizie i topologii.

DEFINICJA 3.13. Ciąg (a_n) jest *ciągiem podstawowym* (inaczej: *Cauchy'ego* lub *fundamentalnym*), jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że dla $n, m > N$ zachodzi $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Każdy ciąg zbieżny jest podstawowy: jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$, to dla dostatecznie dużych n, m zachodzi $|a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ oraz $|a_m - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, zatem $|a_n - a_m| \leqslant |a_n - x| + |x - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Okazuje się, że prawdziwe jest również przeciwne wynikanie.

TWIERDZENIE 3.14. Ciągi podstawowe są zbieżne.

Dowód. Niech (a_n) będzie ciągiem podstawowym i niech B będzie zbiorem tych liczb $b \in \mathbb{R}$, dla których nierówność $a_n \leqslant b$ spełniona jest od pewnego miejsca.

Ciąg (a_n) jest ograniczony — dowód jest niemal taki sam, jak dla ciągów zbieżnych. Wobec tego B jest zbiorem niepustym (zawiera wszystkie ograniczenia z góry) i różnym od $\mathbb{R}$ (nie zawiera żadnych ograniczeń z dołu).

Określmy $x = \inf B$ i ustalmy $\varepsilon > 0$. Z definicji x wiemy, że B zawiera element b mniejszy od $x + \varepsilon$, a więc istnieje N_1 takie, że nierówność $a_n \leqslant b < x + \varepsilon$ zachodzi dla $n > N_1$.

Niech N_2 będzie takie, że $|a_n - a_m| < \frac{1}{2}\varepsilon$ jeśli $n, m > N_2$. Skoro $x - \frac{1}{2}\varepsilon \notin B$, istnieje nieskończenie wiele indeksów m takich, że $a_m > x - \frac{1}{2}\varepsilon$; w szczególności istnieje taki indeks m, który jest większy od N_2. Dla wszystkich $n > N_2$ zachodzi więc

$$a_n > a_m - \tfrac{1}{2}\varepsilon > (x - \tfrac{1}{2}\varepsilon) - \tfrac{1}{2}\varepsilon = x - \varepsilon.$$

Ostatecznie otrzymujemy $x - \varepsilon < a_n < x + \varepsilon$ dla wszystkich $n > \max\{N_1, N_2\}$. Skoro $\varepsilon > 0$ jest dowolny, oznacza to, że (a_n) jest zbieżny do x. □

W powyższym dowodzie wykorzystaliśmy definicję kresu do udowodnienia zbieżności. Pojęcie granicy ciągu jest jednak bardziej intuicyjne od pojęcia kresu — wygodnie jest zwłaszcza wyznaczać kresy zbiorów przy pomocy ciągów.

TWIERDZENIE 3.15. Niech A będzie niepustym i ograniczonym z góry podzbiorem $\mathbb{R}$. Liczba a jest kresem górnym A wtedy i tylko wtedy, gdy a jest ograniczeniem górnym zbioru A oraz granicą pewnego ciągu elementów zbioru A. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla kresów dolnych.

Dowód. Przypuśćmy, że a jest ograniczeniem z góry zbioru A oraz $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ dla pewnego ciągu (a_n) o wyrazach zawartych w A. Jeśli $b < a$, to od pewnego miejsca zachodzi $a_n > b$ (z definicji zbieżności dla $\varepsilon = a - b$), a więc b nie jest ograniczeniem z góry zbioru A. Wobec tego $a = \sup A$.

Z drugiej strony jeśli $a = \sup A$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje element $a_n \in A \cap (a - \frac{1}{n}, a]$. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. □

Do kolejnego przykładu potrzebny będzie następujący prosty rezultat.

TWIERDZENIE 3.16. Każda liczba rzeczywista jest granicą pewnego ciągu liczb wymiernych.

Dowód. Jeśli $x \in \mathbb{R}$, to przedział $(x, x + \frac{1}{n})$ zawiera pewną liczbę wymierną a_n. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że ciąg (a_n) jest zbieżny do x. □

Przykład. Wykażemy ponownie, że kresem dolnym zbioru $\{x + \frac{2}{x} : x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$ jest $2\sqrt{2}$. Liczba ta jest ograniczeniem dolnym rozważanego zbioru, bowiem $(x + \frac{2}{x}) - 2\sqrt{2} = \frac{1}{x}(x - \sqrt{2})^2 \geqslant 0$. Ponadto istnieje ciąg dodatnich liczb wymiernych (a_n) zbieżny do $\sqrt{2}$, a więc istnieje ciąg $(a_n + \frac{2}{a_n})$ elementów rozważanego zbioru zbieżny do $\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Wygodnie czasem wprowadzić następującą definicję.

DEFINICJA 3.17. *Domknięciem* zbioru A nazywamy zbiór wszystkich możliwych granic ciągów, których wyrazy są elementami A. Domknięcie zbioru A oznaczane jest symbolem $\overline{A}$ lub $\operatorname{Cl} A$.

Jeśli A jest ograniczony z góry, to każdy element zbioru A nie przekracza $\sup A$. Wobec tego wszystkie granice ciągów o wyrazach ze zbioru A są ograniczone z góry przez $\sup A$. Innymi słowy, $\sup A$ jest ograniczeniem z góry zbioru $\overline{A}$. Z drugiej strony na mocy poprzedniego twierdzenia $\sup A$ jest elementem $\overline{A}$. Oznacza to, że kres górny zbioru jest największym elementem jego domknięcia.

Przy okazji wprowadźmy pokrewne pojęcie pochodnej zbioru.

DEFINICJA 3.18. Ciąg nazywamy *różnowartościowym*, jeśli jego wyrazy są parami różne. *Pochodną* zbioru A nazywamy zbiór wszystkich możliwych granic różnowartościowych ciągów, których wyrazy są elementami A. Pochodna zbioru A oznaczana jest symbolem A'. Elementy zbioru A' nazywamy *punktami skupienia* zbioru A. Elementy zbioru $A \setminus A'$ nazywamy *punktami izolowanymi* zbioru A.

Oczywiście $A' \subseteq \overline{A}$. Można udowodnić, że każdy element $\overline{A}$ jest albo punktem skupienia A, albo punktem izolowanym A. Dowodzi się ponadto, że $x \in A$ jest punktem izolowanym zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $\varepsilon > 0$ zachodzi $A \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{x\}$.

3.4. **Szeregi.** Często znane są nie kolejne wyrazy ciągu, a jego przyrosty.

DEFINICJA 3.19. *Szereg* $\sum_n a_n$ o wyrazach a_n to ciąg *sum częściowych* (s_n) o wyrazach

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Szereg jest *zbieżny*, jeśli ciąg (s_n) jest zbieżny. Granica ciągu (s_n) nazywana jest *sumą szeregu* i oznaczana $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Formalnie sumy skończone zdefiniowane są indukcyjnie

$$\sum_{j=1}^{1} a_j = a_1, \qquad \sum_{j=1}^{n+1} a_j = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) + a_{n+1}.$$

Proste własności sum skończonych będą wykorzystywane bez (zwykle indukcyjnego) formalnego dowodu. Czasem wyrazy szeregów zaczynamy numerować od zera; wówczas dla $n \in \mathbb{N}_0$ sumy częściowe określone są wzorem

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

DEFINICJA 3.20. *Szereg* $\sum_n a_n$ jest *bezwzględnie zbieżny*, jeśli szereg $\sum_n |a_n|$ jest zbieżny. Szereg, który jest zbieżny, lecz nie bezwzględnie zbieżny, nazywany jest *warunkowo zbieżnym*.

TWIERDZENIE 3.21. Szeregi bezwzględnie zbieżne są zbieżne.

Dowód. Niech $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ i $t_n = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$. Jeśli $n > m$, to

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_m| \leqslant |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_m| = t_n - t_m,$$

skąd $|s_n - s_m| \leqslant |t_n - t_m|$ dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$. Jeśli ciąg (t_n) jest zbieżny, to jest też ciągiem podstawowym. Na mocy udowodnionej nierówności ciąg (s_n) jest więc podstawowy, zatem jest zbieżny. □

WNIOSEK 3.22. Jeśli $\sum_n |a_{n+1} - a_n|$ jest zbieżny, to (a_n) jest zbieżny.

Dowód. Na mocy twierdzenia zbieżny jest szereg $\sum_n (a_{n+1} - a_n)$, a jego sumy częściowe to $s_n = a_{n+1} - a_1$. Oznacza to, że ciąg o wyrazach $a_n = s_{n-1} + a_1$ też jest zbieżny. □

Przykład. W jednym z przykładów wykazano, że szereg $\sum_n \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny. Szereg $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2}$ jest więc bezwzględnie (a więc i zwyczajnie) zbieżny.

Przykład. Szereg geometryczny $\sum_n q^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$. Zachodzi wówczas $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$ (jest to ćwiczenie na liście zadań nr 5).

Z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wynika, że szereg $\sum_n |a_n|$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jego sum częściowych jest ograniczony (z góry). Fakt ten wykorzystano w kolejnych dwóch przykładach. Wynika z niego też *kryterium porównawcze*, sformułowane po jeszcze jednym przykładzie.

Przykład. Szereg $\sum(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ jest rozbieżny, bowiem ciąg sum częściowych ma wyrazy $s_n = \sqrt{n+1} \underline{n} 1$ i jest nieograniczony. Z drugiej strony

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} \right) = \sqrt{0}\,\frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = 0.\end{aligned}$$

Przykład. Szereg harmoniczny $\sum_n \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, bowiem ciąg sum częściowych jest nieograniczony. W istocie,

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{2^k} \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}) + \ldots + (\tfrac{1}{2^{k-1}+1} + \tfrac{1}{2^{k-1}+2} + \ldots + \tfrac{1}{2^k}) \\ &\geqslant 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}) + \ldots + (\tfrac{1}{2^k} + \tfrac{1}{2^k} + \ldots + \tfrac{1}{2^k}) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{k}{2}. \end{aligned}$$

Przykład. Szereg anharmoniczny $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ jest warunkowo zbieżny: nie jest on bezwzględnie zbieżny, lecz jego sumy częściowe spełniają nierówności:

$$s_{2n} - s_{2n-1} = \tfrac{-1}{2n} < 0, \quad s_{2n+1} - s_{2n-1} = \tfrac{-1}{2n} + \tfrac{1}{2n+1} < 0, \quad s_{2n+2} - s_{2n} = \tfrac{1}{2n+1} - \tfrac{1}{2n+2} > 0,$$

a więc (s_{2n-1}) jest malejący, (s_{2n}) jest rosnący i oba te ciągi są ograniczone przez $s_1 = 1$ z góry oraz $s_2 = \frac{1}{2}$ z dołu. Są to więc ciągi zbieżne. Ponadto $\lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2n} = 0$, zatem (s_{2n-1}) i (s_{2n}) są zbieżne do tej samej granicy. Stąd łatwo wywnioskować (wprost z definicji zbieżności) zbieżność (s_n) (do tej samej granicy).

TWIERDZENIE 3.23. Jeśli $|a_n| \leqslant b_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ (lub od pewnego miejsca) oraz szereg $\sum_n b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_n a_n$ jest (nawet bezwzględnie) zbieżny. □

4. Funkcja wykładnicza i logarytm

Niniejszy rozdział poświęcony jest najważniejszej funkcji w rachunku różniczkowym i całkowym. Duża część przedstawionego tu materiału jest dość skomplikowana i powinna być traktowana jako zapowiedź dalszej części wykładu.

4.1. **Funkcja wykładnicza.** Poniższa definicja jest nieco nienaturalna, ale bardzo ścisła i niezwykle użyteczna.

DEFINICJA 4.1. *Funkcja wykładnicza* (inaczej: *eksponencjalna*) dana jest wzorem:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,.$$

Do dowodu poprawności definicji potrzebny będzie następujący pomocniczy wynik.

LEMAT 4.2. Jeśli $x\in\mathbb{R}$, to ciąg $(\frac{x^n}{n!})$ jest ograniczony.

Dowód. Ciąg $(\frac{|x|^n}{n!} : n\in\mathbb{N})$ jest malejący od pewnego miejsca (od $n=\lfloor|x|\rfloor$), jest więc ograniczony z góry. □

Dowód poprawności definicji. Niech $x\in\mathbb{R}$ oraz $a_n=\frac{t^n}{n!}$. Niech ponadto M będzie ograniczeniem z góry ciągu o wyrazach $2^n\frac{|x|^n}{n!}=\frac{|2x|^n}{n!}$. Wtedy $|a_n|=\frac{|x|^n}{n!}\leqslant M(\frac{1}{2})^n$, zatem szereg $\sum\limits_n a_n$ jest zbieżny na mocy kryterium porównawczego. □

W dalszej części potrzebny będzie *wzór dwumianowy Newtona*. Dla $n,k\in\mathbb{N}_0$ takich, że $k\leqslant n$, *współczynnik dwumianowy* lub *symbol Newtona* określony jest wzorem

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\,.$$

TWIERDZENIE 4.3. Zachodzi

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\\ &= \binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\ldots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}y^n.\end{aligned}$$

Dowód. Dla $n=1$ oczywiście wzór zachodzi (dla $n=0$ również). Przypuśćmy, że zachodzi on dla pewnego $n\in\mathbb{N}$ (i wszystkich $t,s\in\mathbb{R}$). Wtedy

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y)\\ &= \left(\tbinom{n}{0}x^n+\tbinom{n}{1}x^{n-1}y+\tbinom{n}{2}x^{n-2}y^2+\ldots+\tbinom{n}{n-1}xy^{n-1}+\tbinom{n}{n}y^n\right)(x+y)\\ &= \left(\tbinom{n}{0}x^{n+1}+\tbinom{n}{1}x^ny+\tbinom{n}{2}x^{n-1}y^2+\ldots+\tbinom{n}{n-1}x^2y^{n-1}+\tbinom{n}{n}xy^n\right)\\ &\qquad+\left(\tbinom{n}{0}x^ny+\tbinom{n}{1}x^{n-1}y^2+\tbinom{n}{2}x^{n-2}y^3+\ldots+\tbinom{n}{n-1}xy^n+\tbinom{n}{n}y^{n+1}\right)\\ &= \tbinom{n}{0}x^{n+1}+\left(\tbinom{n}{1}+\tbinom{n}{0}\right)x^ny+\left(\tbinom{n}{2}+\tbinom{n}{1}\right)x^{n-1}y^2+\left(\tbinom{n}{3}+\tbinom{n}{2}\right)x^{n-1}y^3\\ &\qquad+\ldots+\left(\tbinom{n}{n-1}+\tbinom{n}{n-2}\right)x^2y^{n-1}+\left(\tbinom{n}{n}+\tbinom{n}{n-1}\right)xy^n+\tbinom{n}{n}y^{n+1}.\end{aligned}$$

Pozostaje zauważyć, że $\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ oraz (jest to ćwiczenie na liście zadań nr 7)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

gdy $1 \leqslant k \leqslant n$. Teza wynika z zasady indukcji. □

W zapisie skrótowym (i bardziej formalnym) dowód wygląda następująco:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n (x+y) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right) (x+y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j+1} y^j + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} x^{n-j+1} y^j + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right) x^{n-j+1} y^j + y^{n+1}.
\end{aligned}$$

Twierdzenie 4.4. Zachodzi $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Dowód. Niech $a_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $b_n = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots + \frac{y^n}{n!}$, $c_n = 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x+y)^n}{n!}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
a_n b_n = 1 &\\
&+ \left(\frac{x}{1!} + \frac{y}{1!} \right) \\
&+ \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{xy}{1!1!} + \frac{y^2}{2!} \right) \\
&+ \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2 y}{2!1!} + \frac{xy^2}{1!2!} + \frac{y^3}{3!} \right) \\
&\quad \vdots \\
&+ \left(\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1} y}{(n-1)!1!} + \frac{x^{n-2} y^2}{(n-2)!2!} + \ldots + \frac{x y^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{y^n}{n!} \right) \\
&+ r_n,
\end{aligned}$$

gdzie reszta r_n jest sumą $\frac{n(n+1)}{2}$ składników postaci $x^k y^l/(k!l!)$ z indeksami k i l spełniającymi nierówności $k + l > n$ oraz $k, l \leqslant n$. Ze wzoru dwumianowego Newtona, $a_n b_n = c_n + r_n$.

Niech M będzie wspólnym ograniczeniem z góry ciągów o wyrazach $8^n\frac{|x|^n}{n!}$ oraz $8^n\frac{|y|^n}{n!}$. Wówczas $\frac{|x|^k|y|^l}{k!l!} \leqslant M^2/8^{k+l} \leqslant M^2/8^n$, a więc

$$|r_n| \leqslant \frac{n(n+1)}{2}\,\frac{M^2}{8^n} \leqslant \frac{M^2}{2^n}\,\frac{n}{2^n}\,\frac{n+1}{2^{n+1}}\,.$$

Ponieważ $n \leqslant 2^n$, zachodzi $|r_n| \leqslant M^2/2^n$, czyli r_n jest zbieżny do zera. Wobec tego $c_n = a_nb_n - r_n$ jest zbieżny jednocześnie do $\exp(x+y)$ i do $\exp(x)\exp(y)$. □

W szczególności więc $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.

> Wniosek 4.5. Funkcja wykładnicza jest dodatnia i ściśle rosnąca.

Dowód. Oczywiście dla $x > 0$ zachodzi $\exp(x) > \exp(0) = 1$, skąd $\exp(-x) = 1/\exp(x) > 0$. Ponadto gdy $x < y$, to $\exp(x) = \exp(x)\exp(y-x) > \exp(x)$. □

> Twierdzenie 4.6. Funkcja wykładnicza jest *ciągła*: dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $|y - x| < \delta$, to $|\exp(y) - \exp(x)| < \varepsilon$.

Dowód. Jeśli $|y| < 1$, to oczywiście

$$|\exp(y) - 1| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots + \frac{y^n}{n!}\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}(|y| + |y|^2 + \ldots + |y|^n) = \frac{|y|}{1-|y|}\,.$$

Jeśli więc $|y| < \frac{1}{2}$ i $|y| < \frac{\varepsilon}{2}$, to $|\exp(y) - 1| \leqslant 2|y| < \varepsilon$. Zatem exp jest ciągła w 0.

Podobnie jeśli $x \in \mathbb{R}$, $|y - x| < \frac{1}{2}$ oraz $|y - x| < \exp(-x)\frac{\varepsilon}{2}$, to

$$|\exp(y) - \exp(x)| = \exp(x)\,|\exp(y-x) - 1| \leqslant \exp(x)2|y - x| < \varepsilon,$$

czyli exp jest ciągła w x. □

Ciągłość oznacza możliwość zamiany kolejności granicy i funkcji.

> Twierdzenie 4.7. Jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny do x, a funkcja f jest ciągła w x, to ciąg $(f(a_n))$ jest zbieżny do $f(x)$.

Milcząco zakłada się tu, że wartości a_n należą do dziedziny funkcji f.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje $\delta > 0$ o własności: jeśli $|a_n - x| < \delta$, to $|f(a_n) - f(x)| < \varepsilon$. Istnieje N o własności: jeśli $n \geqslant N$, to $|a_n - x| < \delta$. □

Niedługo zdefiniujemy potęgowanie przy pomocy funkcji wykładniczej oraz logarytmu. W szczególności zachodzić będzie $\exp(x) = (\exp(1))^x = e^x$, gdzie

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

jest *liczbą Eulera*. Warto odnotować bardzo użyteczne oszacowanie i udowodnić niewymierność e.

> Wniosek 4.8. Zachodzi $1 + x < \exp(x)$ gdy $x \neq 0$ oraz $\exp(x) < \frac{1}{1-x}$ gdy $x \neq 0$, $x < 1$.

Dowód. Dolne oszacowanie jest oczywiste dla $x > 0$ (wszystkie składniki sumy określającej $\exp(x)$ są dodatnie) i $x \leqslant -1$ (bo $\exp(x) > 0$). Górne zostało udowodnione wcześniej, gdy $0 < x < 1$. Gdy $x < 0$, to $-x > 0$ i stąd

$$\exp(t) = \frac{1}{\exp(-x)} < \frac{1}{1-x},$$

co kończy dowód górnego oszacowania. Gdy zaś $-1 < x < 0$, to $0 < -x < 1$ i wobec tego

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} < 1 + x. \qquad \square$$

W przyszłości zostanie wykazane, że

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

(inny dowód jest treścią ćwiczenia dodatkowego na liście zadań nr 7). Wzór ten ma ważną interpretację: jeśli odsetki w wysokości nominalnej x rocznie są kapitalizowane (czyli dopisywane do lokaty) w n okresach, to faktyczne oprocentowanie roczne wynosi $(1 + \frac{x}{n})^n - 1$. Gdy n jest duże, z dobrym przybliżeniem wartość lokaty po jednym roku to wartość początkowa przemnożona przez $\exp(x)$.

W szczególności zachodzi słynny wzór

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

TWIERDZENIE 4.9. Liczba e jest niewymierna.

Ogólniej: $\exp(t)$ jest niewymierna dla wszystkich wymiernych $t \neq 0$. Są to wręcz liczby przestępne, nie są więc pierwiastkami żadnego wielomianu o współczynnikach wymiernych.

Dowód. Gdyby $e = \frac{p}{q}$ (gdzie $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$), to dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant q$, zachodziłoby

$$n!\left(e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)\right) = \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \ldots$$

Lewa strona ma wartość całkowitą, prawa zaś spełnia

$$0 < \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \ldots < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots$$
$$= \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = \frac{1}{n} \leqslant 1.$$

Jednak nie ma liczby całkowitej zawartej w przedziale $(0, 1)$ — sprzeczność. Zatem e jest niewymierna. $\square$

4.2. **Logarytm naturalny.** Logarytm naturalny to funkcja odwrotna do funkcji wykładniczej. [[rysunek]]

DEFINICJA 4.10. *Logarytm naturalny* liczby $x > 0$ to liczba $y \in \mathbb{R}$ taka, że $\exp(y) = x$. Logarytm naturalny jest oznaczany $\ln(x)$ (lub $\ln x$, lub $\log(x)$, lub $\log x$).

Dowód wykorzystuje w zasadzie tylko dwa fakty: monotoniczność i ciągłość funkcji wykładniczej.

Dowód poprawności definicji. Jeśli taka liczba y istnieje, to jest jedyna, bowiem exp jest ściśle rosnąca.

Niech $x > 0$. Ponieważ $\exp(z) > z \geqslant x$ dla $z \geqslant x$, zbiór $A = \{z \in \mathbb{R} : \exp(z) \leqslant x\}$ jest ograniczony z góry (przez x). Ponieważ $\exp(z) < -\frac{1}{z}$ dla $z < 0$, zbiór A jest niepusty (zawiera $-\frac{1}{x}$). Niech $y = \sup A$. Istnieje ciąg (z_n) elementów A zbieżny do y. Z ciągłości funkcji wykładniczej wynika, że $\exp(y) = \lim\limits_{n\to\infty} \exp(z_n) \leqslant x$. Istnieje też inny ciąg (z_n) elementów $\mathbb{R}\setminus A$ zbieżny do y (np. $z_n = y+\frac{1}{n}$), zatem znów z ciągłości funkcji wykładniczej wynika, że $\exp(y) = \lim\limits_{n\to\infty} \exp(z_n) \geqslant x$. Stąd $\exp(y) = x$. □

Wprost z definicji wynika, że $\ln(\exp(x)) = x$ (dla $x \in \mathbb{R}$) oraz $\exp(\ln(x)) = x$ (dla $x > 0$).

TWIERDZENIE 4.11. Logarytm naturalny jest ściśle monotoniczną funkcją ciągłą.

Znów do dowodu wystarcza wiedzieć, że funkcja wykładnicza jest ściśle monotoniczna i ciągła.

Dowód. Ściśła monotoniczność wynika ze ścisłej monotoniczności funkcji wykładniczej: jeśli $0 < x_1 < x_2$ oraz $x_1 = \exp(y_1)$ i $x_2 = \exp(y_2)$, to $y_1 < y_2$.

Niech $x > 0$ i $\varepsilon > 0$. Niech $y = \ln(x)$, czyli $x = \exp(y)$. Niech wreszcie $\delta = \min(\exp(y+\varepsilon) - \exp(y), \exp(y) - \exp(y-\varepsilon))$. Jeśli $|z - x| < \delta$, to $\exp(y-\varepsilon) < z < \exp(y+\varepsilon)$. Skoro logarytm naturalny jest ściśle monotoniczny, to $y - \varepsilon < \ln(z) < y + \varepsilon$. Oznacza to, że jeśli $|z - x| < \delta$, to $|\ln(z) - \ln(x)| < \varepsilon$. □

Z własności $\exp(t + s) = \exp(t)\exp(s)$ natychmiast wynika własność $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. Podobnie z oszacowań funkcji wykładniczej wynikają analogiczne oszacowania logarytmu naturalnego.

WNIOSEK 4.12. Zachodzi $1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1$ gdy $x \neq 1$, $x > 0$.

Dowód. Dla $y \neq 0$, $y > -1$ zachodzi $1 + y < \exp(y)$, czyli $\ln(1 + y) < y$. By uzyskać oszacowanie z góry, wystarczy podstawić $y = x - 1$. Podobnie dla $y \neq 0$, $y < 1$, zachodzi $\exp(y) < \frac{1}{1-y}$, czyli $y < \ln(\frac{1}{1-y})$. Oszacowanie z dołu wynika z tej nierówności po podstawieniu $y = 1 - \frac{1}{x}$. □

4.3. **Potęgowanie.** Potęgowanie można określić wpierw indukcyjnie dla wykładników naturalnych, następnie dla wykładników wymiernych przez pierwiastkowanie, i wreszcie dla wykładników rzeczywistych przez ciągłość. Taka definicja jest jednak skomplikowana i wymaga dużo pracy. Prostszy sposób przedstawiony jest poniżej.

DEFINICJA 4.13. Dla $x > 0$ oraz $y \in \mathbb{R}$ *potęga* x^y o *podstawie* x i *wykładniku* y zdefiniowana jest wzorem $x^y = \exp(y \ln(x))$.

Własności potęgi: $x^1 = x$, $x^0 = 1$, $x^z y^z = (xy)^z$, $x^y x^z = x^{y+z}$, $(x^y)^z = x^{y\cdot z}$, wynikają wprost z definicji. Łatwo też (indukcyjnie) sprawdzić, że x^n jest iloczynem n czynników x gdy $n \in \mathbb{N}$. Monotoniczność funkcji potęgowej (danej wzorem $f(x) = x^a = \exp(a \ln(x))$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$; tu $x > 0$) i wykładniczej (danej wzorem $g(x) = a^x = \exp(x \ln(a))$

dla pewnego $a > 0$; tu $x \in \mathbb{R}$) wynika z monotoniczności exp i ln. Prawdziwe jest też następujące twierdzenie o potęgowaniu granic.

TWIERDZENIE 4.14. Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = x$, $\lim_{n\to\infty} b_n = y$ oraz $x > 0$, to $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = x^y$.

Dowód. Z ciągłości logarytmu i funkcji wykładniczej wynika kolejno, że $\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = \ln(x)$, $\lim_{n\to\infty} (b_n \ln(a_n)) = y \ln(x)$ oraz $\lim_{n\to\infty} \exp(b_n \ln(a_n)) = \exp(y \ln(x))$. □

Przy dodatkowych założeniach podobny rezultat zachodzi, gdy $x = 0$.

TWIERDZENIE 4.15. Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = y$ oraz $y > 0$ i $a_n > 0$ (od pewnego miejsca), to $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 0$.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Od pewnego miejsca zachodzi $0 < a_n < \min\{\varepsilon^{2/y}, 1\}$ i $b_n > \frac{1}{2}y$, skąd $0 < a_n^{b_n} < \varepsilon$. □

Logarytm o dowolnej podstawie zdefiniowany jest następująco: $\log_a(x) = y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^y = x$ (tu $x > 0$, $a > 0$ i $a \neq 1$). Wprost z definicji wynika, że $\log_a(x) = y$ jeśli $\exp(y \ln(a)) = x$, czyli $y = \ln(a)/\ln(x)$. Podobnie prosto dowodzi się innych własności logarytmów:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}, \qquad \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \qquad \log_a(x^y) = y \log_a(x).$$

Na koniec tego rozdziału warto wspomnieć, że (w myśl powyższych definicji) $\exp(t) = e^t$ oraz $\ln(x) = \log_e(x)$.

