

---

KOŁOKWIUM Z TOPOLOGII  
29 kwietnia 2008

---

1. Niech  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  będzie ściśle rosnącą funkcją rzeczywistą. Określmy:

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|.$$

Niech  $e$  oznacza standardową metrykę „moduł różnicy” na  $\mathbf{R}$ . Udowodnić, że:

- (a)  $d$  jest metryką na  $\mathbf{R}$ ;
- (b)  $f$  jest ciągła z  $(\mathbf{R}, e)$  w  $(\mathbf{R}, d)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $d$  jest słabsza od  $e$ .

ZADANIE DODATKOWE: Znaleźć warunek równoważny zupełności  $(\mathbf{R}, d)$ .

2. W przestrzeni  $C([0, 1])$  funkcji ciągłych na  $[0, 1]$  rozważamy metrykę supremum. Znaleźć domknięcie i wnętrze zbioru:

$$\{f \in C([0, 1]) : f \text{ jest funkcją ściśle rosnącą}\}.$$

3. Rozważmy ciągi  $(x_n), (y_n)$  zdefiniowane rekurencyjnie wzorami:

$$(x_0, y_0) = (0, 0), \quad (x_{n+1}, y_{n+1}) = \left( \sin \frac{y_n}{3}, 1 + \frac{x_n + y_n}{3} \right).$$

Udowodnij, że ciągi  $(x_n), (y_n)$  są zbieżne.

WSKAZÓWKA: W sumie to zadanie jest łatwe. Maksymalnie też można uzyskać 5 punktów.

4. Rozstrzygnąć prawdziwość poniższych zdań. Odpowiedzi nie uzasadniać.

- (a) Każdy zbiór gęsty ma puste wnętrze.
- (b) Jeśli  $d$  jest metryką, to domknięciem  $\{y : d(x, y) < r\}$  jest  $\{y : d(x, y) \leq r\}$ .
- (c) Każda funkcja  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  jest lipschitzowska, jeśli na  $X$  rozważamy metrykę dyskretną, a na  $\mathbf{R}$  metrykę euklidesową.
- (d) Jeśli  $d$  jest metryką, to  $d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) \leq 2d(p, x) + 2d(p, y) + 2d(p, z)$ .
- (e) Metryki  $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$  i  $d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx}$  na przestrzeni funkcji ciągłych  $C([0, 1])$  są równoważne.

UWAGI: Za każde z zadań 1., 2., 3. można uzyskać 5 punktów. W zadaniu 4. punkt przyznawany jest za każdą poprawną odpowiedź i odejmowany za każdą błędną. Brak odpowiedzi nie jest punktowany. W razie potrzeby wynik kolokwium jest zaokrąglany w górę do najbliższej liczby nieujemnej. Czas pisania — 90 minut.

Powodzenia!

Agata i Mateusz Kwaśniccy