4.4. **Funkcje trygonometryczne.** Równie formalnie można zdefiniować podstawowe funkcje trygonometryczne.

DEFINICJA 4.16. Funkcje *sinus* i *cosinus* dane są wzorami

$$\cos(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin(x) = \lim_{n\to\infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Wykonując rachunki podobne do tych przeprowdzonych dla funkcji wykładniczej, można wykazać znane wzory trygonometryczne:

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1,$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Choć jest to bardzo formalne, ścisłe i użyteczne podejście, nas jednak będą interesowały dowody geometryczne wymienionych wyżej własności.

5. Ciągi liczbowe (część II)

5.1. **Granice niewłaściwe.** Niezwykle wygodnie jest pisać:

$$\inf A = -\infty \qquad \text{gdy } A \text{ jest nieograniczony z dołu,}$$
$$\sup A = \infty \qquad \text{gdy } A \text{ jest nieograniczony z góry}$$

jest niezwykle użyteczna. Nie oznacza to, że $\inf A$ czy $\sup A$ są tu liczbami (symbole $-\infty$ i ∞ nie są liczbami!), ani nawet że $\inf A$ i $\sup A$ są określone. Jest to po prostu skrócony zapis.

Podobną naturalną konwencję stosuje się przy opisie dwóch klas ciągów rozbieżnych.

DEFINICJA 5.1. Ciąg (a_n) jest *rozbieżny do plus nieskończoności* (inaczej: *ma granicę niewłaściwą plus nieskończoność* lub *dąży do plus nieskończoności*), jeśli dla każdego M istnieje N takie, że dla $n > N$ zachodzi $a_n > M$. Fakt ten zapisuje się w postaci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Analogicznie ciąg (a_n) jest *rozbieżny do minus nieskończoności* (inaczej: *ma granicę niewłaściwą minus nieskończoność* lub *dąży do minus nieskończoności*), jeśli dla każdego M istnieje N takie, że dla $n > N$ zachodzi $a_n < M$; zapisuje się ten fakt w postaci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Dla ściślejszego odróżnienia ciągów zbieżnych od ciągów rozbieżnych do ∞ i $-\infty$ mówi się często, że ciągi zbieżne mają granicę *właściwą*. W definicji granicy właściwej wystarczy rozważać dowolnie małe $\varepsilon > 0$; podobnie w definicji granicy niewłaściwej ∞ wystarczy rozważać dowolnie duże M (np. $M > 1$), zaś w definicji granicy niewłaściwej $-\infty$ — dowolnie duże ujemne M (np. $M < -1$).

Ciągi rozbieżne do ∞ lub $-\infty$ mają wiele użytecznych własności, podobnych do własności granic. Prawdziwe jest następujące *twierdzenie o dwóch ciągach*:

TWIERDZENIE 5.2. Jeśli $a_n \geqslant b_n$ (od pewnego miejsca) oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Dowód. Dla każdego M istnieje N takie, że $b_n \geqslant M$ dla $n > N$. Oznacza to, że $a_n \geqslant M$ dla $n > N$. □

Ciągi monotoniczne zawsze mają granicę: właściwą lub niewłaściwą.

TWIERDZENIE 5.3. Nieograniczony z góry ciąg rosnący jest rozbieżny do ∞. Analogicznie nieograniczony z dołu ciąg malejący jest rozbieżny do $-\infty$.

Dowód. Jeśli (a_n) jest nieograniczony z góry, to dla każdego x istnieje $N \in \mathbb{N}_+$ takie, że $a_N > x$. Jeśli dodatkowo (a_n) jest rosnący, to $a_n \geqslant a_N > x$ dla $n \geqslant N$, co oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. □

Można sformułować pewne prawa arytmetyki granic niewłaściwych.

TWIERDZENIE 5.4. (a) Warunek $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ jest równoważny warunkowi $\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = \infty$;

(b) warunek $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ jest równoważny warunkowi: $a_n > 0$ od pewnego miejsca oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$;

(c) jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, to ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu;
(d) jeśli ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu i $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$;
(e) jeśli ciąg (a_n) jest od pewnego miejsca ograniczony z dołu przez dodatnią liczbę i $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$;
(f) jeśli ciąg (a_n) jest ograniczony i $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.
Analogiczne własności mają ciągi rozbieżne do minus nieskończoności.

Dowód. Poniżej przedstawiony jest zarys dowodu w każdym z przypadków:
(a) $a_n < M$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-a_n > -M$;
(b) gdy $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$, to $a_n > M$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon$;
(c) $a_n > 0$ od pewnego miejsca;
(d) jeśli c jest ograniczeniem z dołu ciągu (a_n) i $b_n > M - c$, to $a_n + b_n > M$;
(e) jeśli $c > 0$ jest ograniczeniem z dołu dalekich wyrazów ciągu (a_n) i $b_n > \frac{M}{c}$, to $a_n b_n > M$;
(f) jeśli $c > 0$ jest ograniczeniem z góry ciągu $|a_n|$ i $b_n > \frac{c}{\varepsilon}$, to $|\frac{a_n}{b_n}| < \varepsilon$.

□

Wniosek 5.5. (a) Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$;
(b) jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$;
(c) jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = y > 0$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$;
(d) jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$.
Analogiczne własności mają ciągi rozbieżne do minus nieskończoności. □

Twierdzenie 5.6. (a) Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, to $\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = \infty$ oraz $\lim_{n\to\infty} \exp(a_n) = \infty$;
(b) jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, to $\lim_{n\to\infty} \exp(a_n) = 0$;
(c) jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ i $a_n > 0$ (od pewnego miejsca), to $\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = -\infty$.

Dowód. Dwa ostatnie stwierdzenia wynikają z pierwszego, własności funkcji exp i ln oraz własności granic niewłaściwych: $\exp(a_n) = 1/\exp(-a_n)$ oraz $\ln(a_n) = -\ln(\frac{1}{a_n})$. Pozostaje udowodnić pierwsze stwierdzenie.

Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, to z nierówności $\exp(a_n) \geqslant a_n$ i twierdzenia o dwóch ciągach wynika, że $\lim_{n\to\infty} \exp(a_n) = \infty$. Ponadto dla dowolnego M zachodzi $a_n > \exp(M)$ od pewnego miejsca, zatem $\ln(a_n) > M$ od pewnego miejsca. Oznacza to, że (z definicji) $\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = \infty$. □

Wniosek 5.7. (a) Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = y > 0$, to $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$;
(b) jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$;
(c) jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = x > 1$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$;

(d) jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x \in (0,1)$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 0$;
(e) jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n > 0$ (od pewnego miejsca) i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 0$.

Dowód. W dowodzie korzysta się z definicji $a_n^{b_n} = \exp(b_n \ln(a_n))$ i własności granic niewłaściwych. □

Powyższe prawa działań na granicach niewłaściwych zapisuje się zwykle skrótowo przy pomocy *symboli oznaczonych*, między innymi dla $y > 0$ i $z > 1$:

$$\begin{aligned}
[\infty] + [x] &= [\infty], & [-\infty] + [x] &= [-\infty], & [\infty] + [\infty] &= [\infty],\\
[\infty] \cdot [y] &= [\infty], & [\infty] \cdot [-y] &= [-\infty], & [\infty] \cdot [\infty] &= [\infty],\\
\frac{1}{[\infty]} &= [0^+], & \frac{1}{[0^+]} &= [\infty], & \frac{[\infty]}{[0^+]} &= [\infty],\\
[\infty]^{[y]} &= [\infty], & [z]^{[\infty]} &= [\infty], & [\infty]^{[\infty]} &= [\infty],
\end{aligned}$$

gdzie $[\infty]$ symbolizuje ciąg rozbieżny do plus nieskończoności, $[0^+]$ symbolizuje ciąg zbieżny do zera i o wyrazach (od pewnego miejsca) dodatnich itp. Zapisy takie należy traktować wyłącznie symbolicznie. W zbiorze $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ nie da się bowiem wprowadzić działań tak, by zachowane były postulaty algebraiczne zbioru liczb rzeczywistych (prawa działań).

Przykład. Skoro $(-1)^n$ jest ograniczony, zaś $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} (n + (-1)^n) = \infty$.

Przykład. Zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 - n - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}) = \infty$.

Przykład. Zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. W istocie, w rozwinięciu $n!$ występuje $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ czynników równych co najmniej $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, skąd $n! \geqslant (\frac{n}{2})^{n/2}$. Wobec tego $\sqrt[n]{n!} \geqslant (\frac{n}{2})^{1/2}$. Skoro $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2} = \infty$ oraz $\frac{1}{2} > 0$, zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{2})^{1/2} = \infty$, skąd $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Przykład. Zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} ((1 + \frac{1}{n})^n)^n = \infty$ (podstawa dąży do e, a na pewno jest równa co najmniej 2 na mocy nierówności Bernoulliego; za to wykładnik dąży do ∞). Łatwiej: $(1 + \frac{1}{n})^{n^2} \geqslant 1 + n$ na mocy nierówności Bernoulliego.

5.2. **Podciągi.** Poniższe pojęcie okazuje się niezwykle użyteczne.

Definicja 5.8. Ciąg (b_n) nazywany jest *podciągiem* (inaczej: *ciągiem częściowym*) ciągu (a_n), jeśli powstaje z niego przez pominięcie wybranych wyrazów. Równoważnie: istnieje ściśle rosnący ciąg (k_n) dodatnich liczb naturalnych taki, że $b_n = a_{k_n}$.

Wiele własności podciągów wynika wprost z następującej obserwacji: jeśli (k_n) jest taki jak w definicji podciągu, to $k_n \geqslant n$. (Formalny dowód tego prostego faktu wykorzystuje oczywiście indukcję: $k_1 \geqslant 1$ oraz jeśli $k_n \geqslant n$, to $k_{n+1} > k_n \geqslant n$, czyli $k_{n+1} \geqslant n + 1$).

Twierdzenie 5.9. Jeśli ciąg jest zbieżny do x, to każdy jego podciąg jest zbieżny do x.

Dowód. Niech (b_n) będzie podciągiem ciągu (a_n), $b_n = a_{k_n}$. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $|a_n - x| < \varepsilon$ dla $n \geqslant N$. Zachodzi wtedy $|b_n - x| = |a_{k_n} - x| < \varepsilon$ dla $n \geqslant N$ (bowiem $k_n \geqslant n \geqslant N$). □

Przykład. Ciąg o wyrazach $b_n = (1 + \frac{1}{n^2})^{n^2}$ jest zbieżny do e, bowiem jest podciągiem ciągu o wyrazach $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ (mianowicie $b_n = a_{n^2}$). Wobec tego ciąg o wyrazach $c_n = (1 + \frac{1}{n^2})^n = b_n^{1/n}$ jest zbieżny do 1.

WNIOSEK 5.10. Jeśli ciąg ma dwa podciągi zbieżne do różnych granic, to nie jest zbieżny. □

Przykład. Ciąg o wyrazach $a_n = (-1)^n$ nie jest zbieżny, bo (a_{2n}) jest zbieżny do 1, zaś (a_{2n+1}) jest zbieżny do -1.

Przykład. Niech $p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Ciąg o wyrazach $a_n = p^n - \lfloor p^n \rfloor$ nie jest zbieżny, bo jego podciągi (a_{2n}) i (a_{2n+1}) są zbieżne odpowiednio do 1 i 0. Aby to wykazać, wygodnie przyjąć $q = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Wówczas $p^2 = p + 1$ oraz $q^2 = q + 1$, skąd wynika, że ciąg $b_n = p^n + q^n$ spełnia równanie $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$, $c_0 = 2$, $c_1 = 1$. Jest to więc ciąg o wartościach całkowitych. Zachodzi zatem $a_n = p^n - \lfloor p^n \rfloor = c_n - q^n - \lfloor c_n - q^n \rfloor = -q^n - \lfloor -q^n \rfloor$. Ponieważ $-1 < q < 0$, zachodzi $a_{2n} = -q^{2n} + 1$ oraz $a_{2n+1} = -q^{2n+1}$.

LEMAT 5.11. Jeśli ciąg nie zawiera wyrazu największego, to zawiera podciąg ściśle rosnący. Jeśli ciąg nie zawiera wyrazu najmniejszego, to zawiera podciąg ściśle malejący.

Dowód. Podciąg ściśle rosnący ciągu (a_n), który nie zawiera wyrazu największego, konstruowany jest indukcyjnie. Niech $k_1 = 1$, a gdy określone już jest k_n, niech k_{n+1} będzie indeksem spełniającym warunki $k_{n+1} > k_n$ oraz $a_{k_{n+1}} > a_{k_n}$. Taka konstrukcja jest możliwa, bowiem w przeciwnym razie największy z wyrazów $a_1, a_2, \ldots, a_{k_n}$ byłby również największym wyrazem całego ciągu (a_n). Uzyskujemy w ten sposób ciąg (a_{k_n}), który jest malejącym podciągiem ciągu (a_n).

Dowód drugiej części lematu jest analogiczny. □

TWIERDZENIE 5.12. Każdy ciąg zawiera podciąg monotoniczny.

Dowód. Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym. Jeśli dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ ciąg $(a_{n+j} : j \in \mathbb{N}_+)$ nie zawiera elementu najmniejszego, to na mocy lematu zawiera on podciąg ściśle malejący. Będzie to również (malejący) podciąg wyjściowego ciągu.

Jeśli zaś ciąg $(a_{n+j} : j \in \mathbb{N}_+)$ zawiera element najmniejszy dla każdego $n \in \mathbb{N}$, podciąg rosnący konstruowany jest indukcyjnie: niech a_{k_1} będzie najmniejszym wyrazem wyjściowego ciągu, a gdy określone już jest k_n, niech $a_{k_{n+1}}$ będzie najmniejszym wyrazem ciągu powstałego przez pominięcie pierwszych k_n wyrazów, tj. ciągu $(a_{k_n+j} : j \in \mathbb{N}_+)$. Z określenia wynika, że $k_{n+1} > k_n$ oraz $a_{k_n} \leqslant a_{k_{n+1}}$ (bowiem a_{k_n} jest najmniejszym elementem większego zbioru, zaś $a_{k_{n+1}}$ — mniejszego zbioru). □

Jednym z najważniejszych twierdzeń dotyczących ciągów liczbowych jest poniższe twierdzenie Bolzano–Weierstrassa. Jeden z jego dowodów wykorzystuje podciągi monotoniczne. Inny opiera się na algorytmie bisekcji.

TWIERDZENIE 5.13. Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny.

Dowód. Podciąg monotoniczny rozważanego ciągu również jest ograniczony, a więc zbieżny. □

Analogicznie każdy ciąg zawiera podciąg zbieżny do granicy właściwej lub niewłaściwej, ale dużo łatwiej wprost wykazać, że ciąg nieograniczony z góry zawiera podciąg rozbieżny do nieskończoności, zaś ciąg nieograniczony z dołu — do minus nieskończoności.

DEFINICJA 5.14. *Punktem skupienia* (inaczej: *granicą częściową*) ciągu nazywamy granicę dowolnego jego (zbieżnego) podciągu.

TWIERDZENIE 5.15. Liczba x jest punktem skupienia ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje (niekoniecznie rosnący) ciąg liczb naturalnych (k_n) rozbieżny do $+\infty$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = x$.

Dowód. Jeśli x jest punktem skupienia, to istnieje nawet ściśle rosnący ciąg (k_n) o zadanych własnościach. Przeciwnie, jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = x$, to (k_n) zawiera podciąg ściśle rosnący (l_n). Ciąg (a_{l_n}) jest więc podciągiem (a_n) i jest zbieżny do x (bo jest podciągiem ciągu (a_{k_n}) zbieżnego do x). □

TWIERDZENIE 5.16. Liczba x jest punktem skupienia ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ nieskończenie wiele wyrazów a_n należy do przedziału $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ (czyli spełnia nierówność $|a_n - x| < \varepsilon$).

Warto przypomnieć, że x jest granicą ciągu (a_n), gdy każdy przedział $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ zawiera prawie wszystkie wyrazy a_n.

Dowód. Jeśli x jest punktem skupienia, to $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n}$ dla pewnego ściśle rosnącego ciągu k_n oraz dla dowolnego $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy a_{k_n} należą do $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

W dowodzie przeciwnej implikacji niech $k_1 = 1$ i gdy znane jest już k_n, niech k_{n+1} będzie indeksem spełniającym własności: $k_{n+1} > k_n$, $a_{k_{n+1}} \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$. Ta definicja jest poprawna, bowiem zbiór indeksów j takich, że $a_j \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ jest nieskończony, zawiera zatem liczbę większą od k_n. Z twierdzenia o trzech ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = x$, czyli x jest punktem skupienia ciągu (a_n). □

5.3. **Granica dolna i granica górna.** Największy i najmniejszy punkt skupienia ciągu to jego granica górna i dolna. Wygodnie jednak przyjąć inną definicję.

DEFINICJA 5.17. Jeśli (a_n) jest ciągiem ograniczonym, to *granica dolna* (albo *limes inferior*) i *granica górna* (albo *limes superior*) ciągu (a_n) dane są wzorami

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k : k \in \mathbb{N},\, k \geqslant n\},$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \in \mathbb{N},\, k \geqslant n\}.$$

Dowód poprawności definicji. Powyższe granice istnieją, bo ciągi o wyrazach $b_n = \inf\{a_k : k \in \mathbb{N},\, k \geqslant n\}$ i $c_n = \sup\{a_k : k \in \mathbb{N},\, k \geqslant n\}$ są monotoniczne i ograniczone: $b_{n+1} \geqslant b_n$ (kres dolny mniejszego zbioru jest większy), $c_{n+1} \leqslant c_n$ (kres górny mniejszego zbioru jest mniejszy) oraz $b_n \leqslant c_n$. □

Z powyższego uzasadnienia wynika też, że $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Przykład. Jeśli $a_n = (-1)^n$, to $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ oraz $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

TWIERDZENIE 5.18. Ciąg (a_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony i $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. W tym przypadku wspólna wartość granic dolnej i górnej jest też granicą ciągu (a_n).

Dowód. Niech (a_n) będzie zbieżny do x. Wówczas (a_n) jest ograniczony, a jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje N takie, że dla $n > N$ zachodzi $a_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Jeśli (b_n) i (c_n) są zdefiniowane jak w dowodzie poprawności definicji granic dolnej i górnej, to dla $n > N$ zachodzi $b_n \geqslant x-\varepsilon$ i $c_n \leqslant x+\varepsilon$. Wynika stąd, że $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant x-\varepsilon$ oraz $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant x+\varepsilon$. Skoro $\varepsilon > 0$ jest dowolny, zachodzi $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant x \geqslant \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, a ponieważ zawsze $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$, ostatecznie $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} b_n = x$.

Jeśli zaś (a_n) jest ograniczony i $x = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ taki, że $b_N > x-\varepsilon$ oraz $c_N < x+\varepsilon$ (dla (b_n) i (c_n) jak wyżej). Oznacza to, że $a_n > x-\varepsilon$ i $a_n < x+\varepsilon$ dla $n > N$. Stąd $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$. □

TWIERDZENIE 5.19. Granica górna ciągu ograniczonego to największy punkt skupienia tego ciągu. Podobnie granica dolna to najmniejszy punkt skupienia tego ciągu.

Dowód. Niech ciąg (a_n) będzie ograniczony, niech $b_n = \sup\{a_k : k \in \mathbb{N}, k \geqslant n\}$, niech $x = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i niech (a_{k_n}) będzie podciągiem (a_n) zbieżnym do y. Wtedy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $k_n \geqslant n$, zatem $a_{k_n} \leqslant b_n$, skąd $y \leqslant x$.

Z drugiej strony dla dowolnego $n > 0$ istnieje j takie, że $x \leqslant b_j < x + \frac{1}{n}$. Istnieje ponadto $k \geqslant \max\{j, n\}$ takie, że $b_j - \frac{1}{n} < a_k \leqslant b_j$. Oznacza to, że $x - \frac{1}{n} < a_k < x + \frac{1}{n}$. Pisząc k_n zamiast k, otrzymujemy ciąg (k_n) rozbieżny do nieskończoności i taki, że $x - \frac{1}{n} < a_{k_n} < x + \frac{1}{n}$. Z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = x$, a więc W szczególności istnieje nieskończenie wiele takich k. Dowodzi to, że x jest punktem skupienia ciągu (a_n).

Dowód drugiej części twierdzenia jest analogiczny. □

Dla wygody często pisze się:

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} a_n &= -\infty && \text{gdy ciąg } (a_n) \text{ jest nieograniczony z dołu,}\\
\liminf_{n\to\infty} a_n &= +\infty && \text{gdy ciąg } (a_n) \text{ jest rozbieżny do } +\infty,\\
\limsup_{n\to\infty} a_n &= +\infty && \text{gdy ciąg } (a_n) \text{ jest nieograniczony z góry,}\\
\limsup_{n\to\infty} a_n &= -\infty && \text{gdy ciąg } (a_n) \text{ jest rozbieżny do } -\infty.
\end{aligned}$$

Jest to w pewnym sensie zgodne z oznaczeniami $\sup A$ i $\inf A$ w przypadku gdy zbiór A jest nieograniczony.

5.4. **Przykłady.** Pierwszy przykład rozpisany jest bardzo szczegółowo.

Przykład. Zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{(n^3+1)^{3/2}}{n^4+1} = \lim_{n\to\infty} (n^{1/2} \cdot \tfrac{(1+1/n^3)^{3/2}}{1+1/n^4}) = \infty$$

ze względu na twierdzenie o arytmetyce granic niewłaściwych (typ $[\infty] \cdot [1] = [\infty]$). Wykorzystaliśmy tu następujące własności:

- $\lim_{n\to\infty} n^{1/2} = \lim_{n\to\infty} n^3 = \lim_{n\to\infty} n^4 = \infty$ na mocy twierdzenia o potęgowanie granic niewłaściwych (typ $[\infty]^{[y]} = \infty$" dla $y > 0$);
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} = 0$ na mocy twierdzenia o arytmetyce granic niewłaściwych (typ $\frac{[0]}{[\infty]} = [0]$);
- $\lim_{n\to\infty} (1+1/n^3)^{3/2} = 1$ ze względu na poprzednie punkty i twierdzenia: o arytmetyce granic i o potęgowaniu granic;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n^3)^{3/2}}{1+1/n^4} = 1$ na mocy poprzednich punktów i twierdzenia o arytmetyce granic.

Przykład. Na mocy twierdzenia o arytmetyce i potęgowniu granic zachodzi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3-n^2}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{(\sqrt[3]{n^3+n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3+n^2}\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2} + (\sqrt[3]{n^3+n^2})^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}})^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}} + (\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}})^2} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Przykład. Niech $a_n = (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})^n$. Zachodzi $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} \leqslant \frac{n+1}{n^2-1} = \frac{1}{n-1}$, zatem

$$(1+\tfrac{1}{n})^n \leqslant a_n \leqslant (1+\tfrac{1}{n-1})^n = (1+\tfrac{1}{n-1})^{n-1}(1+\tfrac{1}{n-1}).$$

Z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy $\lim_{n\to\infty} a_n = e$.

Przykład. Zachodzi $\lim_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \ln((1+\frac{1}{n})^n) = \ln(e) = 1$ (na mocy twierdzenia o granicy logarytmu). Podobnie $\lim_{n\to\infty} n\ln(1-\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \ln((1-\frac{1}{n})^n) = \ln(e^{-1}) = -1$.

Przykład. Jeśli ciąg liczb wymiernych jest zbieżny do liczby niewymiernej, to mianowniki dążą do ∞. W istocie, niech rozważany ciąg ma wyrazy $\frac{p_n}{q_n}$ (gdzie $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}$), i niech x będzie granicą. Niech $q \in \mathbb{N}$. Wówczas $x \in (\frac{p}{q!}, \frac{p+1}{q!})$ dla pewnego $p \in \mathbb{Z}$ (równego $\lfloor q!x \rfloor$). Niech ε będzie mniejszą z liczb $x - \frac{p}{q!}$, $\frac{p+1}{q!} - x$, tak aby $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (\frac{p}{q!}, \frac{p+1}{q!})$. Ponadto istnieje N takie, że dla $n \geqslant N$ zachodzi $\frac{p_n}{q_n} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Gdyby $q_n \leqslant q$, to $q! \cdot \frac{p_n}{q_n}$ byłoby liczbą całkowitą z przedziału $(p, p+1)$ — sprzeczność. Zatem $q_n > q$ dla $n \geqslant N$.

Przykład. Ciąg (a_n) zadany jest rekurencyjnie wzorami $a_1 = 0$, $a_{n+1} = (1 - \frac{1}{n})a_n + 1$. Wówczas ciąg (a_n) nie jest zbieżny: gdyby był zbieżny do x, to, rozważając granicę obu stron wzoru rekurencyjnego, otrzymalibyśmy $x = 1 \cdot x + 1$, sprzeczność. Oczywiście $a_n \geqslant 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ (formalnie dowodzilibyśmy tego indukcyjnie). Ponadto (a_n) jest ciągiem ściśle rosnącym na mocy zasady indukcji: zachodzi $a_1 < a_2$ oraz jeśli $a_n < a_{n+1}$, to $a_{n+1} = (1 - \frac{1}{n})a_n + 1 \leqslant (1 - \frac{1}{n+1})a_n + 1 < (1 - \frac{1}{n+1})a_{n+1} + 1 = a_{n+2}$. Gdyby (a_n) był ograniczony z góry, to byłby zbieżny. Jest zatem nieograniczony z góry. Udowodniliżmy zatem, że (a_n) jest rozbieżny do ∞.

6. Funkcje rzeczywiste, funkcje elementarne, funkcje ciągłe

6.1. **Funkcje rzeczywiste.** Głównym przedmiotem badań analizy matematycznej są *funkcje rzeczywiste*, czyli funkcje określona na pewnym podzbiorze zbioru liczb rzeczywistych (najczęściej na przedziale lub sumie przedziałów) i przyjmujące wartości rzeczywiste. Wiele takich funkcji określonych jest wzorami, na przykład $f(x) = x^2$, lub ma swoje oznaczenie, takie jak exp, ln czy sin. Z drugiej strony jest też wiele ważnych funkcji, których nie da się opisać wzorem. Istnieje na przykład funkcja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, która spełnia równanie $f(n) = (n-1)!$ dla $n \in \mathbb{N}$ i która jest *wypukła* (czyli, mówiąc nieformalnie, jej wykres wszędzie jest wygięty do góry) — jest ona nazywana *funkcją Gamma Eulera*.

Podobnie jak dla ciągów, wprowadzamy kilka intuicyjnych własności funkcji, które już zostały wykorzystane przy okazji omawiania funkcji wykładniczej i logarytmicznej. Przez I oznaczamy dowolny przedział: domknięty, otwarty lub półotwarty, ograniczony lub nie, być może równy $\mathbb{R}$.

Definicja 6.1. Funkcja f określona (co najmniej) na przedziale I, jest

- *parzysta*, jeśli $f(-x) = f(x)$ dla wszystkich $x \in I$ (zakłada się, że $I = \mathbb{R}$ lub przynajmniej że I jest symetryczny, tj. $x \in I$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-x \in I$);
- *nieparzysta*, jeśli $f(-x) = -f(x)$ dla wszystkich $x \in I$ (zakłada się, że I jest symetryczny);
- *ograniczona z góry* na I, jeśli istnieje M o własności: $f(x) \leqslant M$ dla wszystkich $x \in I$;
- *ograniczona z dołu* na I, jeśli istnieje M o własności: $f(x) \geqslant M$ dla wszystkich $x \in I$;
- *ograniczona* na I, jeśli jeśli jest ograniczona z dołu i z góry;
- *rosnąca* (lub *niemalejąca*) na I, jeśli $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ dla wszystkich $x_1, x_2 \in I$ takich, że $x_1 < x_2$;
- *malejąca* (lub *nierosnąca*) na I, jeśli $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ dla wszystkich $x_1, x_2 \in I$ takich, że $x_1 < x_2$;
- *ściśle rosnąca* na I, jeśli $f(x_1) < f(x_2)$ dla wszystkich $x_1, x_2 \in I$ takich, że $x_1 < x_2$;
- *ściśle malejąca* na I, jeśli $f(x_1) > f(x_2)$ dla wszystkich $x_1, x_2 \in I$ takich, że $x_1 < x_2$;
- *monotoniczna*, jeśli jest rosnąca lub malejąca, zaś *ściśle monotoniczna*, jeśli jest ściśle rosnąca lub ściśle majlejąca;
- *różnowartościowa* na I, jeśli $f(x_1) \neq f(x_2)$ dla wszystkich $x_1, x_2 \in I$ takich, że $x_1 \neq x_2$;
- *okresowa*, jeśli $f(x + T) = f(x)$ dla pewnego $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (nazywanego *okresem*) i wszystkich $x \in R$ (w tym przypadku zakłada się, że $I = \mathbb{R}$ lub przynajmniej że I jest okresowy o okresie T, tzn. $x \in I$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x + T \in I$).

Gdy wyrażenie „na I" jest pominięte, przyjmuje się, że I jest dziedziną funkcji f. We wszystkich powyższych definicjach I może być też dowolnym zbiorem, niekoniecznie przedziałem (w pierwszych dwóch — symetrycznym, w ostatnim — okresowym), ale rzadko będziemy rozważać tę ogólniejszą sytuację.

Przy okazji wprowadźmy następujące (niejako oczywiste) oznaczenia: $f+g$ oznacza funkcję określoną na części wspólnej dziedzin f i g, daną wzorem $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$. Analogicznie określa się $f-g$, $f\cdot g$ oraz $\frac{f}{g}$, przy czym w przypadku $\frac{f}{g}$ dziedziną jest część wspólna dziedziny f oraz zbioru tych x z dziedziny g, dla których $g(x) \neq 0$.

6.2. **Funkcje trygonometryczne.** Miara łukowa kąta to stosunek długości łuku okręgu (o środku w wierzchołku kąta) zawartego w tym kącie do jego promienia. Przez 2π oznacza się długość okręgu jednostkowego, a więc miarę kąta pełnego. Zachodzi zatem $2\pi = 360°$, $\pi = 180°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$. [[rysunek]]

DEFINICJA 6.2. Współrzędne punktu powstałego w wyniku obrotu punktu $(1,0)$ o kąt o mierze łukowej t w lewo (lub o kąt $-t$ w prawo, gdy $t<0$) nazywane są *cosinusem* (inaczej: *kosinusem*) oraz *sinusem* kąta t i oznaczane odpowiednio $\cos(t)$ oraz $\sin(t)$. Innymi słowy punkt o współrzędnych $x=\cos(t)$ oraz $y=\sin(t)$ przemieszcza się po okręgu jednostkowym lewoskrętnie z szybkością równą 1.[[rysunek]]

Tangens i *cotangens* (inaczej: *kotangens*) są zdefiniowane wzorami $\operatorname{tg}(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ oraz $\operatorname{ctg}(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$, o ile mianowniki nie są równe zero.[[rysunek]]

Dla kątów z zakresu $(0, \frac{\pi}{2})$ powyższa definicja zgadza się z tradycyjną, wykorzystującą trójkąty prostokątne. Inna, bardziej formalna definicja, wspomniana przy okazji analogicznej definicji funkcji wykładniczej exp, jest treścią ćwiczeń dodatkowych na liście zadań nr 9. Cztery opisane wyżej funkcje (i często również *secans* $\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$ i *cosecans* $\operatorname{csc}(t) = \frac{1}{\sin(t)}$) nazywane są *funkcjami trygonometrycznymi*. Funkcje sinus i cosinus określone są na całym zbiorze liczb rzeczywistych, $\operatorname{tg}(t)$ jest określone gdy $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ dla żadnego $n \in \mathbb{Z}$ (wtedy $\cos(t) \neq 0$), zaś $\operatorname{ctg}(t)$ — gdy $x \neq n\pi$ dla żadnego $n \in \mathbb{Z}$ (wtedy $\sin(t) \neq 0$). [[rysunek]]

Na podstawie definicji łatwo naszkicować wykresy i rozwiązać proste równania, np. $\sin(t) = \frac{1}{2}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $t = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ lub $t = \pi - \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$). [[rysunek]]

Wprost z definicji i z własności geometrycznych obrotów wynika wiele własności funkcji trygonometrycznych, takich jak $(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 = 1$ (obrót zachowuje długość odcinka). Łatwiejsze zawarte są w poniższym twierdzeniu, trudniejsze są treścią niektórych ćwiczeń na liście zadań nr 9 — cytujemy najważniejsze z nich.

TWIERDZENIE 6.3.
(a) Funkcje sin i cos są okresowe o okresie 2π, zaś tg i ctg — o okresie π;
(b) funkcje sin, tg i ctg są nieparzyste, funkcja cos — parzysta;
(c) funkcje sin i cos są ograniczone z dołu przez -1 i z góry przez 1;
(d) funkcje sin, cos i tg są ściśle rosnące odpowiednio na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[-\pi, 0]$ oraz $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Funkcje sin, cos i ctg są ściśle malejące odpowiednio na $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $[0, \pi]$ i $(0, \pi)$;
(e) zachodzi

$$\sin(t) = \sin(\pi - t) = -\sin(\pi + t) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - t),$$
$$\cos(t) = -\cos(\pi - t) = -\cos(\pi + t) = \sin(\tfrac{\pi}{2} - t).$$

(f) zachodzi

$$\sin(t+s) = \sin(t)\cos(s) + \cos(t)\sin(s),$$
$$\cos(t+s) = \cos(t)\cos(s) - \sin(t)\sin(s). \qquad \square$$

Poniższe oszacowanie odegra niezwykle ważną rolę.

TWIERDZENIE 6.4. Dla $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ zachodzi $\sin(t) < t < \operatorname{tg}(t)$.

Dowód. Teza wynika z porównania pól dwóch trójkątów (o wierzchołkach: $(0,0)$, $(1,0)$ i $(\cos(t), \sin(t))$ oraz $(0,0)$, $(1,0)$ i $(1, \operatorname{tg}(t))$) z polem wycinka koła (o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$ i $(\cos(t), \sin(t))$). [[rysunek]] $\square$

W tym rozdziale stosowaliśmy literę t jako argument funkcji sin i cos ze względu na interpretację tych funkcji przy pomocy współrzędnych punktu poruszającego się jednostajnie po okręgu. W przyszłości będziemy jednak zwykle używać litery x do oznaczania argumentów dowolnych funkcji, w tym funkcji trygonometrycznych.

6.3. **Funkcje cyklometryczne.** Funkcje cyklometryczne są funkcjami odwrotnymi do funkcji trygonometrycznych na odpowiednich przedziałach. Pojęcie funkcji odwrotnej pojawiło się w kontekście logarytmu naturalnego; teraz czas przeanalizować je dokładniej.

DEFINICJA 6.5. Funkcja f, określona co najmniej na przedziale I, jest *różnowartościowa* na I, jeśli $f(x_1) \neq f(x_2)$ dla wszystkich $x_1, x_2 \in I$ takich, że $x_1 \neq x_2$. *Zbiór wartości* f na I lub *obraz zbioru* I *przez* f to zbiór $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$*. *Funkcja odwrotna* do f to funkcja g zdefiniowana na zbiorze $f(I)$ przez warunek $g(y) = x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in I$ oraz $f(x) = y$. [[rysunek]]

Tradycyjnie funkcja odwrotna oznaczana jest symbolem f^{-1}. Nie należy jednak mylić $f^{-1}(x)$ z $(f(x))^{-1}$.

Punkt (y, x) należy do wykresu funkcji odwrotnej f^{-1} wtedy i tylko wtedy, gdy punkt (x, y) należy do wykresu funkcji f. Oznacza to, że wykres funkcji odwrotnej można uzyskać przez odbicie symetryczne w prostej $y = x$. [[rysunek]]

DEFINICJA 6.6. Funkcje *arcus sinus*, *arcus cosinus* i *arcus tangens* są funkcjami odwrotnymi do funkcji sinus, cosinus i tangens odpowiednio na przedziałach $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[0, \pi]$ oraz $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Funkcje te oznaczane są arcsin, arccos i arctg. [[rysunek]]

Zachodzi zatem

$$\begin{aligned}
\arccos(x) = t \quad & \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \cos(t) = x \text{ oraz } t \in [0, \pi]; \\
\arcsin(y) = t \quad & \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \sin(t) = y \text{ oraz } t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]; \\
\operatorname{arctg}(z) = t \quad & \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \operatorname{tg}(t) = z \text{ oraz } t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).
\end{aligned}$$

Funkcje te (wraz z funkcją *arcus cotangens*, odwrotną do funkcji cotangens na przedziale $(0, \pi)$) nazywane są *funkcjami cyklometrycznymi*. Funkcje arcsin i arccos są określone na przedziale $[-1, 1]$, zaś funkcja arctg na całym zbiorze $\mathbb{R}$. Fakt ten jest intuicyjnie

*W teorii mnogości obraz zbioru przez funkcję często oznaczany jest $f[I]$ lub $f^{\rightarrow}(I)$, aby uniknąć niejednoznaczności w przypadku, gdy argumentami f są zbiory. Tu jednak nie ma takiego ryzyka

jasny, jeśli spojrzy się na wykresy funkcji trygonometrycznych i cyklometrycznych. Formalny dowód wykorzystuje ciągłość funkcji trygonometrycznych i zostanie przedstawiony w ostatniej części tego rozdziału. [[rysunek]]

Przykład. Zachodzi $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2\pi}{3}$.

Niektóre własności funkcji cyklometrycznych są treścią ćwiczeń na liście zadań nr 9.

6.4. **Funkcje elementarne.** Wśród funkcji rzeczywistych wyróżnia się wiele różnych klas. Jedną z nich są funkcje elementarne. Pojęcie to jest nieco umowne, choć bywa niezwykle użyteczne.

DEFINICJA 6.7. *Złożenie* funkcji rzeczywistych f (o dziedzinie $X \subseteq \mathbb{R}$) oraz g (o dziedzinie $Y \subseteq \mathbb{R}$) to funkcja $h = g \circ f$ zadana wzorem $h(x) = g(f(x))$ i określona na zbiorze $\{x \in X : g(x) \in Y\}$.

Jest to nieco ogólniejsza definicja niż ta tradycyjna, która zakłada, że g jest określona co najmniej na zbiorze wartości f. Złożenie nie jest operacją przemienną: jeśli $f(x) = 0$, $g(x) = 1$, to $f \circ g = f$, zaś $g \circ f = g$. Jest to jednak operacja łączna: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, co wynika wprost z definicji:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x).$$

DEFINICJA 6.8. Funkcja f jest funkcją elementarną, jeśli wartość $f(x)$ może zostać zadana wzorem (jednakowym dla wszystkich x z dziedziny f), w którym występują jedynie:

- zmienna x i stałe liczbowe;
- pierwiastki arytmetyczne (i ogólniej pierwiastki wielomianów o zadanych współczynnikach*);
- funkcje exp i ln;
- funkcje trygonometryczne sin, cos, tg, ctg**;
- funkcje cyklometryczne arcsin, arccos, arctg, arcctg†;
- operacje arytmetyczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie.

Formalnie: klasa funkcji elementarnych to najmniejsza rodzina funkcji rzeczywistych, która zwiera wymienione wyżej funkcje i jest zamknięta ze względu na operacje arytmetyczne oraz operację złożenia funkcji.

Funkcjami elementarnymi są więc $|x| = \sqrt{x^2}$, $\max(x, 0) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ itp. Co ciekawe, elementarna jest również funkcja $x - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\pi x + \frac{1}{2}))$, równa $\lfloor x \rfloor$ dla wszystkich niecałkowitych x (i nieokreślona dla całkowitych x). Inne przykłady to $\sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$ (*sinus hiperboliczny*), $\cosh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$ (*cosinus hiperboliczny*), $\operatorname{tgh}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$ (*tangens hiperboliczny*) i funkcje do nich odwrotne (na przedziale $[0, \infty)$ dla cosh). Niektóre własności tych ostatnich są ćwiczeniami na liście zadań nr 10.

*Twierdzenie Abela–Ruffiniego orzeka, że nie wszystkie pierwiastki wielomianów można wyrazić „jawnym wzorem".

**W dziedzinie zespolonej funkcje te wyrażają się przez funkcję exp i dlatego mogą zostać pominięte.

†W dziedzinie zespolonej funkcje te wyrażają się przez funkcję ln i dlatego mogą zostać pominięte.

6.5. **Ciągłość funkcji elementarnych.** Głównym wynikiem niniejszego części jest poniższe twierdzenie o ciągłości funkcji elementarnych.

DEFINICJA 6.9. Mówimy, że funkcja rzeczywista f jest *ciągła*, jeśli dla dowolnego zbieżnego ciągu (x_n) elementów dziedziny f, którego granica x też należy do dziedziny f, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do $f(x)$, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Wkrótce zbadamy pojęcie ciągłości dużo dokładniej. W szczególności udowodnimy równoważność powyższej definicji z tą przedstawioną we wstępie.

TWIERDZENIE 6.10. Funkcje elementarne są ciągłe.

Dowód powyższego twierdzenia składa się z serii wyników pomocniczych, często równie ważnych, co samo twierdzenie.

TWIERDZENIE 6.11. Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Dowód. Jeśli f i g są ciągłe, zaś ciąg (x_n) jest zbieżny do x, to ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do $f(x)$, a więc ciąg $g(f(x_n))$ jest zbieżny do $g(f(x))$. To oznacza zaś ciągłość $g \circ f$. Milcząco zakładamy tu, że x_n oraz x należą do dziedziny $g \circ f$ (a więc: x_n oraz x należą do dziedziny f, zaś $f(x_n)$ i $f(x)$ należą do dziedziny g). □

TWIERDZENIE 6.12. Jeśli f i g są funkcjami ciągłymi, to $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ oraz $\frac{f}{g}$ są funkcjami ciągłymi w t.

Dowód. Teza wynika wprost z definicji ciągłości i twierdzenia o arytmetyce granic: jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, to $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$, a więc $\lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = f(x)+g(x)$ itp. □

Funkcja stała jest ciągła. Podobnie funkcja f dana wzorem $f(x) = x$ jest ciągła. Ciągłość funkcji wykładniczej i logarytmicznej została udowodniona w twierdzeniach 4.6 i 4.11. Konsekwencją tych wyników jest ciągłość pierwiastków arytmetycznych.

TWIERDZENIE 6.13. Jeśli $n \in \mathbb{N}$ oraz $f(x) = \sqrt[n]{x}$, to f jest funkcją ciągłą (o dziedzinie $\mathbb{R}$ gdy n jest nieparzyste oraz o dziedzinie $[0,\infty)$ w przeciwnym przypadku).

Dowód. Jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ oraz $x_n \geqslant 0$ (od pewnego miejsca), to równość $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n)^{1/n} = x^{1/n} = f(x)$ wynika z twierdzeń o potęgowaniu granic. Jeśli n jest nieparzyste, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ oraz $x_n \leqslant 0$ (od pewnego miejsca), to równość $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (-(-x_n)^{1/n}) = -(-x)^{1/n} = f(x)$ wynika w ten sam sposób. Pozostaje do rozważenia przypadek, gdy $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ i x_n zmienia znak niesończenie wiele razy. Wtedy jednak $-f(|x_n|) \leqslant f(x_n) \leqslant f(|x_n|)$ oraz $\lim_{n\to\infty} f(|x_n|) = 0$ na mocy już rozważonego przypadku. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. □

Ciągłość pierwiastków wielomianów (jako funkcji współczynników) jest dużo trudniejszym zagadnieniem — wymaga w szczególności znajomości zasadniczego twierdzenia algebry, gwarantującego istnienie pierwiastka zespolonego dowolnego wielomianu. Temat ten nie jest też dla nas szczególnie istotny, dlatego zostanie pominięty.

Do wykazania pozostaje ciągłość funkcji trygonometrycznych i cyklometrycznych. Przy przyjętej przez nas geometrycznej definicji tych funkcji podanej wcześniej jest to być może zbyteczne (bowiem fakt ten wynika z postulatów geometrii). Przedstawiony poniżej dowód dobrze jednak ilustruje techniki stosowane w rachunku różniczkowym i całkowym.

LEMAT 6.14. Zachodzi $|\sin(x)| \leqslant |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Dowód. Skoro $0 < \sin(x) < x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ oraz $\sin(-x) = -\sin(x)$, zachodzi $|\sin(x)| = \sin(|x|) \leqslant |x|$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ponadto $|\sin(x)| \leqslant 1$, zatem $|\sin(x)| \leqslant |x|$ gdy $|x| \geqslant 1$. Pozostaje zauważyć, że $\frac{\pi}{2} > 1$ (przez porównanie pola koła i pola wpisanego weń kwadratu). [[rysunek]] □

TWIERDZENIE 6.15. Funkcje trygonometryczne są ciągłe.

Dowód. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, to $|\sin(x_n)| \leqslant |x_n|$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(x_n) = 0$ na mocy twierdzenia o trzech ciągach.

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, to (na mocy jednego z ćwiczeń na liście zadań nr 9)

$$\sin(x_n) - \sin(x) = 2\cos(\tfrac{1}{2}(x_n + x))\sin(\tfrac{1}{2}(x_n - x)).$$

Skoro $|\cos(\frac{1}{2}(x_n + x))| \leqslant 1$, zachodzi $|\sin(x_n) - \sin(x)| \leqslant 2|\sin(\frac{1}{2}(x_n - x))|$. Na mocy pierwszej części dowodu i twierdzenia o trzech ciągach, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(x_n) = \sin(x)$.

Ciągłość funkcji cos wynika ze wzoru $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, ciągłości funkcji danej wzorem $\frac{\pi}{2} - x$ i ciągłości złożenia funkcji. Ciągłość funkcji tg i ctg wynika z ciągłości ilorazu. □

Ciągłość funkcji cyklometrycznych wynika z następującego ogólnego wyniku.

TWIERDZENIE 6.16. Niech I będzie przedziałem oraz niech $f : I \to \mathbb{R}$ będzie ściśle monotoniczną funkcją ciągłą. Wówczas:

(a) zbiór wartości funkcji f, czyli $J = \{f(x) : x \in I\}$, też jest przedziałem;
(b) funkcja odwrotna do f jest również ściśle monotoniczną funkcją ciągłą.

Dowód. Przypuśćmy, że f jest ściśle rosnąca. Dowód dla funkcji ściśle malejących jest analogiczny.

Gdyby zbiór J nie był przedziałem, istniałyby trzy liczby y_1, y_2, y_3 takie, że $y_1 < y_2 < y_3$ oraz $y_1, y_3 \in J$, lecz $y_2 \notin J$. Zachodzi więc $y_1 = f(x_1)$ oraz $y_3 = f(x_3)$ dla pewnych $x_1, x_3 \in I$. Rozważmy zbiór

$$A = \{x \in I : f(x) < y_2\}.$$

Wtedy A jest niepusty, bo $x_1 \in A$, oraz A jest ograniczony z góry przez x_3: jeśli $x > x_3$, to $f(x) > f(x_3) = y_3 > y_2$, zatem $x \notin A$. Niech $x_2 = \sup A$. Oczywiście $x_1 \leqslant x_2 < x_3$, zatem $x_2 \in I$. Twierdzimy, że $f(x_2) = y_2$.

Od pewnego miejsca zachodzi $x_2 + \frac{1}{n} < x_3$, a więc $x_2 + \frac{1}{n} \in I$. Skoro $x_2 + \frac{1}{n} \notin A$, zachodzi $f(x_2 + \frac{1}{n}) \geqslant y_2$. Z ciągłości f otrzymujemy

$$f(x_2) = \lim_{n\to\infty} f(x_2 + \tfrac{1}{n}) \geqslant y_2.$$

Skoro $f(x_1) = y_1 < y_2$, otrzymujemy $x_1 < x_2$ i wobec tego $x_2 - \frac{1}{n} \in I$ od pewnego miejsca. Ponadto $f(x_2 - \frac{1}{n}) < y_2$ (w przeciwnym razie liczba $x_2 - \frac{1}{n}$ byłaby ograniczeniem z góry zbioru A), a więc

$$f(x_2) = \lim_{n\to\infty} f(x_2 - \tfrac{1}{n}) \leqslant y_2.$$

Ostatecznie $f(x_2) = y_2$, wbrew założeniu. Udowodniliśmy więc, że J jest przedziałem.

Funkcja odwrotna jest oczywiście ściśle rosnąca: warunki $x_1 < x_2$ oraz $f(x_1) < f(x_2)$ są równoważne, a więc i warunki $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ oraz $y_1 < y_2$ są równoważne. Pozostaje wykazać ciągłość f^{-1}.

Przypuśćmy, że $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ oraz y_n i y należą do J, tzn. $y_n = f(x_n)$ oraz $y = f(x)$ dla pewnych x_n oraz x ze zbioru I. Przypuśćmy, że x jest punktem wewnętrznym zbioru I i rozważmy $\varepsilon > 0$ tak mały, by $x - \varepsilon$ oraz $x + \varepsilon$ należały do I. Wtedy istnieje N takie, że dla $n > N$ zachodzi

$$|y_n - y| < \min\{f(x+\varepsilon) - f(x), f(x) - f(x-\varepsilon)\},$$

więc w szczególności

$$-(f(x) - f(x-\varepsilon)) < y_n - y < f(x+\varepsilon) - f(x).$$

Skoro jednak $y_n = f(x_n)$ i $y = f(x)$, otrzymujemy

$$f(x-\varepsilon) < f(x_n) < f(x+\varepsilon).$$

Funkcja f jest jednak rosnąca, a więc ostatecznie $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, czyli $|x_n - x| < \varepsilon$. Dowodzi to zbieżności (x_n) do x, czyli zbieżności $(f^{-1}(y_n))$ do $f^{-1}(y)$. □

Powyższe twierdzenie stosuje się do funkcji cyklometrycznych. Oprócz ciągłości tych funkcji uzyskujemy więc dowód poprawności definicji funkcji cyklometrycznych (wspomniany we wcześniejszej części rozdziału).

WNIOSEK 6.17. Funkcje cyklometryczne są ciągłe. □

Dowód twierdzenia 6.10. Teza wynika wprost z kilku twierdzeń udowodnionych powyżej. □

Co ciekawe, powyższe twierdzenie oznacza nieelementarność funkcji danych wzorami $\lfloor t \rfloor$, $\operatorname{sign}(t)$ itp.; funkcje te są bowiem nieciągłe. Jest to zaskakujące w kontekście równości $\operatorname{sign}(t) = t/\sqrt{t^2}$ dla $t \neq 0$, $\lfloor t \rfloor = t - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\pi(t + \frac{1}{2})))$ gdy $t \notin \mathbb{Z}$.

7. Granice funkcji i funkcje ciągłe

7.1. **Granice funkcji.** W poprzednim rozdziale wprowadziliśmy pojęcie funkcji ciągłej: mówiąc nieformalnie, funkcje ciągłe przeprowadzają ciągi zbieżne w ciągi zbieżne; zaś formalniej: funkcja f nazywana jest ciągłą, jeśli ze zbieżności ciągu (x_n) do x wynika zbieżność ciągu $(f(x_n))$ do $f(x)$. Potrzebne jest nam dokładniejsze pojęcie ciągłości funkcji w wybranym punkcie.

> Definicja 7.1 (definicja Heinego ciągłości funkcji). Jeśli a należy do dziedziny funkcji f, to f jest *ciągła w punkcie* a jeśli dla dowolnego ciągu (x_n) zbieżnego do a, o wyrazach z dziedziny f, zachodzi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Funkcja jest więc ciągła, jeśli jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny. Pojęcie ciągłości ma fundamentalne znaczenie w analizie matematycznej i wiąże się ściśle z pojęciem granicy funkcji w punkcie.

> Definicja 7.2. Liczba a jest *punktem skupienia* zbioru A, jeśli istnieje ciąg (x_n) o wyrazach ze zbioru $A \setminus \{a\}$ zbieżny do a.

Łatwo sprawdzić, że powyższa definicja jest równoważna tej podanej przy okazji definicji pochodnej zbioru. Podkreślmy, że punkt skupienia może należeć do zbioru A lub nie, zaś dodanie lub usunięcie liczby a ze zbioru A nie ma wpływu na to, czy a jest punktem skupienia tego zbioru.

> Definicja 7.3 (definicja Heinego granicy funkcji). Jeśli a jest punktem skupienia dziedziny funkcji f oraz $b \in \mathbb{R}$, to liczba b jest *granicą funkcji f w punkcie a*, jeśli dla dowolnego ciągu (x_n) zbieżnego do a, o wyrazach z dziedziny f i różnych od a, zachodzi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Fakt ten zapisujemy w postaci
>
> $$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

W powyższej definicji liczba a może należeć do dziedziny funkcji f lub nie. Dodatkowo jeśli a należy do dziedziny f, to $f(a)$ nie musi być równe b.

Przykład. Zachodzi

$$\lim_{x\to 0^+} |\operatorname{sign}(x)| = 1.$$

W istocie, jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ oraz $x_n \neq 0$, to $|\operatorname{sign}(x_n)| = 1$, zatem $\lim_{n\to\infty} |\operatorname{sign}(x_n)| = 1$. Zauważmy, że $|\operatorname{sign}(0)| = 0$. Oznacza to, że funkcja określona wzorem $|\operatorname{sign}(x)|$ nie jest ciągła w punkcie 0.

Przykład. Granica

$$\lim_{x\to 0^+} \lfloor x \rfloor$$

nie istnieje. W istocie, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} (-\frac{1}{n}) = 0$ oraz $\frac{1}{n} \neq 0$, $-\frac{1}{n} \neq 0$, lecz $\lim_{n\to\infty} \lfloor \frac{1}{n} \rfloor = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$, zaś $\lim_{n\to\infty} \lfloor -\frac{1}{n} \rfloor = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1$, zatem omawiana granica musiałaby być równa jednocześnie 0 i -1.

Niemal oczywiste jest twierdzenie opisujące związek między ciągłością i granicą funkcji.

TWIERDZENIE 7.4. Jeśli a należy do dziedziny funkcji f i jednocześnie jest punktem skupienia dziedziny f, to funkcja f jest ciągła w a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Dowód. Jeśli f jest ciągła a, to warunek z definicji granicy funkcji (dla $b = f(a)$) spełniony jest nawet dla większej klasy ciągów (x_n), niekoniecznie o wyrazach różnych od a.

Przypuśćmy teraz, że $f(a)$ jest granicą funkcji f w punkcie a i niech ciąg (x_n) będzie zbieżny do a. Jeśli od pewnego miejsca $x_n = a$, to oczywiście $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. W przeciwnym razie rozważmy podciąg (x_{k_n}) złożony ze wszystkich wyrazów ciągu (x_n) różnych od a. Oczywiście ciąg (x_{k_n}) jest zbieżny do a, a więc (na mocy definicji granicy funkcji) ciąg $(f(x_{k_n}))$ jest zbieżny do $f(a)$. Oznacza to, że ciąg $(f(x_n))$ również jest zbieżny do $f(a)$. W istocie: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|f(x_{k_n}) - f(a)| < \varepsilon$ dla $n > N$. Jeśli więc $m > k_N$, to albo $m = k_n$ dla pewnego $n > N$ i wtedy $|f(x_m) - f(a)| = |f(x_{k_n}) - f(a)| < \varepsilon$, albo $x_m = a$ i wtedy $|f(x_n) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. Udowodniliśmy zatem ciągłość funkcji f w punkcie a. □

W poprzednim rozdziale udowodniliśmy różne własności funkcji ciągłych. Dokładnie te same dowody prowadzą do analogicznych rezultatów dla granic funkcji. Niektóre z poniższych twierdzeń pozostawiamy zatem bez szczegółowego dowodu.

TWIERDZENIE 7.5. Przypuśćmy, że f i g są funkcjami rzeczywistymi, których granice w punkcie a wynoszą odpowiednio b i c oraz że a jest punktem skupienia wspólnej części dziedzin f i g. Wówczas zachodzą równości

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = b+c, \qquad \lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = b-c,$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = bc, \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c},$$

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = b^c,$$

przy czym w przypadku ilorazu należy założyć, że $c \neq 0$, zaś w przypadku potęgowania potrzebny jest warunek $b > 0$. □

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to 1} x = 1$ (wprost z definicji), zatem $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-8}{x^2-x-2} = \frac{1^3-8}{1^2-1-2} = \frac{7}{3}$.

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+1} = \frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+1} = 4$.

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$.

Druga część poniższego twierdzenia nosi nazwę *twierdzenia o składaniu granic.*

TWIERDZENIE 7.6. Przypuśćmy, że a jest punktem skupienia dziedziny złożenia $g \circ f$ funkcji rzeczywistych f i g.

(a) Jeśli $\lim_{x\to a} f(x) = b$ i g jest ciągła w b, to $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$.

(b) Jeśli $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{y\to b} g(y) = c$ oraz istnieje $\delta_0 > 0$ takie, że $f(x) \neq b$ gdy $|x-a| < \delta_0$ i $x \neq a$, to $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Dowód. Pierwsza część ma dowód taki sam, jak w przypadku twierdzenia o ciągłości złożenia funkcji. Dowód drugiej części wymaga tylko następującego uzupełnienia: jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$, to $|x_n - a| < \delta_0$ od pewnego miejsca i wobec tego $f(x_n) \neq b$ od pewnego miejsca. Można więc stosować warunek z definicji granicy funkcji g dla ciągu $(f(x_n))$. □

Wniosek 7.7. Zachodzą wzory na podstawienie:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{t\to a} f(t-a),$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{t\to 0} f(-t),$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{t\to a/c} f(ct)$$

(w ostatnim wzorze należy założyć, że $c \neq 0$). □

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-x-2} = \lim_{t\to 0} \frac{(t+2)^3-8}{(t+2)^2-(t+2)-2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3+6t^2+12t}{t^2+3t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2+6t+12}{t+3} = 4.$

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{t\to 2} \frac{t-2}{t^2-4} = \lim_{t\to 2} \frac{1}{t+2} = \frac{1}{4}.$

Kolejne twierdzenie jest w pewnym sensie oczywiste.

Twierdzenie 7.8. Jeśli istnieje $\delta_0 > 0$ taka, że $f(x) = g(x)$ gdy $|x - a| < \delta_0$ oraz $x \neq a$, to $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$; w szczególności oznacza to, że jeśli jedna z granic istnieje, to istnieje też druga.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że jeśli ciąg (x_n) spełnia warunek z definicji granicy funkcji, to $f(x_n) = g(x_n)$ od pewnego miejsca. □

Poniższy rezultat nosi nazwę *twierdzenia o trzech funkcjach.*

Twierdzenie 7.9. Jeśli $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ dla x z dziedziny g oraz granice $\lim_{x\to a} f(x)$ oraz $\lim_{x\to a} h(x)$ istnieją i są równe, to istnieje granica $\lim_{x\to a} g(x)$ i jest równa pozostałym dwóm granicom.

Dowód. Teza wynika wprost z definicji granicy funkcji i twierdzenia o trzech ciągach: jeśli (x_n) jest zbieżny do a, ma wartości z dziedziny g i $x_n \neq a$, to $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} h(x_n)$, oraz $f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n)$, zatem granica $\lim_{n\to\infty} g(x_n)$ istnieje i jest równa wszystkim pozostałym granicom. □

Na koniec wyznaczymy jedną z najważniejszych granic w rachunku różniczkowym.

Twierdzenie 7.10. Zachodzi $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$

Dowód. Dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ zachodzi $\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x)$, zatem $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$. Ta sama nierówność zachodzi dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, bowiem wszystkie trzy wyrażenia są funkcjami parzystymi. Teza wynika z twierdzenia o trzech funkcjach oraz ciągłości cos. □

7.2. **Granice niewłaściwe funkcji.** Definicja granicy funkcji rozszerza się w naturalny sposób do granic niewłaściwych, gdy argumenty lub wartości dążą do plus lub minus nieskończoności. Odpowiednie oznaczenia, takie jak

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

nie budzą wątpliwości, z jednym wyjątkiem: granica niewłaściwa funkcji gdy argument dąży do nieskończoności może być pomylona z granicą ciągu. Stosuje się dość nieprecyzyjną konwencję związaną z tradycyjnymi oznaczeniami liczb naturalnych i rzeczywistych: napis

$$\lim_{k\to\infty} \sin(\pi k)$$

oznacza granicę ciągu (i wobec tego granica ta istnieje i jest równa 0), zaś analogiczny napis

$$\lim_{x\to\infty} \sin(\pi x)$$

dotyczy granicy funkcji o argumentach rzeczywistych (i granica ta oczywiście nie istnieje, co łatwo zauważyć, rozpatrując ciąg dany wzorem $x_n = n+\frac{1}{2}$; wówczas $\sin(\pi x_n) = (-1)^n$). Twierdzenia dotyczące artymetyki i potęgowania właściwych i niewłaściwych granic ciągów znów mają swoje odpowiedniki dotyczące granic funkcji. Ścisłe sformułowanie takiego wyniku jest dość żmudne, dlatego ograniczymy się do nieformalnego stwierdzenia.

> Twierdzenie 7.11. Prawdziwe są twierdzenia o arytmetyce i potęgowaniu właściwych i niewłaściwych granic funkcji, analogiczne do odpowiednich twierdzeń dotyczących granic ciągów. □

> Twierdzenie 7.12. Twierdzenie o złożeniu granic funkcji zachodzi również dla niewłaściwych granic funkcji. □

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to\infty} x = \infty$, zatem $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ (bowiem $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ oraz $x^2 > 0$ dla $x \neq 0$).

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$, podobnie jak w poprzednim przykładzie. Podkreślmy, że rozważamy tu wyłącznie dodatnie wartości x.

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1+1/x)^2}{1+1/x^2} = 1$.

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \exp(-x) = 0$, $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$: wszystkie te własności są konsekwencją definicji Heinego i odpowiednich twierdzeń dla granic ciągów.

7.3. **Granice jednostronne funkcji.** Wprowadzając inną modyfikację w definicji ciągłości lub granicy funkcji, uzyskuje się pojęcie jednostronnej ciągłości oraz granic jednostronnych.

> Definicja 7.13. Jeśli a należy do dziedziny funkcji f, to f jest *prawostronnie ciągła w punkcie* a jeśli dla dowolnego ciągu (x_n) zbieżnego do a, o wyrazach z dziedziny f i takiego, że $x_n \geqslant a$, zachodzi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Analogicznie f jest *lewostronnie ciągła w punkcie* a, jeśli spełniony jest analogiczny warunek z nierównością $x_n \leqslant a$.

DEFINICJA 7.14. Liczba a jest *prawostronnym punktem skupienia* zbioru A, jeśli istnieje ciąg (x_n) zbieżny do a, o wyrazach ze zbioru A i większych od a. Analogicznie definiuje się *lewostronny punkt skupienia* zbioru A.

DEFINICJA 7.15. Jeśli a jest prawostronnym punktem skupienia dziedziny funkcji f oraz $b \in \mathbb{R}$, to liczba b jest *prawostronną granicą funkcji f w punkcie a*, jeśli dla dowolnego ciągu (x_n) zbieżnego do a, o wyrazach z dziedziny f i większych od a, zachodzi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Fakt ten zapisujemy w postaci

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b.$$

Jeśli a jest lewostronnym punktem skupienia zbioru A, to analogicznie definiuje się *lewostronną granicę funkcji f w punkcie a*, oznaczaną symbolem

$$\lim_{x\to a^-} f(x).$$

Tak jak poprzednio, ciągłość jednostronna i granica jednostronna są ze sobą blisko związane; dowód jest identyczny, więc zostaje pominięty.

TWIERDZENIE 7.16. Jeśli a należy do dziedziny funkcji f i jednocześnie jest prawostronnym punktem skupienia dziedziny f, to funkcja f jest prawostronnie ciągła w a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Analogiczny rezultat ma miejsce dla granicy i ciągłości lewostronnych.

Ciągłość jednostronna i granice jednostronne mają zaskakująco dużo zastosowań. Jedno z nich to obliczanie niektórych granic lub dowodzenie ich nieistnienia.

TWIERDZENIE 7.17.
(a) Jeśli a jest obustronnym punktem skupienia dziedziny funkcji f, to $\lim_{x\to a} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy obie granice jednostronne $\lim_{x\to a^+} f(x)$ oraz $\lim_{x\to a^-} f(x)$ istnieją i mają jednakową wartość (równą wartości $\lim_{x\to a} f(x)$);
(b) funkcja f jest ciągła w punkcie a swojej dziedziny wtedy i tylko wtedy, gdy jest w a lewostronnie i prawostronnie ciągła;
(c) jeśli a należy do dziedziny f i jest obustronnym punktem skupienia dziedziny funkcji f, to f jest ciągła w a wtedy i tylko wtedy, gdy obie granice jednostronne $\lim_{x\to a^+} f(x)$ oraz $\lim_{x\to a^-} f(x)$ istnieją i są równe $f(a)$.

Dowód. Jeśli b jest granicą funkcji f w punkcie a, to oczywiście jest też granicą lewostronną i prawostronną tej funkcji w punkcie a.

Przypuśćmy zatem, że b jest granicą lewostronną i prawostronną f w a i rozważmy ciąg (x_n) zbieżny do a i o wyrazach różnych od a. Niech (x_{k_n}) oraz (x_{l_n}) będą podciągami złożonymi odpowiednio ze wszystkich wyrazów większych od a i wszystkich wyrazów mniejszych od a. Na mocy założenia ciągi $(f(x_{k_n}))$ oraz $(f(x_{l_n}))$ są zbieżne do b. Oznacza to, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|f(x_{k_n}) - b| < \varepsilon$ oraz $|f(x_{l_n}) - b| < \varepsilon$

gdy $n > N$. Jeśli więc $m > \max\{k_N, l_N\}$, to albo $m = k_n$ dla pewnego $n > N$, albo $m = l_n$ dla pewnego $n > N$. W obu przypadkach $|f(x_m) - b| < \varepsilon$, co oznacza zbieżność $(f(x_m))$ do b i w konsekwencji równość $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Druga i trzecia część twierdzenia są wnioskami z pierwszej oraz związku ciągłości z granicą. □

Twierdzenia dotyczące arytmetyki i potęgowania granic czy też twierdzenie o trzech funkcjach (oraz wiele innych twierdzeń) mają swoje odpowiedniki dotyczące granic jednostronnych i ciągłości jednostronnej w punkcie; dowody nie wymagają istotnych zmian. Niewielka modyfikacja jest potrzebna w sformułowaniu twierdzenia o złożeniu granic (dowód zaś pozostaje niemal taki sam).

TWIERDZENIE 7.18. (a) Jeśli $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{y\to b^+} g(y) = c$ oraz istnieje $\delta_0 > 0$ takie, że $f(x) > b$ gdy $|x - a| < \delta_0$ i $x \neq a$, to $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

(b) Jeśli $\lim_{x\to a} f(s) = b$, $\lim_{y\to b^-} g(y) = c$ oraz istnieje $\delta_0 > 0$ takie, że $f(x) < b$ gdy $|x - a| < \delta_0$ i $x \neq a$, to $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

W obu częściach granice $\lim_{x\to a}$ można zastąpić granicami jednostronnymi $\lim_{x\to a^-}$ lub $\lim_{x\to a^+}$, gdy nierówność $f(x) > b$ lub $f(x) < b$ zachodzi odpowiednio gdy $a - \delta_0 < x < a$ lub gdy $a < x < a + \delta_0$. □

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, $\lim_{y\to 0^+} e^{-1/y} = 0$ i $x^2 > 0$ dla $x \neq 0$, zatem $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$.

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{t\to 0^+} f(a - t)$.

Kolejne twierdzenie jest po prostu wersją udowodnionego wyżej wyniku dla granic jednostronnych, ale jest bardzo wygodne w zastosowaniach.

TWIERDZENIE 7.19. Jeśli istnieje $\delta_0 > 0$ taka, że $f(x) = g(x)$ gdy $a < x < a + \delta_0$, to $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x)$; w szczególności jeśli jedna z granic istnieje, to istnieje też druga. Prawdziwy jest analogiczny wynik dla granic lewostronnych. □

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sign}(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$ oraz $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sign}(x) = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$.

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to 2^+} \lceil x \rceil = \lim_{x\to 2^+} 3 = 3$ (bo $\lceil x \rceil = 3$ dla $x \in (2, 2 + \delta_0)$ gdy $\delta_0 = 1$) oraz analogicznie $\lim_{x\to 2^-} \lceil x \rceil = \lim_{x\to 2^-} 2 = 2$.

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to 0^+} \exp(\frac{1}{x}) = \infty$ (bo $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ i $\lim_{y\to\infty} \exp(y) = \infty$) oraz analogicznie $\lim_{x\to 0^-} \exp(\frac{1}{x}) = 0$.

Poniższy przykład to druga z najważniejszych granic w rachunku różniczkowym i całkowym.

TWIERDZENIE 7.20. Zachodzi $\lim_{x\to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

Dowód. Dla $x < 1$, $x \neq 0$, zachodzi $1 + x \leqslant \exp(x) \leqslant 1/(1-x)$, skąd

$$1 \leqslant \frac{\exp(x)-1}{x} \leqslant \frac{1}{1-x} \qquad \text{gdy } 0 < x < 1,$$
$$1 \geqslant \frac{\exp(x)-1}{x} \leqslant \frac{1}{1-x} \qquad \text{gdy } -1 < x < 0.$$

Teza wynika z twierdzenia o trzech funkcjach zastosowanego do granic jednostronnych i twierdzenia o związku między granicami jednostronnymi i granicą obustronną. □

7.4. **Definicje Cauchy'ego.** Granica funkcji może być równoważnie zdefiniowana w sposób przypominający definicję granicy ciągu — jest to tzw. definicja Cauchy'ego granicy funkcji, nazywana czasem epsilonowo-deltową.

TWIERDZENIE 7.21 (o równoważności definicji Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji). Jeśli a jest punktem skupienia dziedziny f i $b \in \mathbb{R}$, to następujące warunki są równoważne:

(a) liczba b jest granicą funkcji f w punkcie a;
(b) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ o następującej własności:

jeśli x jest w dziedzinie f, $x \neq a$ oraz $|x-a| < \delta$, to $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Dowód. Przypuśćmy, że spełniony jest warunek z definicji Cauchy'ego granicy funkcji oraz że (x_n) jest ciągiem spełniającym warunki definicji Heinego granicy funkcji. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $\delta > 0$ będzie dobrana zgodnie z definicją Cauchy'ego granicy funkcji. Ze zbieżności (x_n) do a wynika, że istnieje N takie, że gdy $n > N$, to $|x_n - a| < \delta$. Ponieważ $x_n \neq a$, oznacza to, że $|f(x_n) - b| < \varepsilon$. Wobec tego $(f(x_n))$ jest zbieżny do b, a więc spełniony jest warunek z definicji Heinego granicy funkcji.

Przypuśćmy teraz, że warunek z definicji Cauchy'ego granicy funkcji nie jest spełniony. Oznacza to, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ spełniony jest następujący warunek: dla każdej liczby $\delta > 0$ istnieje liczba x w dziedzinie f taka, że $|x-a| < \delta$, $x \neq a$, lecz $|f(x)-b| \geqslant \varepsilon$. Niech x_n oznacza taką liczbę x dobraną do $\delta = \frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (bowiem $|x_n - t| < \frac{1}{n}$), lecz skoro $|f(x_n)-b| \geqslant \varepsilon$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, granica $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ z pewnością nie jest równa b (o ile w ogóle istnieje). To dowodzi, że również warunek z definicji Heinego granicy funkcji nie jest spełniony. □

Definicja Cauchy'ego jest często trudniejsza do zastosowania niż definicja Heinego, jest jednak bardziej naturalna. Obie definicje można rozważać ogólniejszym kontekście (więcej o tym na kursie z topologii).

Definicję Cauchy'ego można odpowiednio zmodyfikować w przypadku gdy rozważane są granice niewłaściwe lub jednostronne. Na przykład:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ jeśli dla dowolnego M istnieje $\delta > 0$ taka, że z warunku $|x-a| < \delta$, $x \neq a$, wynika warunek $f(x) > M$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że z warunku $x < N$ wynika warunek $|f(x) - b| < \varepsilon$;
- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$ jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że z warunku $a - \delta < x < a$ wynika warunek $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Pozostałe warianty są analogiczne.

Wiemy już, że ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest podstawowy. Podobne twierdznie zachodzi dla granicy funkcji.

TWIERDZENIE 7.22 (warunek Cauchy'ego istnienia granicy funkcji). Jeśli a jest punktem skupienia dziedziny f, to następujące warunki są równoważne:

(a) funkcja f ma granicę w punkcie a;

(b) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ o następującej własności:

$$\text{jeśli } x_1, x_2 \text{ są w dziedzinie } f,\ x_1 \neq a,\ x_2 \neq a$$
$$\text{oraz } |x_1 - a| < \delta,\ |x_2 - a| < \delta, \text{ to } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Drugi warunek nosi nazwę *warunku Cauchy'ego istnienia granicy funkcji.*

Dowód. Jeśli f ma granicę równą b w punkcie a, do dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla wszystkich x w dziedznie f takich, że $x \neq a$ oraz $|x-a| < \delta$ zachodzi $|f(x)-b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Stąd dla x_1 i x_2 jak w twierdzeniu zachodzi $|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant |f(x_1)-b|+|b-f(x_2)| < \varepsilon$.

Przypuśćmy teraz, że spełniony jest drugi warunek. Ustalmy dowolny zbieży do a ciąg (x_n) o wyrazach w dziedzinie f i różnych od a. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $\delta > 0$ będzie dobrana zgodnie z drugim warunkiem. Istnieje wówczas N takie, że jeśli $n > N$, to $|x_n - a| < \delta$. Wobec tego dla $n, m > N$ zachodzi $|f(x_n)-f(x_m)| < \varepsilon$. Wobec dowolności $\varepsilon > 0$, oznacza to, że ciąg $(f(x_n))$ jest podstawowy. Ciąg ten ma więc granicę; oznaczmy ją przez b.

Niech $\varepsilon > 0$, niech $\delta > 0$ będzie dobrana zgodnie z drugim warunkiem dla liczby $\frac{\varepsilon}{2}$ zamiast ε, niech wreszcie N będzie takie, że $|x_n - a| < \frac{\delta}{2}$ oraz $|f(x_n) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla $n > N$. Przypuśćmy, że x jest w dziedzinie f, $x \neq a$ oraz $|x - a| < \frac{\delta}{2}$. Ustalmy dowolne $n > N$. Wówczas $|x_n - a| < \frac{\delta}{2}$, skąd $|x - x_n| < \delta$, a więc $|f(x) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ponadto $|f(x_n) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla $n > N$. Ostatecznie otrzymujemy $|f(x) - b| < \varepsilon$. Dowodzi to, że b jest granicą funkcji f w punkcie a. □

Podobnie jak poprzednie, powyższe twierdzenie ma swój odpowiednik dla granic jednostronnych, a także granic w ∞ i $-\infty$; szczegóły pomijamy.

7.5. **Asymptoty funkcji.** Mówiąc nieformalnie, *asymptotę* funkcji f nazywamy dowolną prostą na płaszczyźnie, do której dokleja się wykres funkcji f. Wyróżnia się trzy rodzaje asymptot, opisujące różne zachowania funkcji w punkcie lub w plus i minus nieskończoności.

DEFINICJA 7.23. Jeśli a jest punktem skupienia dziedziny funkcji f z odpowiedniej strony, to

(a) f ma *prawostronną asymptotę pionową* $x = a$, jeśli $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ lub $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$;

(b) f ma *lewostronną asymptotę pionową* $x = a$, jeśli $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$ lub $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$;

(c) f ma *obustronną asymptotę pionową* $x = a$, jeśli ma w a lewostronną i prawostronną asymptotę pionową.

DEFINICJA 7.24. Jeśli dziedzina funkcji f jest nieograniczona z góry, to

(a) f ma w ∞ *asymptotę poziomą* $y = b$, jeśli $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$;

(b) f ma w ∞ *asymptotę ukośną* $y = ax + b$, jeśli $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax - b) = 0$.

Analogicznie definiuje się asymptoty w $-\infty$.

TWIERDZENIE 7.25. Jeśli dziedzina funkcji f jest nieograniczona z góry, to f ma w ∞ asymptotę ukośną o równaniu $ax + b$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice wyznaczające współczynniki a i b:

$$a = \lim_{x\to\infty} \tfrac{f(x)}{x}, \qquad\qquad b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax).$$

Analogiczny wynik zachodzi dla asymptot w $-\infty$.

Dowód. Jeśli istnieje druga z omawianych granic, to z definicji f ma asymptotę ukośną żądanej postaci. Jeśli zaś $ax + b$ określa asymptotę ukośną f w ∞, to

$$\lim_{x\to\infty} \tfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}(\tfrac{f(x)-ax-b}{x} + a + \tfrac{b}{x}) = 0 + a + 0 = a$$

i oczywiście $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b$. □

Wkrótce zobaczymy, że funkcje elementarne (i ogólniej funkcje ciągłe) mogą mieć asymptoty pionowe wyłącznie w punktach spoza dziedziny, które są punktami skupienia dziedziny.

Przykład. Funkcja $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, o dziedzinie $[0,1)\cup(1,\infty)$, ma obustronną asymptotę pionową $x = 1$, bowiem $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ oraz $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$. Zgodnie z uwagą poczynioną powyżej, funkcja ta nie może mieć innych asymptot pionowych. Funkcja ta ma też asymptotę poziomą $y = 1$: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Przykład. Funkcja $f(x) = e^{1/x}$, o dziedzinie $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, ma asymptoty poziome $y = 1$ (w ∞ i w $-\infty$) oraz asymptotę pionową prawostronną $x = 0$, bowiem $\lim_{x\to0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

Przykład. Funkcja $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ ma asymptoty poziome $y = \frac{\pi}{2}$ (w ∞) i $y = -\frac{\pi}{2}$ (w $-\infty$); jest to treść ćwiczenia na liście zadań nr 11.

Przykład. Funkcja $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ ma asymptoty ukośne $y = x + \frac{1}{2}$ (w ∞) oraz $y = -x - \frac{1}{2}$ (w $-\infty$), zachodzi bowiem

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\sqrt{x^2+x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1} - x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \tfrac{1}{2}$$

i podobnie

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\sqrt{x^2+x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{1+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}})=-1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}=-\tfrac{1}{2}.$$

7.6. **Funkcje ciągłe.** Wiemy już, że funkcja jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$ (pod warunkiem, że a jest jednocześnie elementem dziedziny funkcji f i jej punktem skupienia). Znamy też analogiczne twierdzenia o ciągłości i granicach jednostronnych. Poznaliśmy też równoważną epsilonowo-deltową definicję granic i granic jednostronnych, nazywaną definicją Cauchy'ego. Poniżej formułujemy analogiczne definicje Cauchy'ego ciągłości. Dowód jest łatwy, ale warto go przytoczyć ze szczegółami (w przyszłości wiele podobnych dowodów będzie pomijanych).

TWIERDZENIE 7.26 (o równoważności definicji Heinego i Cauchy'ego ciągłości funkcji). Jeśli a jest elementem dziedziny funkcji f, to następujące warunki są równoważne:

(a) funkcja f jest ciągła w punkcie a;

(b) dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje $\delta>0$ o następującej własności:

$$\text{jeśli } x \text{ jest w dziedzinie } f \text{ oraz } |x-a|<\delta, \text{ to } |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla ciągłości prawostronnej i lewostronnej funkcji f w punkcie a, jeśli zastąpimy warunek $|x-a|<\delta$ warunkiem $a\leqslant x<a+\delta$ (dla ciągłości prawostronnej) lub $a-\delta<x\leqslant a$ (dla ciągłości lewostronnej).

Dowód. Jeśli a nie jest punktem skupienia dziedziny funkcji f, to oba warunki są spełnione. Przypuśćmy więc, że a jest punktem skupienia dziedziny f.

Jeśli spełniony jest pierwszy warunek, czyli f jest ciągła w a, to $f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$. Na mocy definicji Cauchy'ego granicy funkcji, drugi warunek jest spełniony, o ile dodatkowo założymy, że $x\neq a$. Jednak dla $x=a$ oczywiście $|f(x)-f(a)|=0<\varepsilon$. Dowodzi to drugiego warunku bez dodatkowych założeń.

Przypuśćmy teraz, że spełniony jest drugi warunek. W szczególności zachodzi on, gdy $x\neq a$, a więc na mocy definicji Cauchy'ego granicy, $f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$. To zaś oznacza ciągłość f w a.

Przypadek granic jednostronnych jest analogiczny i jego szczegółowy dowód pomijamy. □

Często wygodnie jest mówić o ciągłości funkcji na właściwym podzbiorze jej dziedziny.

DEFINICJA 7.27. Funkcja f jest *ciągła na przedziale* (a,b), jeśli przedział ten zawiera się w jej dziedzinie oraz f jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

Funkcja f jest *ciągła na przedziale* $[a,b]$, jeśli przedział ten zawiera się w jej dziedzinie oraz f jest ciągła w każdym punkcie przedziału (a,b), ciągła prawostronnie w a oraz ciągła lewostronnie w b.

Analogiczne definicje wprowadza się dla przedziałów postaci $[a,b)$ oraz $(a,b]$.

Ogólniej, funkcja f jest *ciągła na zbiorze* A, jeśli zbiór ten zawiera się w jej dziedzinie oraz zawężenie funkcji f do zbioru A jest funkcją ciągłą na A (a więc funkcja

$\tilde{f} : A \to \mathbb{R}$ dana wzorem $\tilde{f}(x) = f(x)$ dla $x \in A$ jest ciągła w każdym punkcie zbioru A).

Ostatnia część definicji faktycznie jest rozszerzeniem jej wcześniejszych części; nietrudny dowód tego faktu pomijamy.

Przykład. Funkcja dana wzorem $f(x) = \lfloor x \rfloor$ jest ciągła na $[0, 1)$. W istocie, jeśli $a \in (0, 1)$, to istnieje $\delta_0 > 0$ taka, że $f(x) = 0$ gdy $|x - a| < \delta_0$ (mianowicie $\delta_0 = \min\{a, 1 - a\}$), a więc

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} 0 = 0 = f(a).$$

Ponadto f jest prawostronnie ciągła w 0, zachodzi bowiem $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 0 = 0 = f(0)$. Zauważmy, że f jest ciągła na $[0, 1)$ mimo, że nie jest ciągła w 0 (jest jedynie prawostronnie ciągła w 0).

7.7. **Funkcje nieciągłe.** Wyróżnia się trzy typy i dwa rodzaje nieciągłości.

Definicja 7.28. Jeśli a należy do dziedziny funkcji f i jest jej obustronnym punktem skupienia, to

(a) f ma w a *nieciągłość typu skok* (lub po prostu *skok*), jeśli obie granice jednostronne $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ istnieją, lecz mają różną wartość;

(b) f ma w a *nieciągłość pozorną* (inaczej: *nieciągłość usuwalną* lub *nieciągłość typu luka*), jeśli istnieje $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (czyli obie granice jednostronne $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ istnieją i są sobie równe), lecz granica ta ma wartość różną od $f(a)$;

(c) f ma w a *nieciągłość istotną*, jeśli któraś z granic jednostronnych $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ nie istnieje.

Nieciągłość pozorną lub typu skok nazywa się *nieciągłością pierwszego rodzaju*. Nieciągłość istotna to inaczej *nieciągłość drugiego rodzaju*.

Przykład. Funkcja $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ ma w 0 nieciągłość typu skok.

Przykład. Funkcja $f(x) = (\operatorname{sign}(x))^2$ ma w 0 nieciągłość pozorną.

Przykład. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ma w 0 nieciągłość istotną, bowiem (właściwe) granice jednostronne f w 0 nie istnieją.

Przykład. Funkcja f określona wzorem $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ dla $x \neq 0$, $f(0) = c$ (gdzie $c \in \mathbb{R}$), ma w 0 nieciągłość istotną, bowiem nie istnieje żadna z granic jednostronnych f w 0. W istocie, jeśli $x_n = \frac{1}{n\pi}$, to $f(x_n) = 0$, więc $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 0$; jeśli zaś $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$, to $f(x_n) = 1$, czyli $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 1$. Granica $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ musiałaby więc być równa jednocześnie 0 i 1.

W niektórych zastosowaniach istotną rolę odgrywają funkcje, które nie mają nieciągłości istotnych — mają one pewne cechy wspólne z funkcjami ciągłymi.

Na zakończenie warto podać dwa klasyczne przykłady funkcji nieciągłych.

Przykład. Funkcja Dirichleta zdefiniowana jest wzorem $f(x) = 1$ dla x wymiernych i $f(x) = 0$ dla x niewymiernych. Ponieważ każda liczbą jest granicą zarówno ciągu liczb wymiernych, jak i ciągu liczb niewymiernych, funkcja Dirichleta nie jest ciągła w żadnym punkcie.

Przykład. Funkcja Riemanna zdefiniowana jest wzorem $f(x) = 0$ dla x niewymiernych oraz $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ dla wszystkich liczb wymiernych $\frac{p}{q}$ zapisanych w postaci ułamka nieprzywiedlnego (tj. $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p i q nie mają wspólnych dzielników innych niż 1). Ponieważ każda liczba wymierna jest granicą ciągu liczb niewymiernych, funkcja Riemanna nie jest ciągła w żadnym punkcie wymiernym. Z drugiej strony jeśli ciąg liczb wymiernych (x_n) jest zbieżny do liczby niewymiernej, mianowniki tworzą ciąg rozbieżny do ∞, a więc $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Zatem dla dowolnego ciągu (x_n) zbieżnego do liczby niewymiernej a zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(a)$: albo od pewnego miejsca liczby x_n są niewymierne i $f(x_n) = 0$, albo istnieje podciąg (x_{k_n}) wszystkich wymiernych wyrazów ciągu (x_n) i $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = 0$, skąd łatwo $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ (bowiem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $f(s_{k_n}) < \varepsilon$ dla $n \geqslant N$, skąd $f(s_n) < \varepsilon$ dla $n \geqslant k_N$). Ostatecznie wnioskujemy, że f jest ciągła w każdym punkcie niewymiernym.

Zbiór punktów nieciągłości funkcji Riemanna to zbiór liczb wymiernych. Co ciekawe, nie istnieje funkcja, której zbiór punktów nieciągłości to zbiór liczb wymiernych. Jest to wniosek z twierdzenia Baire'a o kategoriach (które zostanie udowodnione na kursie z topologii) oraz ćwiczenia dodatkowego na liście zadań nr 13.

7.8. **Ujęcie topologiczne.** Definicję granicy funkcji rzeczywistej w punkcie i ciągłości w punkcie można sformułować w języku, który pozwala na łatwe uogólnienia tych pojęć.

DEFINICJA 7.29. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ przedział $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ nazywany jest *otoczeniem punktu* a. Zbiór $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\setminus\{a\}$ nazywany jest *sąsiedstwem punktu* a (inaczej: *nakłutym otoczeniem punktu* a). Analogicznie przedział $[a, a+\varepsilon)$ nazywany jest *prawostronnym otoczeniem* a, zaś przedział $(a, a+\varepsilon)$ — *prawostronnym sąsiedztwem* a. Dla dowolnego $M \in \mathbb{R}$ przedział $(M, +\infty)$ nazywany jest *otoczeniem plus nieskończoności* lub *sąsiedstwem plus nieskończoności*, zaś przedział $(-\infty, M)$ — *otoczeniem minus nieskończoności* lub *sąsiedstwem minus nieskończoności*.

W oczywisty sposób definicje Cauchy'ego można przepisać tak, jak w poniższym twierdzeniu.

TWIERDZENIE 7.30. Jeśli każde sąsiedztwo punktu a ma punkt wspólny ze zbiorem A, to a nazywamy prawostronnym punktem skupienia A. Ciąg (a_n) jest zbieżny do x, jeśli każde otoczenie punktu x zawiera wszystkie wyrazy ciągu (a_n) od pwenego miejsca. Funkcja f jest ciągła w punkcie a, jeśli dowolne otoczenie punktu $f(a)$ zawiera wszystkie wartości funkcji f w pewnym otoczeniu punktu a. Funkcja f ma granicę b w punkcie a (który jest punktem skupienia dziedziny funkcji f), jeśli dowolne otoczenie punktu b zawiera wszystkie wartości funkcji f w pewnym sąsiedztwie punktu a. Analogiczne sformułowania są prawdziwe dla granic jednostronnych lub niewłaściwych, a także dla ciągłości jednostronnej. □

7.9. **Własności funkcji ciągłych.** W poprzednich rozdziałach udowodniono wiele własności funkcji ciągłych: suma, różnica, iloczyn, iloraz, potęga oraz złożenie funkcji ciągłych są funkcjami ciągłymi. Ponadto funkcja odwrotna do ściśle monotonicznej funkcji ciągłej (określonej na pewnym przedziale) jest funkcją ciągłą. Wreszcie: wszystkie funkcje elementarne są ciągłe (na swojej dziedzinie naturalnej).

We wstępnej części sformułowane zostały kolejne dwa twierdzenia o funkcjach ciągłych, które teraz udowodnimy. Pierwsze dotyczyło osiągania wartości pośrednich.

TWIERDZENIE 7.31 (własność Darboux funkcji ciągłej). Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ oraz y jest zawarte w przedziale otwarty, o krańcach $f(a)$ i $f(b)$, to równanie $f(x)=y$ ma rozwiązanie w przedziale (a,b). [[rysunek]]

Dowód. Przypuśćmy wpierw, że $f(a)<f(b)$ i w takim razie $f(a)<y<f(b)$. Określmy

$$A=\{x\in[a,b]:f(x)\leqslant y\}.$$

Zbiór A jest niepusty, bowiem zawiera liczbę a. Jest też ograniczony z góry przez b. Określmy zatem $c=\sup A$. Oczywiście $c\in[a,b]$.

Istnieje ciąg (x_n) elementów zbioru A zbieżny do c. Z ciągłości funkcji f wynika, że ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do $f(c)$. Skoro $f(x_n)\leqslant y$, otrzymujemy

$$f(c)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\leqslant y.$$

Skoro $f(b)>y$, zachodzi $c\neq b$, czyli $c<b$. Wobec tego $c+\frac{1}{n}<b$ dla dostatecznie dużych $n\in\mathbb{N}$. Oczywiście $c+\frac{1}{n}\notin A$, zatem $f(c+\frac{1}{n})>y$ (dla dostatecznie dużych n). Z ciągłości funkcji f wynika, że ciąg $(f(c+\frac{1}{n}))$ jest zbieżny do $f(c)$, skąd

$$f(c)=\lim_{n\to\infty}f(c+\tfrac{1}{n})\geqslant y.$$

Z uzyskanych nierówności wynika, że $f(c)=y$. Skoro $f(a)<y$, otrzymujemy $c\neq a$, czyli ostatecznie $c\in(a,b)$.

Przypadek $f(a)>f(b)$ jest analogiczny. Gdy $f(a)=f(b)$, nie ma czego dowodzić. □

Inny dowód tego twierdzenia jest treścią ćwiczenia na liście zadań nr 13.

Funkcja f ma *własność Darboux* (nazywaną też *własnością wartości pośredniej*), jeśli na każdym przedziale $[a,b]$ zawartym w jej dziedzinie funkcja f osiąga wszystkie wartości pośrednie między $f(a)$ i $f(b)$. Ponieważ ciągłość f na całej dziedzinie implikuje ciągłość na każdym przedziale $[a,b]$ zawartym w dziedzinie f, powyższe twierdzenie oznacza, że funkcje ciągłe mają własność Darboux. Warto podkreślić, że przeciwne wynikanie nie jest w ogólności prawdziwe — znalezienie odpowiednich przykładów to także treść ćwiczeń na liście zadań nr 13.

Kolejnym podstawowym wynikiem jest własność osiągania wartości ekstremalnych.

TWIERDZENIE 7.32 (o osiąganiu kresów). Jeśli funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału $[a,b]$, to przyjmuje ona w tym przedziale wartość najmniejszą oraz wartość największą. [[rysunek]]

Dowód. Celem jest udowodnienie, że zbiór wartości $Y=\{f(x):x\in[a,b]\}$ zawiera element największy i najmniejszy. Jeśli A jest nieograniczony z góry, to istnieje ciąg (x_n) o wyrazach w przedziale $[a,b]$ taki, że $f(x_n)>n$. Jeśli zaś A jest ograniczony z góry, to istnieje ciąg (x_n) o wyrazach w przedziale $[a,b]$ taki, że ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do $\sup A$. W obu przypadkach na mocy twierdzenia Bolzano–Weierstrassa ciąg (x_n) zawiera podciąg (x_{k_n}) zbieżny do pewnej liczby $c\in[a,b]$. Oznacza to, że

$$f(c)=\lim_{n\to\infty}f(x_{k_n});$$

w szczególności (właściwa) granica $f(x_{k_n})$ istnieje. Oznacza to, że A jest ograniczony (w przeciwnym razie bowiem $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \infty$) i w takim razie $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup A$. Analogicznie dowodzi się, że f osiąga wartość najmniejszą. □

Łatwo sprawdzić, że funkcje ciągłe na przedziałach otwartych nie mają tej własności: mogą być nieograniczone, mogą też być ograniczone, lecz nie przyjmować wartości największej. Znalezienie odpowiednich przykładów jest treścią ćwiczeń na liście zadań nr 13.

Powyższe dwa twierdzenia można podsumować następująco.

WNIOSEK 7.33. Zbiór wartości funkcji ciągłej na $[a, b]$ jest skończonym przedziałem domkniętym lub zbiorem jednoelementowym.

Dowód. Niech $y_1 = f(x_1)$ będzie wartością największą f na $[a, b]$, zaś $y_2 = f(x_2)$ — wartością największą. Jeśli $x_1 = x_2$, to f jest stale równa $y_1 = y_2$ na $[a, b]$. Gdy $x_1 < x_2$, to f jest ciągła na $[x_1, x_2]$, przyjmuje więc wszystkie wartości między $f(x_1) = y_1$ i $f(x_2) = y_2$. Analogicznie gdy $x_1 > x_2$, to f jest ciągła na $[x_2, x_1]$ i wobec tego przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy $f(x_2) = y_2$ i $f(x_1) = y_1$. Oznacza to, że zbiór wartości funkcji f na przedziale $[a, b]$ to przedział $[y_1, y_2]$. □

Powyższe twierdzenie można stosować do dowodu istnienia rozwiązań niektórych równań (a także przybliżania ich rozwiązań).

TWIERDZENIE 7.34. Każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek rzeczywisty*.

Dowód. Niech $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie k jest nieparzyste. Przypuśćmy wpierw, że $a_k = 1$. Wówczas, jak łatwo sprawdzić, $\lim_{x\to\infty}(|x|^{-k} f(x)) = 1$ oraz $\lim_{x\to-\infty}(|x|^{-k} f(x)) = -1$. Wobec tego istnieje $x_2 > 0$ takie, że $f(x_2) > \frac{1}{2}|x_2|^k > 0$ oraz $x_1 < 0$ takie, że $f(x_1) < -\frac{1}{2}|x_1|^k < 0$. Ponieważ f jest funkcją ciągłą (bo elementarną), istnieje $x \in [x_1, x_2]$ takie, że $f(x) = 0$.

W przypadku gdy $a_k \neq 0$ (lecz niekoniecznie $a_k = 1$), wystarczy rozważyć wielomian $\frac{1}{a_k} f$. □

Przykład. Wielomian $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste: $f(-2) = -1$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 3$, każdy z przedziałów $(-2, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 2)$ zawiera zatem pewien pierwiastek. Ponieważ $f(0{,}347) = 0{,}000781923 > 0$ oraz $f(0{,}348) = -0{,}00185581 < 0$, jeden z pierwiastków leży w przedziale $(0{,}347, 0{,}348)$.

Przykład. Równanie $xe^x = y$ ma rozwiązanie $x \geqslant 0$ dla każdej liczby $y \geqslant 0$. W istocie, jeśli $f(x) = xe^x$, to f jest ciągła na $[0, \infty)$, $f(0) = 0$ oraz $f(x) \geqslant x$, a więc w przedziale $[0, a]$ funkcja f osiąga wszystkie wartości pomiędzy 0 i $f(a)$; na $[0, \infty)$ funkcja f osiąga zatem wszystkie wartości nieujemne.

Ponieważ f jest ściśle rosnąca, rozwiązanie równania $f(x) = y$ (dla ustalonego $y \geqslant 0$) jest jednoznaczne. Rozwiązanie to określa jedną z funkcji W Lamberta: $y = W_0(x)$.

*Prawdziwe jest też *zasadnicze twierdzenie algebry*: każdy wielomian (także taki o współczynnikach zespolonych) ma pierwiastek zespolony, ale jego dowód jest istotnie trudniejszy.

Jest to przykład *funkcji specjalnej* — ważnej funkcji, która nie jest elementarna (dowód tego faktu jest jednak skomplikowany; przykład ten pokazuje też, że funkcja odwrotna do funkcji elementarnej nie musi być elementarna).

TWIERDZENIE 7.35. Jeśli f jest ciągłą funkcją na $[a,b]$ o wartościach w $[a,b]$, to f ma *punkt stały*: dla pewnego $x \in [a,b]$ zachodzi $f(x) = x$.

Dowód. Wystarczy udowodnić, że funkcja określona wzorem $g(x) = f(x) - x$ przyjmuje na przedziale $[a,b]$ wartość 0. Funkcja ta jest ciągła na $[a,b]$ oraz $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$, $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Jeśli $g(a) = 0$ lub $g(b) = 0$, to nie ma czego dowodzić. Gdy zaś $g(a) < 0$ i $g(b) > 0$, to dla pewnego $x \in [a,b]$ zachodzi $g(x) = 0$. □

Ciągłość na przedziale domkniętym ma jeszcze jedną ciekawą (i bardzo ważną) własność: można zamienić kolejność kwantyfikatorów w definicji.

DEFINICJA 7.36. Funkcja f jest *jednostajnie ciągła* w zbiorze A, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ o własności: jeśli $x_1, x_2 \in A$ oraz $|x_1 - x_2| < \delta$, to $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Warto porównać to z definicją ciągłości w A: funkcja f jest ciągła w zbiorze A, jeśli dla każdego $x_1 \in A$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ (która może zależeć nie tylko od ε, ale też od x_1) o własności: jeśli $x_2 \in A$ oraz $|x_1 - x_2| < \delta$, to $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

TWIERDZENIE 7.37. Jeśli f jest ciągła na $[a,b]$, to jest jednostajnie ciągła na $[a,b]$.

Dowód. Przypuśćmy, że funkcja f nie jest jednostajnie ciągła na $[a,b]$, a więc dla pewnego $\varepsilon > 0$ istnieją ciągi punktów (x_n) i $(\tilde{x}_n)$ w $[a,b]$ takie, że $|x_n - \tilde{x}_n| < \frac{1}{n}$, lecz $|f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \geqslant \varepsilon$ (stosujemy tu zaprzeczenie definicji jednostajnej ciągłości dla $\delta = \frac{1}{n}$). Na mocy twierdzenia Bolzano–Weierstrassa istnieje zbieżny podciąg (x_{k_n}) ciągu (x_n). Niech c będzie granicą tego ciągu. Z nierówności $x_n - \frac{1}{n} < \tilde{x}_n < x_n + \frac{1}{n}$ i twierdzenia o trzech ciągach wynika, że ciąg $(\tilde{x}_{k_n})$ również jest zbieżny do c. Gdyby f była ciągła w c, to zachodziłoby $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_{k_n}) - f(\tilde{x}_{k_n})| = |f(c) - f(c)| = 0$, co stoi w sprzeczności z warunkiem $|f(x_{k_n}) - f(\tilde{x}_{k_n})| \geqslant \varepsilon$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem f nie jest ciągła w c. □

Powyższe twierdzenie nie zachodzi dla przedziałów otwartych lub nieskończonych — odpowiednie przykłady są ćwiczeniami na liście zadań nr 13.

DEFINICJA 7.38. Funkcja f określona na pewnym zbiorze A spełnia *warunek Lipschitza*, jeśli istnieje stała C taka, że

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|$$

dla wszystkich $x_1, x_2 \in A$. Ogólniej, funkcja f spełnia *warunek Höldera* z wykładnikiem $\delta > 0$, jeśli istnieje stała C taka, że

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|^\delta$$

dla wszystkich $x_1, x_2 \in A$.

W definicji jednostajnej ciągłości najlepszą wartość $\delta > 0$ dla ustalonego $\varepsilon > 0$ oznacza się $\omega_f(\varepsilon)$, a funkcję ω_f nazywa się modułem ciągłości funkcji f.

DEFINICJA 7.39. Jeśli f jest funkcją określoną na pewnym zbiorze A oraz $\varepsilon > 0$, to określamy

$$\omega_f(\varepsilon) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in A,\ |x_1 - x_2| < \delta\}.$$

Funkcję ω_f nazywamy *modułem ciągłości* funkcji f.

Funkcja f spełnia zatem warunek Lipschitza, jeśli $\omega_f(\varepsilon) \leqslant C\varepsilon$ dla pewnego C. Analogicznie f spełnia warunek Höldera z wykładnikiem δ, jeśli $\omega_f(\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^\delta$ dla pewnej stałej C.

8. Pochodne

8.1. **Definicje.** Pojęcie pochodnej jest kolejnym (po granicy) najważniejszym pojęciem rachunku różniczkowego i całkowego, wprowadzonym krótko już w rozdziale 1.

DEFINICJA 8.1. Niech f będzie funkcją rzeczywistą, x_1, x_2 — różnymi punktami jej dziedziny. *Iloraz różnicowy* funkcji f na przedziale od x_1 do x_2 to:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Jeśli $f(t)$ opisuje położenie obiektu w chwili t, to iloraz różnicowy jest średnią prędkością na przedziale od t_1 do t_2. Ponadto iloraz różnicowy to współczynnik kierunkowy *siecznej* wykresu funkcji, przechodzącej przez $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$, czyli prostej: [[rysunek]]

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,(x - x_1).$$

DEFINICJA 8.2. Jeśli funkcja f jest zdefiniowana w otoczeniu ustalonego punktu a (lub co najmniej a jest punktem skupienia i elementem dziedziny funkcji f) oraz istnieje właściwa granica:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{8.1}$$

to mówi się, że funkcja f jest *różniczkowalna* w punkcie a, zaś wartość granicy nazywana jest *pochodną* funkcji f w punkcie a i oznaczana $f'(a)$.

W ten sposób określona jest *funkcja pochodna* f' funkcji f, której dziedziną jest zbiór tych punktów, w których f jest różniczkowalna. Pochodna pochodnej funkcji f, jeśli istnieje, nazywana jest *drugą pochodną* funkcji f i oznaczana f''. Analogicznie określa się *pochodne wyższych rzędów*: dla $n \in \mathbb{N}$ pochodna rzędu $n+1$ jest pochodną pochodnej rzędu n, przy czym pochodna rzędu 0 to wyjściowa funkcja. Pochodną rzędu n oznacza się zwykle $f^{(n)}$.

Gdy istnieje granica niewłaściwa (8.1), mówi się, że funkcja f ma *pochodną niewłaściwą* w punkcie a i czasem pisze się odpowiednio $f'(a) = \infty$ lub $f'(a) = -\infty$. Gdy istnieje granica jednostronna (8.1), mówi się, że f ma *pochodną jednostronną*, którą oznacza się odpowiednio $f'_+(a)$ lub $f'_-(a)$.

Funkcja jest różniczkowalna w przedziale I, jeśli jej pochodna jest określona w punktach wewnętrznych tego przedziału, a jeśli przedział I zawiera któreś ze swoich końców — ponadto w tych końcach istnieje odpowiednia pochodna jednostronna.

Ze wzoru na granicę złożenia funkcji (po podstawieniu $x = a + s$):

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{s\to 0} \frac{f(a+s) - f(a)}{s}.$$

Ostatnia postać jest często wygodniejsza w rachunkach.

Jeśli $f(t)$ opisuje położenie obiektu w chwili t, to pochodną interpretuje się jako prędkość chwilową. Wkrótce zobaczymy, że informacja o prędkości chwilowej na przedziale i znajomość położenia w ustalonym momencie w pełni określają ruch.

Pochodna funkcji f w punkcie a to też — z definicji — współczynnik kierunkowy *stycznej* do wykresu funkcji f w punkcie $(a, f(a))$. Styczna jest więc dana równaniem:

[[rysunek]]

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Z definicji styczna do wykresu funkcji istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja ta jest różniczkowalna. Wyjątkiem jest tu przypadek stycznej pionowej, którym nie będziemy się zajmowali.

Przykład. Jeśli $f(x) = x^2$ dla wszystkich x, to:

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2}(x + 2) = 4$$

i ogólnie:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x\to a}(x + a) = 2a$$

dla wszystkich a.

Przykład. Jeśli $f(x) = |x|$ dla wszystkich x, to $f'(a) = 1$ dla $a > 0$, $f'(a) = -1$ dla $a < 0$ oraz $f'(0)$ nie istnieje (choć $f'_+(0) = 1$ i $f'_-(0) = -1$).

Przykład. Jeśli $f(x) = \sqrt{x}$ dla wszystkich $x \geqslant 0$, to $f'_+(0) = +\infty$.

TWIERDZENIE 8.3. Jeśli funkcje f i g są sobie równe w pewnym otoczeniu ustalonego punktu a, to mają w a jednakowe pochodne. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla otoczeń i pochodnych jednostronych.

Dowód. Jest to bezpośredni wniosek z odpowiednich twierdzeń dla granic funkcji. □

TWIERDZENIE 8.4. Jeśli ustalony punkt t jest obustronnym punktem skupienia i elementem dziedziny funkcji f, to funkcja f jest różniczkowalna w punkcie t wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f ma w punkcie t obie pochodne jednostronne i mają one jednakową wartość.

Dowód. Jest to bezpośredni wniosek z odpowiedniego twierdzenia dla granic funkcji. □

TWIERDZENIE 8.5. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w ustalonym punkcie a, to jest ciągła w punkcie a.

Dowód. Zachodzi:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a) \right) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a). \qquad \square$$

8.2. **Obliczanie pochodnych.** Obliczenie pochodnych funkcji elementarnych jest niezwykle proste.

TWIERDZENIE 8.6 (o arytmetyce pochodnych). Jeśli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie a, to:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a), \qquad (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$
$$(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a), \qquad (f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2},$$

przy czym w ostatnim wzorze należy założyć, że $g(t) \neq 0$.

Dowód. Zachodzi:

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)+g'(a).\end{aligned}$$

Dowód wzoru na pochodną różnicy jest analogiczny. Ponadto:

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\, g(x)\right) + \lim_{x\to a} \left(f(a)\, \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a).\end{aligned}$$

Podobnie:

$$\begin{aligned}(f/g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{(x-a)g(x)g(a)} \\ &= \lim_{x\to a} \left(\frac{1}{g(x)g(a)} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\, g(a)\right) - \lim_{x\to a} \left(f(a)\, \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\right) \\ &= \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.\end{aligned}$$

□

TWIERDZENIE 8.7 (wzór Leibniza). Jeśli funkcje f i g są n-krotnie różniczkowalne w punkcie a, to:

$$\begin{aligned}(f\cdot g)^{(n)}(a) = \binom{n}{0} f^{(n)}(a)g^{(0)}(t) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(a)g^{(1)}(a) + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(a)g^{(2)}(a) + \ldots \\ + \binom{n}{n-1} f^{(1)}(a)g^{(n-1)}(a) + \binom{n}{n} f^{(0)}(a)g^{(n)}(a).\end{aligned}$$

Dowód. Dowód indukcyjny jest niemal identyczny z dowodem wzoru dwumianowego Newtona. □

TWIERDZENIE 8.8. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w ustalonym punkcie a, zaś funkcja g — w punkcie $f(a)$, to (przy założeniu, że a jest punktem skupienia dziedziny złożenia $g\circ f$):

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Dowód. Niech $b = f(a)$. Bardzo prosty, lecz niezupełnie poprawny dowód to:

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{y\to b} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g'(b)f'(a).\end{aligned}$$

Argument ten jest błędny, gdy a jest punktem skupienia zbioru rozwiązań x równania $f(x) = b$ — na przykład wtedy, gdy funkcja f jest stała. Najprostszy sposób, by powyższe rozumowanie poprawić, polega na oznaczeniu symbolem $h(y)$ ilorazu różnicowego funkcji g na przedziale od b do y:

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b} & \text{gdy } y \neq b, \\ g'(b) & \text{gdy } y = b. \end{cases}$$

Wówczas funkcja h jest ciągła w b (bowiem $h(b) = g'(b)$ jest z definicji równe granicy ilorazu różnicowego $h(y)$ gdy $y \to b$) oraz $g(f(x)) - g(f(a)) = h(f(x))(f(x) - f(a))$ (także wtedy, gdy $g(s) = g(t)$), zatem:

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} h(g(x)) \cdot \lim \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = h(g(a))g'(a).\end{aligned}$$ □

TWIERDZENIE 8.9. Jeśli $f(x) = px + q$ dla wszystkich x, to $f'(a) = p$ dla wszystkich a.

Dowód. Zachodzi:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{px + q - pa - q}{x - a} = \lim_{x \to a} p = p.$$ □

TWIERDZENIE 8.10. Jeśli $f(x) = \exp(x)$ dla wszystkich x, to $f'(a) = \exp(a)$ dla wszystkich a.

Dowód. Zachodzi:

$$f'(a) = \lim_{s \to 0} \frac{\exp(a + s) - \exp(a)}{s} = \exp(a) \lim_{s \to 0} \frac{\exp(s) - 1}{s} = \exp(a) \cdot 1.$$ □

Stąd (przez argument indukcyjny) wynika, że jeśli $f(x) = \exp(x)$ dla wszystkich x oraz $n \in \mathbb{N}$, to $f^{(n)}(x) = \exp(x)$.

TWIERDZENIE 8.11. Jeśli $f(x) = \sin(x)$ dla wszystkich x, to $f'(a) = \cos(a)$ dla wszystkich a.

Dowód. Zachodzi:

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{s \to 0} \frac{\sin(a + s) - \sin(a)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{2\cos(a + \frac{s}{2})\sin(\frac{s}{2})}{s} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{\sin(\frac{s}{2})}{\frac{s}{2}} \cdot \lim_{s \to 0} \cos(a + \tfrac{s}{2}) = 1 \cdot \cos(a).\end{aligned}$$ □

WNIOSEK 8.12. Jeśli $f(x) = \cos(x)$ dla wszystkich x, to $f'(a) = -\sin(a)$ dla wszystkich a.

Dowód. Niech $g(x) = \sin(x)$, $h(x) = x + \frac{\pi}{2}$. Skoro $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = g(h(x))$, $g'(a) = \cos(a)$ i $h'(a) = 1$ dla wszystkich a, zachodzi $f'(a) = \cos(a + \frac{\pi}{2}) \cdot 1 = -\sin(a)$. □

Dla wygody zapisu stosuje się oznaczenie $(f(x))' = f'(x)$, jeśli w wyrażeniu $f(x)$ nie występują inne zmienne lub z kontekstu wynika, po jakiej zmiennej odbywa się różniczkowanie. Piszemy zatem:

$$(\sin(x))' = \cos(x), \qquad (\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{(\cos(x))^2},$$
$$(\cos(x))' = -\sin(x), \qquad (\operatorname{ctg}(x))' = -\frac{1}{(\sin(x))^2}.$$

Dla dowolnego ustalonego $c > 0$ zachodzi

$$(c^x)' = c^x \ln(c).$$

Ponadto dla ustalnego c wprost ze wzoru na pochodną złożenia funkcji wynika, że:

$$(cf(x))' = cf'(x), \qquad (f(cx))' = cf'(cx), \qquad (f(x+c))' = f'(x+c),$$

przy założeniu, że pochodna po prawej stronie równości istnieje. Niektóre z powyższych równości stanowią treść ćwiczeń na liście zadań nr 14.

TWIERDZENIE 8.13 (o pochodnej funkcji odwrotnej). Niech f^{-1} będzie funkcją odwrotną do funkcji f na pewnym przedziale, na którym funkcja f jest ściśle monotoniczną funkcją ciągłą. Niech a będzie ustalonym punktem tego przedziału. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a i $f'(a) \neq 0$, to funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $b = f(a)$ oraz $(f^{-1})'(b) = 1/f'(a)$. W przypadku punktów brzegowych rozważanego przedziału należy mówić o odpowiednich pochodnych jednostronnych.

Innymi słowy:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Dowód. Wystarczy podstawić $y = f(x)$ (czyli $x = f^{-1}(y)$) w definicji granicy:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(b) &= \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} \\ &= \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.\end{aligned}$$

□

WNIOSEK 8.14. Jeśli $f(x) = \ln(x)$ dla wszystkich $x \in (0, +\infty)$, to $f'(a) = 1/a$ dla wszystkich $a \in (0, +\infty)$.

Dowód. Jeśli $a = \exp(b)$, to zachodzi:

$$f'(a) = \frac{1}{\exp(b)} = \frac{1}{a}.$$

□

WNIOSEK 8.15. Jeśli $f(x) = \arcsin(x)$ dla wszystkich $x \in [-1, 1]$, to $f'(a) = 1/\sqrt{1-a^2}$ dla wszystkich $a \in (-1, 1)$.

Dowód. Jeśli $a = \sin(b)$ i $b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, to zachodzi:

$$f'(a) = \frac{1}{\cos(b)} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}.$$

□

Analogicznie dowodzi się pozostałych wzorów spośród:

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2},$$
$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\log_a(x))' = -\frac{1}{x\ln(a)}$$

dla dowolnego ustalonego $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ — są to ćwiczenia na liście zadań nr 14.

TWIERDZENIE 8.16. Jeśli $f(x) = x^c$ dla ustalnego c i wszystkich x (z dziedziny naturalnej), to $f'(x) = cx^{c-1}$ dla wszystkich x z dziedziny naturalnej funkcji f, z wyjątkiem $x = 0$ gdy $c < 1$.

Dowód. Dla wszystkich $x > 0$ zachodzi $f(x) = \exp(c\ln(x))$, skąd, na mocy wzoru na pochodną złożenia funkcji, dla $a > 0$:

$$f'(a) = \exp(c\ln(a)) \cdot c \cdot \frac{1}{a} = ca^{c-1}.$$

Jeśli c jest całkowite i różne od zera (lub ogólniej — jest liczbą wymierną o nieparzystym mianowniku), to dla wszystkich $x < 0$ zachodzi $f(x) = (-1)^c(-x)^c$, skąd $f'(a) = (-1)^c \cdot c(-a)^{c-1} \cdot (-1) = a^{c-1}$. Gdy $c > 1$, to $f'(0) = \lim_{x\to 0} x^{c-1} = 0$. Gdy wreszcie $c = 1$, to wiemy już, że $f'(0) = 1$. □

Powyższe twierdzenia pozwalają wyznaczyć pochodną dowolnej funkcji elementarnej (dotyczy tego ćwiczenie dodatkowe na liście zadań nr 14).

Przykład. Zachodzi:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}\right)' &= \frac{(\ln(1+e^x))'\sqrt{1+x^2} - \ln(1+e^x)(\sqrt{1+x^2})'}{1+x^2} \\ &= \frac{(1+e^x)^{-1}(1+e^x)'\sqrt{1+x^2} - \ln(1+e^x)\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}(1+x^2)'}{1+x^2} \\ &= \frac{(1+e^x)^{-1}e^x\sqrt{1+x^2} - \ln(1+e^x)\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}2x}{1+x^2} \\ &= \frac{e^x(1+x^2) - x\ln(1+e^x)}{(1+x^2)^{3/2}(1+e^x)}.\end{aligned}$$

Przykład. Jeśli $f(x) = c\sin(px+q)$ dla pewnych stałych c, p, q oraz wszystkich x, to zachodzi równość $f''(a) = -p^2 f(a)$ dla wszystkich a. Oznacza to, że w ruchu opisanym przez funkcję f przyspieszenie jest proporcjonalne do wychylenia, ze współczynnikiem proporcjonalności $-a^2$. Zgodnie z prawem Hooke'a, jest to opis drgań obiektu na idealnej (tj. nieważkiej, poruszającej się bez oporów itp.) sprężynie. Można wykazać, że każde rozwiązanie równania $f''(x) = -p^2 f(x)$ jest postaci tu opisanej — tematyką tą zajmuje się teoria *równań różniczkowych*.

8.3. **Twierdzenia o wartości średniej.** Podstawowe zastosowanie pochodnych to znajdowanie ekstremów funkcji. W ramach przygotowań udowodnimy serię trzech klasycznych twierdzeń, nazywanych twierdzeniami o wartości średniej.

DEFINICJA 8.17. Funkcja f określona w pewnym otoczeniu ustalonego punktu a osiąga w a *maksimum lokalne*, jeśli $f(x) \leqslant f(a)$ dla wszystkich x z pewnego otoczenia a, tj. istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $|x - a| < \delta$, to $f(x) \leqslant f(a)$. Maksimum lokalne jest *ścisłe*, jeśli $f(x) < f(a)$ dla wszystkich $x \neq a$ z pewnego otoczenia a. Analogicznie definiuje się *minimum lokalne*. *Ekstremum lokalne* to mimimum lub maksimum lokalne.

TWIERDZENIE 8.18 (warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego). Jeśli funkcja f osiąga w ustalonym punkcie a maksimum lub minimum lokalne oraz jest różniczkowalna w tym punkcie, to $f'(a) = 0$.

Dowód. Zachodzi:

$$\begin{aligned} f'_+(a) &= \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0, \\ f'_-(a) &= \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0, \end{aligned} \tag{8.2}$$

bowiem w obu granicach wyrażenie pod granicą ma stały znak dla x dostatecznie bliskich a. Pozostaje zauważyć, że $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$. □

Z warunku $f'(a) = 0$ dla ustalnego a nie wynika, że f ma w a ekstremum lokalne — jeśli $f(x) = x^3$ dla wszystkich x, to $f'(0) = 0$, lecz f nie ma w 0 ani maksimum, ani minimum lokalnego.

Jeśli istnieją tylko pochodne jednostronne funkcji f w punkcie a, to nie muszą być one równe 0 — na przykład jeśli $f(x) = -|x|$ dla wszystkich x, to f ma maksimum lokalne w punkcie 0, lecz $f'_+(0) = -1$, $f'_-(0) = 1$. Zawsze gdy istnieją pochodne jednostronne w punkcie a, w którym funkcja f ma maksimum lokalne, prawdziwe są jednak nierówności (8.2).

Z powyższego twierdzenia łatwo wynikają trzy twierdzenia o wartości średniej: Rolle'a, Lagrange'a i Cauchy'ego. Twierdzenia te mają liczne zastosowania.

TWIERDZENIE 8.19 (Rolle'a). Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale (a, b) oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $c \in (a, b)$, w którym pochodna funkcji f ma wartość 0.[[rysunek]]

Dowód. Jeśli funkcja f jest stała, twierdzenie jest prawdziwe: $f'(c) = 0$ dla dowolnego $c \in (a, b)$. W przeciwnym razie f przyjmuje w (a, b) choć raz wartość różną od $f(a) = f(b)$. Jeśli f przyjmuje wartość większa od $f(a) = f(b)$, to f przyjmuje wartość największą w pewnym punkcie $c \in (a, b)$ (bowiem funkcja ciągła f przyjmuje wartość największą w $[a, b]$ i z pewnością nie osiąga jej na krańcach przedziału) i zachodzi $f'(c) = 0$ (na mocy warunku koniecznego istnienia ekstremum lokalnego). Jeśli zaś f osiąga wartość mniejszą od $f(a) = f(b)$ — dowód jest analogiczny. □

Powyższy dowód twierdzenia Rolle'a wykorzystuje twierdzenie o osiąganiu kresów przez funkcje ciągłe, a więc pośrednio twierdzenie Bolzano–Weierstrassa. Łatwo przeoczyć głębię tego twierdzenia!

TWIERDZENIE 8.20 (Lagrange'a o wartości średniej). Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna w przedziale (a,b), to istnieje punkt $c \in (a,b)$ taki, że: [[rysunek]]

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Dowód. Niech $p = (f(b)-f(a))/(b-a)$. Wystarczy zastosować twierdzenie Rolle'a do funkcji h danej wzorem $h(x) = f(x) - px$: zachodzi $h'(x) = f'(x) - p$, $h(b) - h(a) = f(b) - f(a) - p(b-a) = 0$. □

WNIOSEK 8.21. Jeśli $f'(x) = 0$ dla wszystkich x w pewnym przedziale, to f jest stała w tym przedziale. Jeśli $f'(x) = g'(x)$ dla wszystkich x w pewnym przedziale, to w tym przedziale f różni się od g o stałą. □

Powyższy wniosek oznacza, że funkcja pochodna wyznacza (z dokładnością do przesunięcia o stałą) wyjściową funkcję — na zadanym przedziale.

Przykład. Jeśli $f(x) = \operatorname{arctg}((x-1)/(x+1))$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, to

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2/(x+1)^2}\,\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2} = \frac{1}{1+x^2} = (\operatorname{arctg}(x))'.$$

Wobec tego funkcja $f(x) - \operatorname{arctg}(x)$ jest funkcją stałą na każdym z przedziałów $(-\infty,-1)$ oraz $(-1,+\infty)$. Ponieważ $f(0) = -\frac{\pi}{4}$ oraz $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$, zachodzi $f(x) = \operatorname{arctg}(x) - \frac{\pi}{4}$ dla $x > -1$ oraz $f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \frac{3\pi}{4}$ dla $x < -1$.

TWIERDZENIE 8.22 (warunki monotoniczności funkcji). Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna w przedziale (a,b), to f jest rosnąca w $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \geqslant 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$. Jeśli $f'(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$ (z wyjątkiem być może skończenie wielu wartości), to f jest ściśle rosnąca w $[a,b]$. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla funkcji malejących, a także dla przedziałów otwartych, w tym również nieskończonych.

Dowód. Jeśli f jest rosnąca w $[a,b]$, to iloraz różnicowy f na przedziale od x_1 do x_2 przyjmuje wartości nieujemne gdy $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 \neq x_2$, zatem pochodna f też przyjmuje wartości nieujemne w (a,b). Jeśli zaś pochodna f jest nieujemna w przedziale (a,b) oraz $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$, to na mocy twierdzenia Lagrange'a istnieje punkt $c \in (x_1,x_2)$ taki, że

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \geqslant 0,$$

skąd $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Zatem f jest rosnąca. Gdy pochodna f jest ściśle dodatnia w przedziale (a,b), to analogicznie $f(x_1) < f(x_2)$, czyli f jest ściśle rosnąca. Gdy f' jest ściśle dodatnia w przedziałach (a_0,a_1), (a_1,a_2), …, (a_{n-1},a_n), gdzie $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$, to f jest ściśle rosnąca na każdym z przedziałów $[a_0,a_1]$, $[a_1,a_2]$, …, $[a_{n-1},a_n]$, a więc — jak łatwo wykazać — jest też ściśle rosnąca na $[a,b]$ (jest to intuicyjnie jasne, ale ścisły dowód jest dość długi i oczywiście indukcyjny względem n). Dowody dla funkcji malejących są analogiczne. □

Przykład. Niech $f(x) = 1/x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ponieważ $f'(x) = -1/x^2 < 0$ dla $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, funkcja f jest malejąca na każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ oraz $(0, +\infty)$ (lecz oczywiście nie na sumie tych przedziałów!).

TWIERDZENIE 8.23 (Cauchy'ego o wartości średniej). Jeśli funkcje f i g są ciągłe w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalne w przedziale (a, b), to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że:

$$(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c)\,.$$

W przypadku, gdy g' jest ściśle dodatnia (lub ściśle ujemna) na (a, b), zachodzi zatem:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,.$$

Wygodnie myśleć, że $f(t)$ i $g(t)$ to współrzędne punktu krzywej na płaszczyźnie: styczna to tej krzywej w punkcie $(f(c), g(c))$ jest równoległa do siecznej przechodzącej przez $(f(a), g(a))$ i $(f(b), g(b))$. [[rysunek]]

Dowód. Do dowodu pierwszej części wystarczy zastosować twierdzenie Rolle'a do funkcji h danej wzorem $h(t) = (g(b) - g(a))f(t) - (f(b) - f(a))g(t)$: zachodzi $h'(t) = (g(b) - g(a))f'(t) - (f(b) - f(a))g'(t)$ oraz $h(b) - h(a) = 0$. Druga wynika wprost z pierwszej i ścisłej monotoniczności funkcji g. □

Co ciekawe, w drugiej części twierdzenia równoważnie wystarczy założyć, że g' nie przyjmuje wartości zero. Okazuje się bowiem, że funkcja pochodna ma własność Darboux. Gdyby więc przyjmowała wartości różnych znaków, musiałaby przyjmować wartość zero. Dowód własności Darboux funkcji pochodnej jest treścią ćwiczeń dodatkowych na liście zadań nr 15.

8.4. **Ekstrema i monotoniczność.** Zastosowania warunku dostatecznego istnienia ekstremum lokalnego oraz warunków monotoniczności funkcji są niezliczone.

Przykład. Funkcja dana wzorem $f(x) = x^3 - x$ ma dwa ekstrema lokalne, które łatwo znaleźć. W istocie: $f'(x) = 3x^2 - 1$, zatem $f'(x) > 0$ gdy $x \in (-\infty, -\sqrt{1/3}) \cup (\sqrt{1/3}, +\infty)$, zaś $f'(x) < 0$ gdy $x \in (-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$. Oznacza to, że f jest ściśle rosnąca na każdym z przedziałów $(-\infty, -\sqrt{1/3}]$ oraz $[\sqrt{1/3}, +\infty)$ (lecz nie na sumie tych dwóch przedziałów!), zaś ściśle malejąca na przedziale $[-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}]$. W takim razie f ma maksimum lokalne w punkcie $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (i przyjmuje tam wartość $\frac{2}{9}\sqrt{3}$), zaś minimum lokalne w punkcie $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (i przyjmuje tam wartość $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$); ekstrema te są ścisłe.

Przykład. Funkcja dana wzorem $f(x) = -x\ln(x)$ (ważna w teorii informacji) jest ściśle rosnąca na przedziale $(0, \frac{1}{e}]$ oraz ściśle malejąca na przedziale $[\frac{1}{e}, +\infty)$. W istocie: $f'(x) = -\ln(x) - 1 = -\ln(ex)$, zatem $f'(x) > 0$ gdy $x \in (0, \frac{1}{e})$ oraz $f'(x) < 0$ gdy $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$. Wartość największą f osiąga w punkcie $\frac{1}{e}$, wynosi ona $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$.

WNIOSEK 8.24. Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale (a, b) z wyjątkiem punktów $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to f osiąga wartość największą w jednym z punktów $a, b, x_1, x_2, \ldots, x_n$ lub w którymś z punktów $x \in (a, b)$ o własności $f'(x) = 0$. □

Przykład. Niech $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 24x^2$ dla $x \in [0, 5]$. Wówczas $f'(x) = 12x^3 - 60x^2 + 48x = 12x(x^2 - 5x + 4) = 12x(x - 4)(x - 1)$. Zatem f osiąga wartość największą lub najmniejszą w jednym z punktów 0, 1, 4, 5. Odpowiednie wartości to 0, 7, -128, -25, a więc wartość najmniejsza to $f(4) = -128$, wartość największa — $f(1) = 7$.

Przykład. Wśród walców o ustalonej objętości $V > 0$ najmniejsze możliwe pole powierzchni to $3\sqrt[3]{2V^2/\pi}$. W istocie, dla $r \in (0, +\infty)$ wysokością walca o promieniu podstawy r i objętości V jest $V/(\pi r^2)$, zatem $f(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r V/(\pi r^2) = 2\pi r^2 + 2V/r$ opisuje pole powierzchni takiego walca. Skoro $f'(r) = 4\pi r - 2V/r^2 = (4\pi r^3 - 2V)/r^2$, zachodzi $f'(r) < 0$ dla $r \in (0, r_0)$ oraz $f'(r) > 0$ dla $r \in (r_0, +\infty)$, gdzie $r_0 = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$. Wobec tego f jest ściśle malejąca na $(0, r_0]$, ściśle rosnąca na $[r_0, +\infty)$ i osiąga wartość najmniejszą $f(r_0) = 2\pi r_0^2 + 2V/r_0 = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ wtedy, gdy wysokość $V/(\pi r_0^2) = \sqrt[3]{4V/\pi}$ jest równa średnicy podstawy $2r_0$.

Przykład. Niech $f(x) = \arcsin(1 - 2x^2) + |3x + 1|$ dla $x \in [-1, 1]$. Wówczas dla $x \in (-1, 1) \setminus \{-\frac{1}{3}, 0\}$ zachodzi

$$f'(x) = \frac{-4x}{\sqrt{1 - (1 - 2x^2)^2}} + 3\,\mathrm{sign}(3x + 1) = \frac{-2\,\mathrm{sign}(x)}{\sqrt{1 - x^2}} + 3\,\mathrm{sign}(3x + 1).$$

Równanie $f'(x) = 0$ wygodnie rozwiązać osobno w trzech przedziałach: gdy $x \in (-1, -\frac{1}{3})$:

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} - 3,$$

skąd łatwo $f'(x) = 0$ dla $x = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$ (drugie rozwiązanie $x = \frac{1}{3}\sqrt{5}$ leży poza rozważanym przedziałem). Podobnie gdy $x \in (-\frac{1}{3}, 0)$:

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} + 3 > 0.$$

Wreszcie gdy $x \in (-\frac{1}{3}, 0)$:

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1 - x^2}} + 3,$$

skąd jak poprzednio $f'(x) = 0$ dla $x = \frac{1}{3}\sqrt{5}$ (drugie rozwiązanie $x = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$ leży poza rozważanym przedziałem). Wobec tego największej i najmniejszej wartości f należy szukać wśród wartości:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2 - \tfrac{\pi}{2}, & f(0) &= 1 + \tfrac{\pi}{2}, \\ f(-\tfrac{\sqrt{5}}{3}) &= -\arcsin(\tfrac{1}{9}) - 1 + \sqrt{5}, & f(\tfrac{\sqrt{5}}{3}) &= -\arcsin(\tfrac{1}{9}) + 1 + \sqrt{5}, \\ f(-\tfrac{1}{3}) &= \arcsin(\tfrac{7}{9}), & f(1) &= 4 - \tfrac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Liczby te nietrudno porównać, wykorzystując nierówność $x < \arcsin(x) < 2x$: $f(-1) < \frac{1}{2}$, $f(\frac{\sqrt{5}}{3}) > 1 + \sqrt{5} - \frac{2}{9} > 3$, pozostałe liczby są pomiędzy $\frac{1}{2}$ i 3.

8.5. **Reguła de l'Hospitala.** Reguła de l'Hospitala jest prostym sposobem obliczania niektórych skomplikowanych granic.

TWIERDZENIE 8.25 (reguła de l'Hospitala). Jeśli funkcje f i g są ciągłe i różniczkowalne w pewnym przedziale otwartym, którego prawym końcem (skończonym lub

nie) jest b, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = 0$, funkcja $g'(x)$ ma stały znak w rozważanym przedziale oraz $f'(x)/g'(x)$ ma lewostronną granicę w b (właściwą lub nie), to

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Ten sam wzór zachodzi, gdy $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = \infty$. Analogiczne twierdzenie zachodzi też dla granic prawostronnych.

Dowód. Do udowodnienia są w istocie cztery twierdzenia. Najprostszy jest przypadek, gdy b jest liczbą (a nie $b = \infty$), zaś f i g mają w b lewostronną granicę 0: na mocy twierdzenia Cauchy'ego zachodzi:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

dla pewnego punktu $c(x)$ zawartego pomiędzy x i b (przyjmujemy tu dla uproszczenia, że $f(b) = g(b) = 0$). Teza wynika z twierdzenia o granicy złożenia funkcji.

W pozostałych przypadkach dowód jest nieco bardziej skomplikowany. Jeśli $b = \infty$ lub gdy granica $B = \lim\limits_{x\to b^-} (f'(x)/g'(x))$ jest niewłaściwa, można łatwo zmodyfikować poniższy argument (lub zastosować odpowiednie podstawienie — jest to ćwiczenie na liście zadań nr 16), w którym zakłada się, że b oraz B są liczbami.

Niech $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ i niech $\delta > 0$ będzie taka, że $|f'(x)/g'(x) - B| < \varepsilon$ gdy $x \in (b-\delta, b)$. Na mocy twierdzenia Cauchy'ego zachodzi:

$$\left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} - B\right| < \varepsilon$$

jeśli tylko $x_1, x_2 \in (b-\delta, b)$ oraz $x_1 \neq x_2$. W przypadku, gdy $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = 0$ zachodzi zatem

$$\left|\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - B\right| = \lim_{x_2\to b^-} \left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} - B\right| \leqslant \varepsilon$$

dla $x_1 \in (b-\delta, b)$. Wobec dowolności $\varepsilon > 0$, oznacza to zbieżność $f(x)/g(x)$ do a. (Jest to ten sam przypadek, który już rozważyliśmy na początku dowodu).

Jeśli zaś $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = \infty$, to istnieje $x_0 \in (b-\delta, b)$ takie, że $f(x_0) > 0$ i $g(x_0) > 0$, zaś dla tej wartości x_0 istnieje $\eta > 0$ taka, że gdy $x \in (b-\eta, b)$, to $f(x_0) < \varepsilon f(x)$ oraz $g(x_0) < \varepsilon g(x)$. Wówczas:

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\frac{f(x)}{g(x)},$$

skąd:

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Skoro (jak łatwo sprawdzić) $(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon) \leqslant 1+3\varepsilon$ oraz $(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon) \geqslant 1-3\varepsilon$, zachodzi:

$$(1-3\varepsilon)\,\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant (1+3\varepsilon)\,\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Na mocy udowodnionej już nierówności:

$$(1-3\varepsilon)(B-\varepsilon) \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant (1+3\varepsilon)(B+\varepsilon),$$

skąd:

$$-\varepsilon(3B+1-\varepsilon) \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} - B \leqslant \varepsilon(3B+1+\varepsilon),$$

gdy $x \in (b-\eta, b)$. Gdyby na początku przyjąć $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}/(3B+2)$ dla pewnego $\tilde{\varepsilon} \in (0,1)$, powyższa nierówność oznaczałaby $|f(x)/g(x) - B| \leqslant \tilde{\varepsilon}$ gdy $x \in (b-\eta, b)$, co kończy dowód twierdzenia. □

Wniosek 8.26. Jeśli f jest ciągła w a i różniczkowalna w sąsiedztwie punktu a oraz istnieje granica $A = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$, to f jest różniczkowalna w a i $f'(a) = A$. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla granic i pochodnych jednostronnych. W szczególności pochodna funkcji różniczkowalnej w danym przedziale nie ma w tym przedziale nieciągłości pierwszego rodzaju.

Dowód. Wystarczy zastosować regułę de l'Hospitala do funkcji danych wzorami $f(x) - f(a)$ oraz $x - a$ (albo po prostu skorzystać z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej). □

Reguła de l'Hospitala pozwala obliczać wiele granic typu „$\frac{[0]}{[0]}$" lub „$\frac{[\infty]}{[\infty]}$".

Przykład. Zachodzi $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos(x)}{1} = 1$ (jednak granicę tę trzeba było obliczyć, aby wyznaczyć pochodną sin, zatem nie jest to użyteczny rachunek).

Przykład. Zachodzi $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos(x)}{(\sin(x))^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{2\sin(x)\cos(x)} = \dfrac{1}{2}$.

Przykład. Dwukrotne zastosowanie reguły l'Hospitala prowadzi do równości

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\cos(x))^{-2} - \cos(x)}{3x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin(x)(\cos(x))^{-3} + \sin(x)}{6x} = \frac{2+1}{6} = \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Przykład. Zachodzi $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{2^x \ln(2)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{2^x(\ln(2))^2} = 0$.

Reguła ta pozwala też wyznaczać wiele granic typu „$[0]\cdot[\infty]$", „$[1]^{[\infty]}$", „$[0]^{[0]}$" oraz „$[\infty]-[\infty]$" — są to, wraz z wyrażeniami „$\frac{[0]}{[0]}$" oraz „$\frac{[\infty]}{[\infty]}$", *symbole nieoznaczone*.

Przykład. Zachodzi $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln(x)) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$.

Przykład. Zachodzi $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} \exp(x\ln(x)) = \exp(0) = 1$.

Przykład. Zachodzi $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^x(\ln(x)+1)}{1} = -\infty$.

Przykład. Zachodzi $\lim\limits_{x\to\infty} (x\ln(1+\frac{1}{x})) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+\frac{1}{x})^{-1}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = 1$.

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1+1/x)} = e$.

Przykład. Zachodzi $\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg}(x)-1/x) = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{-x\sin(x)}{\sin(x)+x\cos(x)} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{-\sin(x)}{\sin(x)/x+\cos(x)} = 0.$

8.6. **Własność Darboux funkcji pochodnej.** Funkcja pochodna nie ma nieciągłości pierwszego rodzaju, ale może mieć nieciągłości drugiego rodzaju.

Przykład. Jeśli $f(x) = x^2\sin(1/x^2)$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$, to f jest różniczkowalna, ale f' nie jest ciągła w 0. W istocie: dla $x \neq 0$ zachodzi $f'(x) = 2x\sin(1/x^2) - 2\cos(1/x^2)/x$, a (jak łatwo sprawdzić) funkcja ta jest nieograniczona w każdym sąsiedztwie 0. Z drugiej strony $f'(0) = 0$ na mocy twierdzenia o trzech funkcjach: $-x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^2$, więc $-|x| \leqslant f(x)/x \leqslant |x|$.

Co ciekawe, funkcja pochodna ma własność Darboux.

> TWIERDZENIE 8.27. Jeśli f jest różniczkowalna w pewnym przedziale, to f' ma w tym przedziale własność Darboux.

Dowód. Niech a i b będą punktami rozważanego przedziału i niech $a < b$. Niech nadto C będzie liczbą między $f'(a)$ i $f'(b)$. W przypadku, gdy $f'(a) < f'(b)$, dowód jest następujący. Funkcja dana wzorem $g(x) = f(x) - Cx$ osiąga w pewnym punkcie c przedziału $[a,b]$ wartość w tym przedziale najmniejszą. Ponadto $c \neq a$: dla $\varepsilon = -\frac{1}{2}g'(a) = -\frac{1}{2}(f'(a)-C) > 0$ zachodzi $g(x) \leqslant g(a)+(g'(a)+\varepsilon)(x-a) = g(a)+\frac{1}{2}g'(a)(x-a) < g(a)$ dla x z pewnego prawostronnego sąsiedztwa a. Analogicznie $c \neq b$. Wobec tego $c \in (a,b)$, a zatem — na mocy twierdzenia Rolle'a — $g'(c) = 0$. Oznacza to, że $f'(c) = C$. Dowód w przypadku $f'(a) > f'(b)$ jest analogiczny. □

8.7. **Pochodne wyższych rzędów i wzór Taylora.** Funkcja f jest ciągła w 0, jeśli

$$R_0(x) = f(x) - f(0)$$

dąży do zera gdy $x \to 0$. Funkcja f jest różniczkowalna w 0, jeśli

$$R_1(x) = f(x) - (f(0) + f'(0)x)$$

spełnia

$$\lim_{x\to 0}\frac{r_1(x)}{x} = 0.$$

W istocie,

$$\lim_{x\to 0}\frac{r_1(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$$

oraz

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{r_1(x)}{x} + f'(0) = f'(0).$$

Wzór Maclaurina opisuje podobne przybliżenia wartości funkcji f w punktach bliskich 0.

Zauważmy, że jeśli $P(x) = x^n/n!$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, to $P'(x) = x^{n-1}/(n-1)!$, skąd łatwo

$$P^{(k)}(x) = \begin{cases} x^{n-k}/(n-k)! & \text{dla } k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 1 & \text{dla } k = n, \\ 0 & \text{dla } k = n+1, n+2, \ldots \end{cases}$$

Wobec tego

$$P^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } k \neq n, \\ 1 & \text{gdy } k = n. \end{cases}$$

W szczególności jeśli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie 0, to wielomian

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$$

ma w punkcie 0 te same pochodne rzędu $0, 1, \ldots, n$, co funkcja f.

TWIERDZENIE 8.28 (wzór Maclaurina). Jeśli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie 0,

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$$

jest *n-tym wielomianem aproksymacyjnym* funkcji f oraz

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

oznacza *n-tą resztę*, to

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0.$$

Innymi słowy

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + R_n(x),$$

gdzie $R_n(x)$ maleje szybciej niż x^n gdy $x \to 0$.

Dowód. Zauważmy, że $R_n^{(k)}(0) = 0$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Stosując $(n-1)$-krotnie regułę de l'Hospitala, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^n/n!} &= \lim_{x\to 0} \frac{R_n'(x)}{x^{n-1}/(n-1)!} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{R_n''(x)}{x^{n-2}/(n-2)!} \\ &= \ldots \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{x} = R_n^{(n)}(0) = 0; \end{aligned}$$

w ostatnim kroku wykorzystaliśmy definicję pochodnej. □

Rozważając funkcję $g(x) = f(x_0 + x)$, natychmiast otrzymujemy wzór Taylora.

TWIERDZENIE 8.29 (wzór Taylora). Jeśli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie x_0 oraz

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \qquad \square$$

Choć powyższe twierdzenia nie zawierają wzoru na resztę $R_n(x)$ innego niż definicja, mówi się o nich, że podają resztę w postaci Peana. Później poznamy jeszcze trzy inne wzory na $R_n(x)$.

Wzór Taylora pozwala przybliżać funkcję przy pomocy wielomianu P_n zadanego stopnia. Przybliżenie to jest najlepsze z możliwych, gdy x dąży do x_0. Można jednak zadać pytanie, czy kolejne wielomiany P_n przybliżają f coraz lepiej, gdy $n \to \infty$. W ogólności nie jest to prawdą: ciąg $(P_n(x))$ może być rozbieżny dla wszystkich $x \neq x_0$ (więcej: dla dowolnego ciągu (a_n) istnieje funkcja f taka, że $f^{(n)}(x_0) = a_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$), a jeśli jest zbieżny, granicą wcale nie musi być $f(x)$; odpowiednie przykłady wymagają jednak wiedzy z drugiego semestru. Mimo to w wielu przypadkach faktycznie $P_n(x)$ dąży do $f(x)$. Aby to wykazać, potrzebna jest inna reprezentacja reszty $R_n(x)$; w tej chwili warto jednak przyjrzeć się dwóm przykładom.

Przykład. Jeśli $f(x) = e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $f^{(k)}(x) = e^x$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, zatem wielomianem aproksymacyjnym w 0 funkcji f jest wielomian wykorzystany w definicji funkcji wykładniczej:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

W tym wypadku ciąg $(P_n(x))$ jest zbieżny do $f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Przykład. Niech $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Jak łatwo sprawdzić, $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, zatem $f^{(k)}(0) = k!$ dla $k \in \mathbb{N}$. Stąd wynika, że wielomianem aproksymacyjnym funkcji f w 0 jest

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n.$$

Oznacza to, że ciąg $(P_n(x))$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|x| < 1$, zaś granicą w istocie jest $f(x)$.

8.8. **Druga pochodna.** Wzór Taylora z resztą rzędu 2 pozwala podać następujący warunek dostateczny istnienia ekstremum.

TWIERDZENIE 8.30. Jeśli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie x_0 oraz $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$, to f ma w punkcie x_0 ścisłe maksimum lokalne. Jeśli zaś $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$, to f ma w x_0 ścisłe minimum lokalne.

Dowód. Przypuśćmy, że $f''(x_0)/2 = -a$ dla pewnego $a > 0$. Wtedy

$$f(x) = f(x_0) - a(x - x_0)^2 + R_2(x),$$

gdzie

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0.$$

Oznacza to, że dla pewnego $\delta > 0$ zachodzi

$$\left|\frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2}\right| < a$$

gdy $|x - x_0| < \delta$ i $x \neq x_0$, przez co

$$f(x) = f(x_0) - a(x-x_0)^2 + R_2(x) < f(x_0),$$

czyli f ma w x_0 ścisłe maksimum lokalne. Dowód drugiej części jest analogiczny. □

W praktyce powyższe kryterium wymaga zwykle więcej rachunków niż badanie znaku pierwszej pochodnej. Są jednak sytuacje, w których jest ono wygodniejsze.

Podkreślmy, że gdy $f''(x_0) = 0$, funkcja f może mieć w x_0 ekstremum lub nie, o czym świadczą funkcje dane wzorami x^3, x^4 oraz $-x^4$ (gdzie $x_0 = 0$).

Znak drugiej pochodnej na przedziale określa typ wypukłości funkcji.

DEFINICJA 8.31. Funkcja f jest *wypukła* na przedziale I, jeśli dla dowolnych punktów x_1, x_2 tego przedziału oraz dowolnego $t \in (0,1)$ zachodzi [[rysunek]]

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$

lub, równoważnie, z warunku $x_1 < x_2 < x_3$ (gdzie $x_1, x_2, x_3 \in I$) wynika nierówność

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Gdy zachodzi ścisła nierówność, mówimy, że f jest *ściśle wypukła*. Analogicznie definiuje się funkcję *wklęsłą* i *ściśle wklęsłą* na I, żądając odpowiednio nierównoci „$\geqslant$" oraz „$>$".

Jeśli f jest wklęsła na przedziale $(a, c]$, wypukła na przedziale $[c, b)$ i różniczkowalna w c, to c nazywany jest *punktem przegięcia* funkcji f.

Równoważność opisanych wyżej warunków wypukłości sprawdza się bezpośrednim rachunkiem, zastępując w pierwszym warunki x_1 i x_2 przez $\tilde{x}_1$ i $\tilde{x}_2$ oraz przyjmując $x_1 = \tilde{x}_1$, $x_3 = \tilde{x}_2$ oraz $x_2 = (1-t)\tilde{x}_1 + t\tilde{x}_2$ (czyli $t = (x_2 - x_1)/(x_3 - x_1)$). W istocie, pierwszy warunek oznacza wtedy, że

$$f(x_2) \leqslant \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3),$$

co jest równoważne drugiemu warunkowi.

TWIERDZENIE 8.32. Jeśli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w przedziale (a, b) oraz $f''(x) \geqslant 0$ dla $x \in (a, b)$, to f jest wypukła w przedziale (a, b). Gdy $f''(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$, to f jest ściśle wypukła. Analogicznie nierówność $f(x) \leqslant 0$ oznacza wklęsłość f, zaś nierówność $f''(x) < 0$ — ścisłą wklęsłość. Jeśli f jest funkcją wypukłą na (a, b) oraz f jest dwukrotnie różniczkowalna w przedziale (a, b), to $f''(x) \geqslant 0$ dla wszystkich $x \in (a, b)$; dwukrotnie różniczkowalne funkcje wklęsłe mają zaś niedodatnią drugą pochodną.

Dowód. Jeśli $f''(x) \geqslant 0$ dla $x \in (a,b)$, to f' jest funkcją rosnącą na (a,b). Na mocy twierdzenia o wartości średniej, jeśli $x_1 < x_2 < x_3$, to istnieją punkty $c_1 \in (x_1, x_2)$ oraz $c_2 \in (x_2, x_3)$ takie, że

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} f'(c_2).$$

Pozostaje zauważyć, że $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$. Analogicznie dowodzi się pozostałych przypadków omówionych w pierwszej części twierdzenia.

Do dowodu drugiej części wystarczy zauważyć, że jeśli $x_1 < x_2$ oraz $s > 0$ jest dostatecznie małe, to

$$\frac{f(x_1+s)-f(x_1)}{s} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1+s)}{x_2-x_1-s} \leqslant \frac{f(x_2+s)-f(x_2)}{s},$$

skąd wynika, że $f'_+(x_1) \leqslant f'_+(x_2)$, czyli $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$. Oznacza to, że f' jest rosnąca, czyli f'' jest nieujemna. Analogicznie rozważa się przypadek funkcji wklęsłych. □

Zauważmy, że jeśli f jest określona i jednostronnie ciągła na końcach przedziału (a,b), to wypukłość na (a,b) implikuje wypukłość na $[a,b]$.

Przykład. Funkcje dane wzorami e^x, x^a dla $a \geqslant 1$ lub $a \leqslant 0$, $\operatorname{tg}(x)$ na $[0, \frac{\pi}{2})$ oraz $\sin(x)$ na $[-\pi, 0]$ są wypukłe (na każdym przedziale, na jakim są określone). Funkcje dane wzorami $\ln(x)$, x^a dla $a \in [0,1]$, $\cos(x)$ na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ oraz $\sin(x)$ na $[0,\pi]$ są wklęsłe.

Przykład. Niech $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ dla $x > 0$. Wtedy $f''(x) = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}$, zatem f jest wklęsła na przedziale $(0, e^{3/2}]$ oraz wypukła na przedziale $[e^{3/2}, \infty)$, zaś $e^{3/2}$ jest punktem przegięcia funkcji f. Biorąc pod uwagę również to, że f jest malejąca na $(0,e]$ i rosnąca na $[e,\infty)$ oraz to, że dąży do zera w ∞ i do nieskończoności w 0, możemy dość dokładnie naszkicować wykres funkcji f. [[rysunek]]

Przykład. Niech $f(x) = x\ln(x)$. Łatwo sprawdzić, że $f''(x) = \frac{1}{x}$, zatem f jest ściśle wypukła na $(0,\infty)$.

9. Całka nieoznaczona

9.1. **Definicje.** Całkowanie to operacja przeciwna do różniczkowania.

DEFINICJA 9.1. Jeśli F jest funkcją różniczkowalną w pewnym przedziale otwartym (lub sumie przedziałów otwartych) I oraz $f(x) = F'(x)$ dla $x \in I$, to mówimy, że F jest *funkcją pierwotną* lub *całką nieoznaczoną* funkcji f na I i piszemy

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Jeśli funkcja f ma funkcję pierwotną na I, to mówimy, że jest *całkowalna na* I (w sensie całki nieoznaczonej).

Sposób oznaczania funkcji pierwotnej przez $\int f(x)dx$ zostanie wyjaśniony później, podczas omawiania całki Riemanna. W całym rozdziale I oznacza pewien przedział otwarty lub sumę przedziałów otwartych.

Funkcja pierwotna nie jest wyznaczona jednoznacznie.

TWIERDZENIE 9.2. Jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f i $C \in \mathbb{R}$, to $F+C$ też jest funkcją pierwotną funkcji f. Jeśli F_1 i F_2 są funkcjami pierwotnymi funkcji funkcji f, to $F_1 - F_2$ jest funkcją stałą na każdym przedziale zawartym w dziedzinie funkcji f.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $(F + C)' = F' + 0 = F'$ oraz $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$ i wykorzystać udowodniony wcześniej fakt o tym, że funkcja o zerowej pochodnej na przedziale jest na tym przedziale stała. □

Z powodu powyższego twierdzenia zwykle stosuje się zapis

$$F(x) = \int f(x)dx + C,$$

gdzie C oznacza dowolną stałą rzeczywistą.

Przykład. Zachodzi:

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C.$$

Dowód kolejnych dwóch twierdzeń jest trudniejszy: pierwsze zostanie udowodnione na koniec semestru, drugie stanowczo wykracza poza ramy niniejszego kursu.

TWIERDZENIE 9.3. Każda funkcja ciągła na danym przedziale ma funkcję pierwotną.

TWIERDZENIE 9.4. Funkcja pierwotna funkcji elementarnej może być nieelementarna. Na przykład funkcje pierwotne funkcji danych wzorami $\exp(x^2)$, $\sin(x^2)$, $\sin(x)/x$ oraz $\sqrt{1+x^3}$ są nieelementarne.

9.2. **Podstawowe techniki obliczania całek nieoznaczonych.** Wykorzystując wzory na pochodne podstawowych funkcji elementarnych łatwo wyprowadzić podstawowe wzory

na całki:

$$\int 1dx = x + C \qquad \text{(bo } (x)' = 1\text{)},$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \qquad \text{dla } a \neq -1 \qquad \text{(bo } (x^{a+1})' = (a+1)x^a\text{)},$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C \qquad \text{(bo } (\ln(x))' = 1/x \text{ oraz } (\ln(-x))' = 1/x\text{)},$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} \qquad \text{dla } a > 0,\ a \neq 1,$$

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C,$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C,$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \arctan(x) + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin(x) + C.$$

TWIERDZENIE 9.5. Jeśli funkcje f i g są całkowalne (na tym samym zbiorze I),

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad \int g(x)dx = G(x) + C$$

oraz $a \in \mathbb{R}$, to

$$\int af(x)dx = aF(x) + C, \qquad \int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + C$$

(w szczególności więc wzory $af(x)$ i $f(x) + g(x)$ określają funkcje całkowalne na I).

Dowód. Dla dowodu wystarczy przypomnieć, że $(aF)' = af$ oraz $(F + G)' = f + g$. □

Przykład. Zachodzi

$$\int \frac{x^4+1}{x^2+1}\, dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{2}{x^2+1}\right) dx = \int x^2 dx + \int (-1)dx + \int 2 \cdot \frac{1}{x^2+1}\, dx$$
$$= \int x^2 dx - \int 1dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{x^3}{3} - x + 2\,\mathrm{arctg}(x) + C.$$

Kolejne dwa twierdzenia, choć bardzo proste, dostarczają dwóch najważniejszych technik całkowania.

TWIERDZENIE 9.6 (wzór na całkowanie przez części). Jeśli funkcje f i g są różniczkowalne, to

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(w szczególności więc funkcja dana wzorem $f(x)g'(x)$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy całkowalna jest funkcja $f'(x)g(x)$).

Dowód. Wystarczy przypomnieć, że $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. □

TWIERDZENIE 9.7 (wzór na całkowanie przez podstawienie). Jeśli f jest całkowalna na I,

$$\int f(y)dy = F(y) + C,$$

zaś funkcja g jest różniczkowalna na danym przedziale i przyjmuje wartości w I, to

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

(w szczególności więc funkcja dana wzorem $f(g(x))g'(x)$ jest całkowalna na omawianym przedziale).

Dowód. Wystarczy przypomnieć, że $(F(g(x))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$. □

Zastosowanie powyższego twierdzenia zapisuje się skrótowo jako podstawienie $y = g(x)$, $dy = g'(x)dx$. Zapisowi temu nie nadajemy formalnego sensu.

Przykład. Dla $a \neq 0$ zachodzi

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1 + (x/a)^2}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1 + (x/a)^2}\left(\frac{x}{a}\right)'dx.$$

Skoro

$$\int \frac{1}{1 + y^2}\,dy = \operatorname{arctg}(y) + C,$$

na mocy wzoru na całkowanie przez podstawienie otrzymujemy

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{\operatorname{arctg}(x/a)}{a} + C.$$

W skrócie piszemy: podstawiając $y = x/a$, $dy = (x/a)'dx = (1/a)dx$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx &= \int \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1 + (x/a)^2}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1 + (x/a)^2} \cdot \frac{1}{a}\,dx \\ &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1 + y^2}\,dy = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(y) + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C.\end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że stała całkowania C występuje w powyższych wzorach poza nawiasem — o ile nie zachodzi ryzyko błędu, zwykle stosuje się taki zapis. (W razie wątpliwości można zawsze stałą C pominąć).

Przykład. Podstawiając $y = \ln(x)$, $dy = (1/x)dx$, otrzymujemy

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int y dy = \frac{y^2}{2} + C = \frac{(ln(x))^2}{2} + C.$$

Przykład. Na mocy wzoru na całkowanie przez części,

$$\begin{aligned}\int \ln(x)dx &= \int \ln(x) \cdot (x)'dx = \ln(x) \cdot x - \int (\ln x)' \cdot x dx \\ &= x\ln(x) - \int 1dx = x\ln(x) - x + C.\end{aligned}$$

Ogólniej, jeśli $a \neq -1$, to

$$\int x^a \ln(x)dx = \frac{1}{a+1}\int \ln(x)\cdot(x^{a+1})'dx = \frac{x^{a+1}\ln(x)}{a+1} - \frac{1}{a+1}\int (\ln x)'\cdot x^{a+1}dx$$
$$= \frac{x^{a+1}\ln(x)}{a+1} - \frac{1}{a+1}\int x^a dx = \frac{x^{a+1}\ln(x)}{a+1} - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2} + C.$$

Przykład. Na mocy wzoru na całkowanie przez części,

$$\int x^2e^x dx = \int x^2(e^x)'dx = x^2e^x - \int (x^2)'e^x dx = x^2e^x - 2\int x(e^x)'dx$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2\int (x')e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Wniosek 9.8. Jeśli funkcja f jest całkowalna na I,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

oraz $a \in \mathbb{R}$, to

$$\int f(x+a)dx = F(x+a) + C \qquad \text{(na zbiorze } \{x \in \mathbb{R} : x + a \in I\}),$$

$$\int f(ax)dx = \frac{F(ax)}{a} + C \qquad \text{gdy } a \neq 0 \text{ (na zbiorze } \{x \in \mathbb{R} : ax \in I\}),$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|F(x)| + C \qquad \text{(na zbiorze } \{x \in I : F(x) \neq 0\}).$$

Dowód. Można sprawdzić wynik bezpośrednim rachunkiem lub wykorzystać podstawienie $y = x + a$, $dy = dx$ w pierwszym przypadku, $y = ax$, $dy = adx$ w drugim oraz $y = f(x)$, $dy = f'(x)dx$ w trzecim. □

Przykład. Podamy dwa sposoby obliczenia całki z $(\sin(x))^2$. Pierwszy: ze wzorów trygonometrycznych otrzymujemy

$$\int (\sin(x))^2 dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C.$$

Drugi: na mocy wzoru na całkowanie przez części zachodzi

$$\int (\sin(x))^2 dx = -\int \sin(x)(\cos(x))'dx$$
$$= -\sin(x)\cos(x) + \int (\sin(x))'\cos(x)dx$$
$$= -\sin(x)\cos(x) + \int (\cos(x))^2 dx$$
$$= -\sin(x)\cos(x) + \int (1 - (\sin(x))^2)dx$$
$$= -\sin(x)\cos(x) + \int 1dx - \int (\sin(x))^2 dx$$
$$= -\sin(x)\cos(x) + x - \int (\sin(x))^2 dx,$$

skąd

$$2\int(\sin(x))^2dx = -\sin(x)\cos(x) + x + C,$$

czyli

$$\int(\sin(x))^2dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + C.$$

Przykład. Podamy dwa sposoby obliczenia całki z $\sin(3x)\sin(7x)$. Pierwszy: ze wzorów trygonometrycznych otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int\sin(3x)\sin(7x)dx &= \int\frac{\cos(4x)-\cos(10x)}{2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int\cos(4x)dx - \frac{1}{2}\int\cos(10x)dx = \frac{\sin(4x)}{8} - \frac{\sin(10x)}{20} + C.\end{aligned}$$

Drugi: na mocy wzoru na całkowanie przez części zachodzi

$$\begin{aligned}&\int\sin(3x)\sin(7x)dx\\ &\quad= -\frac{1}{7}\int\sin(3x)(\cos(7x))'dx\\ &\quad= -\frac{1}{7}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{1}{7}\int(\sin(3x))'\cos(7x)dx\\ &\quad= -\frac{1}{7}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{3}{7}\int\cos(3x)\cos(7x)dx\\ &\quad= -\frac{1}{7}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{3}{49}\int\cos(3x)(\sin(7x))'dx\\ &\quad= -\frac{1}{7}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{3}{49}\cos(3x)\sin(7x) - \frac{3}{49}\int(\cos(3x))'\sin(7x)dx\\ &\quad= -\frac{1}{7}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{3}{49}\cos(3x)\sin(7x) + \frac{9}{49}\int\sin(3x)\sin(7x)dx,\end{aligned}$$

skąd

$$\frac{40}{49}\int\sin(3x)\sin(7x)dx = -\frac{1}{7}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{3}{49}\cos(3x)\sin(7x),$$

czyli

$$\int\sin(3x)\sin(7x)dx = -\frac{7}{40}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{3}{40}\cos(3x)\sin(7x) + C.$$

9.3. **Całkowanie funkcji wymiernych.** Funkcja wymierna to iloraz dwóch wielomianów. Całkowanie takich funkcji składa się z czterech kroków:

(1) Dzielenie z resztą licznika przez mianownik. Całkowanie ilorazu (który jest wielomianem) nie przedstawia trudności, pozostaje całka z funkcji wymiernej, w której stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika.

(2) Rozkład mianownika na czynniki nierozkładalne. Na mocy zasadniczego twierdzenia algebry są to bądź czynniki liniowe, bądź kwadratowe o ujemnym wyróżniku (a w przypadku funkcji o współczynnikach zespolonych — wyłącznie czynniki liniowe). Choć taki rozkład zawsze istnieje, wyznaczenie go w sposób jawny jest często niemożliwe. Ściślej: twierdzenie Abela orzeka, że istnieją wielomiany (dowolnego stopnia $n \geqslant 5$), których pierwiastki nie mogą zostać wyrażone przy

pomocy wzorów z pierwiastkami. Na kursie algebry liniowej podano sposób rozkładania wielomianów stopnia 2 (podobne wzory istnieją dla wielomianów stopnia 3 i 4), a także znajdowania pierwiastków wymiernych w przypadku wielomianów o współczynnikach całkowitych. Najogólniejszych narzędzi do znajdowania wzorów na pierwiastki danego wielomianu dostarcza *teoria Galoisa*, dość skomplikowana, ale piękna dziedzina algebry abstrakcyjnej.

(3) Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste, uzyskany przez rozwiąznie odpowiedniego układu równań lub przez obliczenie wartości odpowiednich funkcji w odpowiednich punktach. Metoda została szczegółowo omówiona na kursie algebry liniowej.

(4) Całkowanie ułamków prostych. Ten temat jest szczegółowo omówiony poniżej.

Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju jest całkiem proste:

$$\int \frac{p}{x-a}\,dx = p\ln|x-a| + C$$

oraz dla $n \geqslant 2$:

$$\int \frac{p}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{p}{n-1}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

Z ułamkami prostymi drugiego rodzaju jest nieco więcej kłopotu. Podstawiając $y = x+\frac{a}{2}$, $dy = dx$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int \frac{px+q}{x^2+ax+b}\,dx &= \int \frac{py+(q-pa/2)}{y^2+(4b-a^2)/4}\,dy \\ &= \frac{p}{2}\int \frac{2y}{y^2+(4b-a^2)/4}\,dy + (q-pa/2)\int \frac{1}{y^2+(4b-a^2)/4}\,dy \\ &= \frac{p}{2}\ln(y^2+(4b-a^2)/4) + \frac{q-pa/2}{\sqrt{4b-a^2}/2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{4b-a^2}/2}\right) + C \\ &. = \frac{p}{2}\ln(x^2+ax+b) + \frac{2q-pa}{\sqrt{4b-a^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}}\right) + C\end{aligned}$$

(bowiem pierwsza całka jest postaci $\int f'(y)/f(y)dy$ dla $f(y) = y^2+(4b-a^2)/4$, zaś druga została wyznaczona w jednym z poprzednich przykładów). Analogicznie całkę

$$\int \frac{px+q}{(x^2+ax+b)^n}\,dx$$

dla $n \geqslant 2$ sprowadza się do całek

$$\int \frac{2y}{(y^2+A^2)^n}\,dy = -\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{(y^2+A^2)^{n-1}} \qquad \text{oraz} \qquad \int \frac{1}{(y^2+A^2)^n}\,dy,$$

przy czym drugą z nich oblicza się rekurencyjnie: całkując przez części, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(y^2+A^2)^{n-1}}\,dy &= \int \frac{1}{(y^2+A^2)^{n-1}}\,(y')dy\\ &= \frac{y}{(y^2+A^2)^{n-1}} + \int \frac{2(n-1)y}{(y^2+A^2)^n}\,ydy\\ &= \frac{y}{(y^2+A^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{y^2}{(y^2+A^2)^n}\,dy\\ &= \frac{y}{(y^2+A^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{1}{(y^2+A^2)^{n-1}}\,dy\\ &\qquad - 2(n-1)A^2\int \frac{1}{(y^2+A^2)^n}\,dy,\end{aligned}$$

co pozwala wyznaczyć całkę z wykładnikiem n przy pomocy całki z wykładnikiem $n-1$.

Przykład. Obliczamy:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x^3+x^2+x+1}\,dx &= \int \left(x-1+\frac{1}{x^3+x^2+x+1}\right)dx\\ &= \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{x^3+x^2+x+1}dx\\ &= \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx.\end{aligned}$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x^3+x^2+x+1}\,dx &= \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x+1}+\frac{1-x}{x^2+1}\right)dx\\ &= \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\left(\ln(|x+1|) + \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right) + C.\end{aligned}$$

9.4. **Sprowadzanie niektórych całek do całek z funkcji wymiernych.** Całki z wyrażeń postaci $R(\sin(x),\cos(x))$, gdzie R jest funkcją wymierną dwóch zmiennych, sprowadza się do całek z funkcji wymiernej przy pomocy jednego z podstawień:

(1) $y=\sin(x)$, $dy=\cos(x)dx$: w przypadku, gdy $R(u,-v)=-R(u,v)$;
(2) $y=\cos(x)$, $dy=-\sin(x)dx$: w przypadku, gdy $R(-u,v)=-R(u,v)$;
(3) $y=\operatorname{tg}(x)$, $dy=\dfrac{1}{(\cos(x))^2}\,dx$: w przypadku, gdy $R(-u,-v)=R(u,v)$;
(4) $y=\operatorname{tg}(x/2)$: w ogólnym przypadku.

Pierwsze dwa podstawienia są raczej proste, trzeba tylko pamięteć, że

$$(\cos(x))^2 = 1-(\sin(x))^2 = 1-y^2$$

w pierwszym z nich oraz

$$(\sin(x))^2 = 1-(\cos(x))^2 = 1-y^2$$

w drugim. Przy podstawieniu $y=\operatorname{tg}(x)$ stosuje się wzory:

$$(\cos(x))^2 = \frac{1}{1+(\operatorname{tg}(x))^2} = \frac{1}{1+y^2}, (\sin(x))^2 \qquad = (\operatorname{tg}(x))^2(\cos(x))^2 = \frac{y^2}{1+y^2},$$

a także wynikający ze związku $x = \operatorname{arctg}(y)$ wzór

$$dx = \frac{1}{1+y^2}\,dy$$

(o którym więcej za chwilę). Przy podstawieniu ogólnym $y = \operatorname{tg}(x/2)$ stosuje się wzory:

$$\sin(x) = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+(\operatorname{tg}(x/2))^2} = \frac{2y}{1+y^2},$$
$$\cos(x) = \frac{1-(\operatorname{tg}(x/2))^2}{1+(\operatorname{tg}(x/2))^2} = \frac{1-y^2}{1+y^2},$$

a także wynikający ze związku $x = 2\operatorname{arctg}(y)$ wzór

$$dx = \frac{2}{1+y^2}\,dy.$$

W ostatnich dwóch podstawieniach należy być ostrożnym: punkty, w których tangens jest nieokreślony, mogą należeć do dziedziny całkowanej funkcji. W tym przypadku wzór ogólny można uzyskać, zastępując wyrażenia postaci $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x))$ przez x i wykonując podobne przekształcenia bardziej skomplikowanych składników; szczegółowe sformułowanie i dowód tego faktu są jednak dość pracochłonne i dlatego je pomijamy.

W tych samych dwóch podstawieniach wzór $dy = g'(x)dx$ zapisano w inny sposób: $dx = (g^{-1})'(y)dy$. Innymi słowy zastosowano wzór na całkowanie przez podstawienie w przeciwnym kierunku aby obliczyć całkę $\int f(x)dx$ oblicza się wpierw

$$\int f(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y)dy = G(y) + C$$

i zapisuje się

$$\int f(x)dx = G(g(x)) + C.$$

Aby to rozumowanie było poprawne, funkcja g musi być odwracalna. W przypadku podstawień $y = \operatorname{tg}(x)$ i $y = \operatorname{tg}(x/2)$ tak jest tylko wtedy, gdy ograniczymy zakres x odpowiednio do $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ oraz $(-\pi, \pi)$. Znów wzór ogólny otrzymamy, zastępując m.in. wyrażnia postaci $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x))$ przez x; ponownie pomijamy szczegółowe sformułowanie i uzasadnienie tego faktu.

Przy całkowaniu przez podstawienie można zastosować jeszcze ogólniejsze przekształcenie: można wzór na podstawienie $y = g(x)$ przekształcić do postaci

$$g_1(x) = g_2(y)$$

i zastosować wzór

$$g_1'(x)dx = g_2'(y)dy.$$

Należy w tym wypadku pamiętać, aby funkcja g_1 była odwracalna.

Przykład. Całkę $\int \operatorname{tg}(x)dx$ można obliczyć, wykorzystując dowolne z czterech omówionych wyżej podstawień. W tym przypadku $\operatorname{tg}(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = R(\sin(x), \cos(x))$, gdzie $R(u, v) = \dfrac{u}{v}$.

(1) Skoro $R(u,-v)=\dfrac{u}{-v}=-\dfrac{u}{v}=-R(u,v)$, można stosować podstawienie $y=\sin(x)$. Otrzymujemy:

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx=\int \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^2}\,\cos(x)dx=\int \frac{y}{1-y^2}\,dy.$$

Ostatnią całkę obliczamy przez rozkład na ułamki proste:

$$\begin{aligned}\int \frac{y}{1-y^2}\,dy&=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{y+1}\,dy-\frac{1}{2}\int \frac{1}{y-1}\,dy\\&=-\frac{1}{2}\ln(|y+1|)-\frac{1}{2}\ln(|y-1|)+C=-\frac{1}{2}\ln(|y^2-1|)+C.\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx&=-\frac{1}{2}\ln(|(\sin(x))^2-1|)+C\\&=-\frac{1}{2}\ln((\cos(x))^2)+C=-\ln(|\cos(x)|)+C.\end{aligned}$$

(2) Skoro $R(-u,v)=\dfrac{-u}{v}=-\dfrac{u}{v}=-R(u,v)$, można stosować podstawienie $y=\cos(x)$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx&=\int \frac{-1}{\cos(x)}\,(-\sin(x))dx=\int \frac{-1}{y}\,dy\\&=-\ln(|y|)+C=-\ln(|\cos(x)|)+C.\end{aligned}$$

Jest to najprostszy sposób obliczenia rozważanej całki.

(3) Skoro $R(-u,-v)=\dfrac{-u}{-v}=\dfrac{u}{v}=R(u,v)$, można stosować podstawienie $y=\operatorname{tg}(x)$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx&=\int \frac{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}}\,\frac{1}{1+y^2}\,dy=\int \frac{y}{1+y^2}\,dy\\&=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+C=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{(\cos(x))^2}\right)+C\\&=-\ln(|\cos(x)|)+C.\end{aligned}$$

(4) Podstawiając $y=\operatorname{tg}(x/2)$, otrzymujemy:

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx=\int \frac{\frac{2y}{1+y^2}}{\frac{1-y^2}{1+y^2}}\,\frac{2}{1+y^2}\,dy=\int \frac{4y}{1-y^4}\,dy.$$

Całkę tę najłatwiej policzyć, podstawiając $y^2=z$, $2ydy=dz$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx&=\int \frac{2}{1-z^2}\,dz=\int\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-1}\right)dz\\&=\ln(|z+1|)-\ln(|z-1|)+C=-\ln\left(\left|\frac{1-z}{1+z}\right|\right)+C\\&=-\ln\left(\left|\frac{1-y^2}{1+y^2}\right|\right)+C=-\ln(|\cos(x)|)+C.\end{aligned}$$

Przykład. Rozważmy całkę $\int \frac{\sin(x)}{3+\cos(x)-\sin(x)}\,dx$, odpowiadającą funkcji $R(u,v) = u/(3+v-u)$. Łatwo sprawdzić, że jedynym możliwym podstawieniem jest to ogólne. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x)}{3+\cos(x)-\sin(x)}\,dx &= \int \frac{\frac{2y}{1+y^2}}{3+\frac{1-y^2}{1+y^2}-\frac{2y}{1+y^2}}\,\frac{2}{1+y^2}\,dy \\ &= \int \frac{4y}{(3(1+y^2)+(1-y^2)-2y)(1+y^2)}\,dy \\ &= \int \frac{2y}{(2-y+y^2)(1+y^2)}\,dy \\ &= \int \left(\frac{ay+b}{1+y^2}+\frac{cy+d}{2-y+y^2}\right)dy\end{aligned}$$

dla pewnych stałych a,b,c,d. (Nietrudno wyliczyć: $a=1$, $b=-1$, $c=-1$, $d=2$). Stąd

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x)}{3+\cos(x)-\sin(x)}\,dx &= \frac{a}{2}\ln(1+y^2)+b\,\mathrm{arctg}(y)+\frac{c}{2}\ln(2-y+y^2) \\ &\quad+\left(d+\frac{c}{2}\right)\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)+C \\ &= -a\ln\left(\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)+\frac{bx}{2}+\frac{c}{2}\ln\left(2-\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right) \\ &\quad+\frac{2d+c}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\,\mathrm{tg}(\frac{x}{2})-1}{\sqrt{7}}\right)+C.\end{aligned}$$

Zauważmy, że powyższy wzór jest prawidłowy na dowolnym przedziale $(2k\pi-\pi, 2k\pi+\pi)$, ale aby uzyskać wzór właściwy na całym $\mathbb{R}$, potrzebne są dalsze przekształcenia, w których istotną rolę odgrywa równość $a+c=0$.

Niektóre inne całki również można sprowadzić do całek z funkcji wymiernych lub całek z wyrażeń postaci $R(\sin(x),\cos(x))$, gdzie R jest funkcją wymierną. W poniższej liście R jest zawsze funkcją wymierną (jednej lub dwóch zmiennych).

(1) Całki postaci $\int R(e^x)dx$ sprowadza się do całek z funkcji wymiernych przy pomocy podstawienia $e^x = y$, $x = \ln(y)$, $dx = \frac{1}{y}\,dy$.

(2) Całki postaci $\int R(x,\sqrt{ax+b})dx$ sprowadza się do całek z funkcji wymiernych przy pomocy podstawienia $\sqrt{ax+b} = y$, $x = (y^2-b)/a$, $dx = (2y/a)dy$.

(3) Całki postaci $\int R(x,\sqrt{1-x^2})dx$ oblicza się przy pomocy podstawienia $x = \sin(y)$, $dx = \cos(y)dy$, $\sqrt{1-x^2} = \cos(y)$ (gdzie $y \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$) do omawianych całek z wyrażeń wymiernych od $\sin(y)$ i $\cos(y)$.

(4) Analogicznie całki postaci $\int R(x,\sqrt{1+x^2})dx$ oblicza się przy pomocy podstawienia $x = \mathrm{tg}(y)$, $dx = (\cos(y))^{-2}dy$, $\sqrt{1+x^2} = (\cos(y))^{-2}$ (gdzie $y \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$).

(5) Analogicznie całki postaci $\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx$ oblicza się przy pomocy podstawienia $x = (\cos(y))^{-1}$, $dx = \sin(y)(\cos(y))^{-2}dy$, $\sqrt{x^2-1} = \operatorname{tg}(y)$ (gdzie $x > 0$, $y \in (0, \frac{\pi}{2})$) lub $\sqrt{x^2-1} = -\operatorname{tg}(y)$ (gdzie $x < 0$, $y \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$).

(6) Całki postaci $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ można sprowadzić przez podstawienie $y = px + q$ do jednej z powyższych trzech całek.

(7) Alternatywne podstawienia to $x = \tanh(y)$ dla całek postaci $\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$, $x = \sinh(y)$ dla całek postaci $\int R(x, \sqrt{1+x^2})dx$ oraz $x = \cosh(y)$ dla całek postaci $\int R(x, \sqrt{1+x^2})dx$ — pozwalają one otrzymać całki z funkcji wymiernych od e^y.

(8) Połączenie podstawień opisanych w poprzednim punkcie z podstawieniam $e^y = z$ prowadzi do tzw. *podstawień Eulera*.

10. Całka oznaczona

10.1. **Definicja i interpretacje.** Całka oznaczona zdefiniowana jest niezwykle prosto.

DEFINICJA 10.1. Jeśli F jest funkcją ciągłą na $[a,b]$ oraz funkcją pierwotną funkcji f na przedziale (a,b), to wielkość $F(b)-F(a)$ nazywamy *całką oznaczoną* funkcji f na przedziale (a,b) i piszemy

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

Przy obliczaniu całek oznaczonych zwykle wpierw wyznacza się całkę nieoznaczoną. Dla uproszczenia stosuje się zapis

$$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}=F(b)-F(a).$$

Zauważmy, że wartość różnicy $F(b)-F(a)$ nie zależy od wyboru stałej całkowania: $(F(b)+C)-(F(a)+C)=F(b)-F(a)$. Z tego powodu zwykle pomija się stałą całkowania, gdy ostatecznie obliczana jest całka oznaczona.

Stosowany jest też ogólniejszy zapis

$$F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}=\lim_{x\to b^-}F(x)-\lim_{x\to a^+}F(x),$$

wygodny, gdy a lub b są spoza dziedziny funkcji F, ale F ma odpowiednie jednostronne granice. Pozwala to zapisać ogólniej: jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale (a,b), to

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Przykład. Zachodzi:

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}.$$

Mimo prostoty definicji, całka oznaczona ma mnóstwo zastosowań:

- Jeśli $v(t)$ opisuje prędkość chwilową, to
$$\int_{t_1}^{t_2}v(t)dt$$
to całkowite przesunięcie między chwilą t_1 a t_2.
- Przy odpowiednich założeniach (wystarcza ciągłość funkcji y_1 i y_2 na przedziale $[a,b]$) wzór
$$\int_a^b(y_2(x)-y_1(x))dx$$
opisuje *pole* figury (nazywanej *trapezem krzywoliniowym*)
$$\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\};$$
zakładamy tu, że $y_1(x)\leqslant y_2(x)$ dla wszystkich $x\in[a,b]$. Do tego zagadnienia wrócimy w kolejnym semestrze.

- Analogicznie wzór
$$\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}dx$$
opisuje *długość* krzywej danej przez wykres różniczkowalnej funkcji y. Do tego zagadnienia również wrócimy w kolejnym semestrze.
- Podobnie można obliczyć objętość i pole powierzchni bocznej bryły obrotowej
$$\{(x,y,z) : a \leqslant x \leqslant b,\ \sqrt{y^2+z^2} \leqslant r(x)\};$$
są to odpowiednio
$$\int_a^b \pi(r(x))^2dx \qquad \text{oraz} \qquad \int_a^b 2\pi r(x)\sqrt{1+(r'(x))^2}dx.$$
- Objętość i pole powierzchni bocznej bryły obrotowej
$$\{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \leqslant R, z_1(\sqrt{x^2+y^2}) \leqslant z \leqslant z_2(\sqrt{x^2+y^2})\}$$
są z kolei dane wzorami
$$\int_0^R 2\pi r(z_2(r)-z_1(r))dr \qquad \text{oraz} \int_0^R 2\pi r\sqrt{1+(z'(r))^2}dr.$$

Przypomnijmy, że $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$. W szczególności więc pole obszaru ograniczonego parabolą o równaniu $y = x^2$ oraz prostymi $x = 1$ i $y = 0$ wynosi $\frac{1}{3}$; fakt ten został po raz pierwszy udowodniony przez Archimedesa.

10.2. **Podstawowe własności.** Z własności całek nieoznaczonych wynikają natychmiast odpowiednie własności całek oznaczonych.

TWIERDZENIE 10.2. Jeśli funkcje f i g są mają całkę oznaczoną na przedziale (a,b) oraz $c \in \mathbb{R}$, to
$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \quad \square$$

Bardzo prosty jest dowód kolejnej własności.

TWIERDZENIE 10.3. Jeśli $a < b < c$ oraz funkcja f ma całkę oznaczoną na przedziale (a,c), to ma też całki oznaczone na przedziałach (a,b) oraz (b,c) i ponadto
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $F(c)-F(a) = (F(b)-F(a)) + (F(c)-F(b))$. $\square$

Powyższe twierdzenie sugeruje następujące oznaczenie, które upraszcza wiele zapisów: jeśli $a < b$, to przyjmujemy
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \qquad \text{oraz} \qquad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Co ciekawe, istnienie całek oznaczonych na (a,b) i (b,c) nie oznacza istnienia całki oznaczonej na (a,c). Przykładem jest funkcja $\operatorname{sign}(x)$, która ma całki oznaczone na przedziałach $(-1,0)$ oraz $(0,1)$, ale nie na przedziale $(-1,1)$.

Wzory na całkowanie przez podstawienie i przez części mają swoje warianty dla całek oznaczonych.

TWIERDZENIE 10.4 (wzór na całkowanie przez części). Jeśli funkcje f i g są różniczkowalne na przedziale (a,b) i ciągłe na przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

(w szczególności więc funkcja dana wzorem $f(x)g'(x)$ ma całkę oznaczoną na przedziale (a,b) wtedy i tylko wtedy, gdy ma ją funkcja $f'(x)g(x)$). □

TWIERDZENIE 10.5 (wzór na całkowanie przez podstawienie). Jeśli f jest całkowalna na (A,B), zaś funkcja g jest ciągła na $[a,b]$, różniczkowalna na (a,b) i w przedziale (a,b) przyjmuje wartości w (A,B), to

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

(w szczególności więc funkcja dana wzorem $f(g(x))g'(x)$ ma całkę oznaczoną na (a,b), jeśli $g(a), g(b) \in (A,B)$; gdy $g(a)$ lub $g(b)$ należą do $\{A,B\}$, wystarczy założyć, że f ma całkę oznaczoną na (A,B)). □

Przykład. Podstawiając $y = 1+4x$, $dy = 4dx$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{1+4x}\,dx &= \frac{1}{4}\int_0^2 \sqrt{1+4x}\,(1+4x)'dx = \frac{1}{4}\int_1^9 \sqrt{y}\,dy \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{y^{3/2}}{3/2}\Big|_{y=1}^{y=9} = \frac{1}{4}\cdot\frac{9^{3/2}-1^{3/2}}{3/2} = \frac{27-1}{6} = \frac{13}{3}.\end{aligned}$$

Przykład. Zachodzi

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin(x)dx &= \int_0^\pi x(-\cos(x))'dx \\ &= -x\cos(x)\big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi (x)'(-\cos(x))dx \\ &= -\pi\cos(\pi) + 0\cos(0) + \int_0^\pi \cos(x)dx \\ &= \pi + \sin(x)\big|_{x=0}^{x=\pi} = \pi + \sin(\pi) - \sin(0) = \pi.\end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę na różnicę między $\pi + \sin(x)\big|_{x=0}^{x=\pi} = \pi$ oraz $(\pi+\sin(x))\big|_{x=0}^{x=\pi} = 0$.

10.3. **Wzór Taylora.** Znamy już wzór Taylora z resztą w postaci Peana. Dysponując pojęciem całki, łatwiej udowodnić wzór Taylora z resztami w postaci Lagrange'a i Cauchy'ego. Zacznijmy od najogólniejszego wyniku: wzoru Taylora z resztą w postaci całkowej.

TWIERDZENIE 10.6 (wzór Taylora z resztą w postaci całkowej). Przypuśćmy, że funkcja f jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna w przedziale (x_0,x) lub (x,x_0), a jej pochodne rzędu co najwyżej n mają odpowiednie jednostronne granice w punktach x_0 oraz x,

oznaczane dla uproszczenia symbolem $f^{(k)}(x_0)$ i $f^{(k)}(x)$. Niech

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

Wówczas

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(s)(x - s)^n ds.$$

Dowód. Wzoru dowodzi się indukcyjnie: dla $n = 0$ jest to po prostu definicja całki oznaczonej,

$$R_0(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(s)ds.$$

Jeśli wzór jest już udowodniony dla pewnego n, to całkując przez części, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(s)(x - s)^{n+1} ds \\
&\quad = \int_{x_0}^{x} (f^{(n+1)}(s))'(x - s)^{n+1} ds \\
&\quad = \frac{f^{(n+1)}(s)(x - s)^{n+1}}{(n+1)!}\Bigg|_{s=x_0}^{s=x} - \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(s)((x - s)^{n+1})' ds \\
&\quad = 0 - \frac{f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(s)(x - s)^n ds \\
&\quad = R_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = R_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Napisane wyżej całki istnieją na mocy założeń twierdzenia i wzoru na całkowanie przez części. □

Do uzyskania pozostałych postaci reszty potrzebny nam będzie wariant twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej.

TWIERDZENIE 10.7 (pierwsze twierdzenie o wartości średniej dla całki oznaczonej). Jeśli funkcja f ma całkę oznaczoną na przedziale (a, b), to dla pewnego $c \in (a, b)$ zachodzi

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c).$$

Dowód. Jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to wystarczy zastosować twierdzenie Lagrange'a dla funkcji F. □

WNIOSEK 10.8. Jeśli funkcja f ma całkę oznaczoną na przedziale (a, b) i przyjmuje wartości nieujemne, to

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

Jeśli f przyjmuje wartości dodatnie, to całka z f jest ściśle większa od zera. Jeśli funkcje f i g mają całki oznaczone na przedziale (a,b) oraz $f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in (a,b)$, to

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

Ponownie jeśli $f(x) < g(x)$ dla $x \in (a,b)$, to zachodzi powyższy wzór ze ścisłą nierównością.

Dowód. Pierwsza część wynika wprost z twierdzenia o wartości średniej. Druga jest konsekwencją pierwszej zastosowanej do funkcji $g(x) - f(x)$. □

Twierdzenie 10.9 (wzór Taylora z resztą w postaci Cauchy'ego i Lagrange'a). Przy założeniach twierdzenia o wzorze Taylora z resztą w postaci całkowej zachodzi

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-x_0)}{n!}$$

dla pewnego c z przedziału (x_0,x) lub (x,x_0) (jest to tzw. *postać Cauchy'ego* reszty). Podobnie

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

dla pewnego c z przedziału (x_0,x) lub (x,x_0) (jest to tzw. *postać Lagrange'a* reszty).

Dowód. Pierwszy wzór uzyskujemy wprost z pierwszego twierdzenia o wartości średniej dla całki oznaczonej. Aby uzyskać drugi, podstawiamy wpierw $t = (x-s)^{n+1}$, $-(n+1)(x-s)^n ds = dt$, $s = x - t^{1/(n+1)}$:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(s)(x-s)^n ds \\ &= -\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(s)((x-s)^{n+1})' ds \\ &= -\frac{1}{(n+1)!}\int_{(x-x_0)^{n+1}}^{0} f^{(n+1)}(x-t^{1/(n+1)})dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\int_{0}^{(x-x_0)^{n+1}} f^{(n+1)}(x-t^{1/(n+1)})dt \end{aligned}$$

i dopiero wtedy korzystamy z pierwszego twierdzenia o wartości średniej dla całki oznaczonej. □

Podkreślmy, że punkt pośredni c w obu reprezentacjach jest zwykle inny.

Przykład. Kolejne pochodne funkcji $\cos(x)$ są cyklicznie równe: $\cos(x)$, $-\sin(x)$, $-\cos(x)$, $\sin(x)$; ich wartości w zerze to cyklicznie: $1, 0, -1, 0$. Wobec tego jeśli $n = 2k$ lub $n = 2k+1$, to wzór Taylora przyjmuje postać

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_n(x),$$

przy czym jeśli $n = 2k$, to

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(2k)!}\int_0^x (-1)^{k+1}\sin(s)(x-s)^{2k}ds \\ &= \frac{(-1)^{k+1}\sin(c)x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

dla pewnego c, zaś jeśli $n = 2k+1$, to

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(2k+1)!}\int_0^x (-1)^{k+1}\cos(s)(x-s)^{2k+1}ds \\ &= \frac{(-1)^{k+1}\cos(c)x^{2k+2}}{(2k+2)!} \end{aligned}$$

dla pewnego c (wykorzystaliśmy tu postacie całkową i postać Lagrange'a). W obu przypadkach zachodzi $|R_n(x)| \leqslant |x|^{n+1}/(n+1)!$, zatem $(R_n(x))$ dąży do zera gdy $n \to \infty$. Ostatecznie

$$\cos(x) = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

Zupełnie analogicznie dowodzi się, że

$$\sin(x) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

Jak wspomniano wcześniej, wzory te mogły w istocie służyć za definicje funkcji trygonometrycznych.

10.4. **Przykłady zastosowań całek oznaczonych.** Przede wszystkim możemy obliczyć obwód i pole koła.

Przykład. Pole jednostkowego koła wynosi

$$A = \int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2}))dx = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx.$$

Stosując podstawienie $x = \sin(y)$, $dx = \cos(y)dy$ (a właściwie $y = \arcsin(x)$), otrzymujemy

$$A = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-(\sin(y))^2}\cos(y)dy = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(y))^2 dy.$$

Dalej już łatwo:

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos(2y))dy = y + \frac{\sin(2y)}{2}\Big|_{y=-\pi/2}^{y=\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2}+\frac{0}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}+\frac{0}{2}\right) = \pi.$$

Przykład. Obwód jednostkowego koła to z kolei

$$\begin{aligned} L &= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1+((\sqrt{1-x^2})')^2}dx = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = 2\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= 2\arcsin(x)\big|_{x=-1}^{x=1} = 2\arcsin(1) - 2\arcsin(-1) = \pi - (-\pi) = 2\pi. \end{aligned}$$

Powyższe przykłady stają się ciekawsze, gdy do analizy stosujemy czysto formalne podejście. Wtedy funkcje $\sin(x)$ i $\cos(x)$ są zdefiniowane przy pomocy szeregów. Z tych definicji wywodzi się znanych własności funkcji trygonometrycznych, z których m.in. wynika, że istnieje liczba $p > 0$ taka, że $\sin(x) > 0$ dla $x \in (0, p)$ oraz $\sin(p) = 0$, $\cos(p) = 1$. Wówczas powyższe przykłady (wraz z twierdzeniami o całce Riemanna, które udowodnimy w przyszłym semestrze) pozwalają stwierdzić, że pole obszaru $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ wynosi $2p$, zaś długość krzywej $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ to $4p$.

Przykład. Zachodzi

$$\int_0^1 \ln(x)dx = (x\ln(x) - x)\big|_{x=0}^{x=1} = (1\ln(1) - 1) - \lim_{x\to 0^+}(x\ln(x) - x) = -1 - 0 = -1.$$

Oznacza to, że — w pewnym sensie — pole nieograniczonego obszaru $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x = 0 \text{ lub } \ln(x) \leqslant y \leqslant 0\}$ jest skończone i wynosi 1.

Przykład. Obliczymy

$$a_n = \int_0^\pi (\sin(x))^n dx.$$

Oczywiście $a_0 = \pi$ oraz

$$a_1 = \int_0^\pi \sin(x)dx = \cos(x)\big|_{x=0}^{x=\pi} = 1 - (-1) = 2.$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= \int_0^\pi (\sin(x))^n(1 - (\cos(x))^2)dx \\
&= \int_0^\pi (\sin(x))^n dx - \int_0^\pi (\sin(x))^n(\cos(x))^2 dx \\
&= a_n - \frac{1}{n+1}\int_0^\pi ((\sin(x))^{n+1})'\cos(x)dx \\
&= a_n - \frac{1}{n+1}(\sin(x))^{n+1}\cos(x)\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{1}{n+1}\int_0^\pi (\sin(x))^{n+1}(\cos(x))'dx \\
&= a_n - (0-0) - \frac{1}{n+1}\int_0^\pi (\sin(x))^{n+2}dx = a_n - \frac{a_{n+2}}{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Oznacza to, że

$$a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,a_n.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k} = \pi\cdot\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,, \\
a_{2k+1} &= 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2k}{2k+1} = 2\cdot\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\,;
\end{aligned}$$

tu *dwusilnia liczby* n, oznaczana $n!!$, jest zdefiniowana wzorami $0!! = 1!! = 1$, $n!! = n\cdot(n-2)!!$ dla $n \geqslant 2$.

Zauważmy, że $(\sin(x))^{n+1} < (\sin(x))^n$ dla $x \in (0, \pi)$, zatem $a_{n+1} < a_n$. W takim razie

$$\frac{a_{2k+1}/2}{a_{2k}/\pi} < \frac{\pi}{2} < \frac{a_{2k-1}/2}{a_{2k}/\pi}\,.$$

Oznacza to, że

$$\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2k}{2k+1}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}}<\frac{\pi}{2}<\frac{\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-2}{2k-1}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}}\,.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot\ldots\cdot(2k-2)\cdot(2k-2)\cdot(2k\quad)\cdot(2k\quad)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2k-3)\cdot(2k-1)\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}&<\pi\\ <\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot\ldots\cdot(2k-2)\cdot(2k-2)\cdot(2k\quad)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2k-3)\cdot(2k-1)\cdot(2k-1)}&\,.\end{aligned}$$

Przy pomocy dwusilni powyższe oszacowanie możemy zapisać krócej w postaci

$$\frac{((2k)!!)^2}{(2k+1)!!(2k-1)!!}<\frac{\pi}{2}<\frac{(2k)!!(2k-2)!!}{((2k-1)!!)^2}\,.$$

Oznaczmy lewą stronę powyższych nierówności przez p_k. Wtedy prawa strona tych nierówności ma wartość $\frac{2k+1}{2k}p_k$. Wobec tego $\frac{2k}{2k+1}\frac{\pi}{2}<p_k<\frac{\pi}{2}$. Na mocy twierdzenia o trzech ciągach, ciąg (p_k) jest zbieżny do $\frac{\pi}{2}$, tzn. zachodzi *wzór Wallisa*:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}&=\lim_{k\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot\ldots\cdot(2k-2)\cdot(2k-2)\cdot(2k\quad)\cdot(2k\quad)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2k-3)\cdot(2k-1)\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}\\ &=\lim_{k\to\infty}\frac{((2k)!!)^2}{(2k+1)!!(2k-1)!!}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1-(-1)^k}{2k+1+(-1)^k}\,.\end{aligned}$$