TEORIA POTENCJAŁU PROCESÓW MARKOWA
SZKIC NOTATEK

MATEUSZ KWAŚNICKI

Zarys

Ten kurs składać się będzie z trzech części:

(1) *Klasyczna teoria potencjału*: badanie funkcji harmonicznych oraz operatora Laplace'a Δ (krótko; literatura: Wermer).
(2) *Probabilistyczna teoria potencjału*: związek ruchu Browna z operatorem Laplace'a (literatura: Chung–Zhao, Doob).
(3) Probabilistyczna *ogólna teoria potencjału*: procesy Markowa (literatura: Chung–Walsch, Sharpe).

1. Elektrostatyka

1.1. **Wprowadzenie.** Oznaczmy: $\vec{E}$ — pole elektryczne, μ — rozkład ładunku elektrycznego. Przyjmujemy, że wielkości te nie zależą od czasu, a więc brak jest pola magnetycznego $\vec{B}$ i prądu $\vec{J}$. Przypadek ogólny (elektrodynamiki) jest krótko omówiony w zadaniach dodatkowych.

Notacja. Oznaczamy: $\nabla \cdot \vec{E}$ — dywergencja, $\nabla \times \vec{E}$ — rotacja (w przypadku $d = 3$), $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ — operator Laplace'a.

Prawo Coulomba (uzyskane eksperymentalnie) orzeka, że

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \, \mu(dy).$$

Siłą rzeczy zakładamy tu, że $\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\vec{y}|^2) |\mu|(dy) < \infty$.

Oberwacja: zachodzi

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} = \nabla_y U(\vec{x}, \vec{y}),$$

gdzie

$$U(\vec{x}, \vec{y}) = U(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}.$$

Jeśli więc dopuszczalna jest zmiana kolejności gradientu i całki, to zachodzi

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_y U(\vec{x}, \vec{y}) \mu(dy) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_x U(\vec{x}, \vec{y}) \mu(dy) \\ &= -\nabla \int_{\mathbb{R}^3} U(\vec{x}, \vec{y}) \mu(dy). \end{aligned}$$

Założenia potrzebne do tej równości — a także wielu innych własności z tego rozdziału — zbadane zostaną dokładniej na ćwiczeniach.

DEFINICJA 1.1. *Potencjałem Newtona* miary μ nazywamy

$$U\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^3} U(\vec{x}, \vec{y})\mu(dy) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}\, \mu(dy),$$

o ile $\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\vec{y}|)^{-1} \mu(d\vec{y}) < \infty$. Ogólniej w $\mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 3$) *potencjałem Newtona* miary μ nazywamy analogiczną całkę z jądrem

$$U(\vec{x}, \vec{y}) = U(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{(d-2)\sigma_d} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|},$$

gdzie $\sigma_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(\frac{d}{2})$ jest miarą powierzchniową sfery jednostkowej $\partial B(\vec{0}, 1)$ w $\mathbb{R}^d$; wtedy

$$\frac{1}{\sigma_d} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^d} = \nabla_y U(\vec{x}, \vec{y}).$$

Można też rozwinąć teorię dla wymiaru $d = 2$, ale jest ona inna: rozważa się zmieniające znak jądro $U(x, y) = -\frac{1}{\pi} \log |\vec{x} - \vec{y}|$, a z pomocą przychodzi teoria funkcji analitycznych. Nie będziemy się jednak zajmować tym przypadkiem.

Notacja. Gdy miara μ ma gęstość, to oznaczamy ją tym samym symbolem; piszemy więc $U\mu$ również gdy μ jest funkcją. Stosujemy też ten sam symbol na oznaczenie funkcji (lub miary) i operatora splotu z tą funkcją (lub miarą), tak jak w definicji potencjału Newtona: $U\mu$ to splot funkcji $U(\vec{x})$ i miary $\mu(d\vec{x})$. Analogicznie utożsamiamy jądro (czyli funkcję dwóch zmiennych) z operatorem, które owo jądro wyznacza — w przypadku potencjału Newtona jądrem operatora U jest $U(\vec{x}, \vec{y})$.

1.2. **Potencjał jako operator odwrotny do operatora Laplace'a.** Naszym celem jest zbadanie związków między μ, $\vec{E}$ oraz $U\mu$. Wiemy już, jak wyznaczyć $\vec{E}$ oraz $U\mu$, znając μ. Wiemy też — przynajmniej nieformalnie — że przy odpowiednich założeniach zachodzi $\vec{E} = -\nabla U\mu$. Pole elektryczne $\vec{E}$ jest więc, z dokładnością do zmiany znaku, gradientem potencjału Newtona $U\mu$.

Z kursu z analizy wiadomo, że jeśli γ jest kawałkami różniczkowalną krzywą o początku $\vec{x}_1$ i końcu $\vec{x}_2$, $U\mu$ ma ciągłe pochodne cząstkowe w otoczeniu γ (czyli jest klasy C^1 w otoczeniu γ) oraz $\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla U\mu(\vec{x})$, to

$$\int_\gamma \vec{E}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = U\mu(\vec{x}_1) - U\mu(\vec{x}_2)$$

wyraża pracę pola $\vec{E}$ wzdłuż krzywej γ. Tak wyznacza się potencjał skalarny pola wektorowego $\vec{E}$ — oczywiście jest on określony tylko z dokładnością do stałej. Zatem potencjał Newtona miary ładunku μ jest potencjałem skalarnym pola elektrycznego.

Jeśli $U\mu$ ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu w otoczeniu $\vec{x}_0$ (czyli jest klasy C^2 w otoczeniu $\vec{x}_0$) oraz $\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla U\mu(\vec{x})$, to — skoro pochodne mieszane drugiego rzędu są sobie równe — zachodzi

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Ponadto

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = -\Delta U\mu(\vec{x}).$$

Wykażemy, że przy odpowiednich założeniach (albo przy odpowiednim rozumieniu równości) zachodzi $-\Delta U\mu = \mu$. Oznacza to, że miara ładunku μ jest, z dokładnością do zmiany znaku, laplasjanem potencjału Newtona $U\mu$, a więc dywergencją pola elektrycznego $\vec{E}$.

Z kursu z analizy znamy następujące dwa wyniki.

TWIERDZENIE 1.2 (o dywergencji). Zachodzi:

$$\int_D \nabla \cdot \vec{E}(\vec{y})d\vec{y} = \oint_{\partial D} \vec{E}(\vec{z}) \cdot \vec{n}_z \sigma(dz),$$

gdzie D jest obszerem o brzegu kawałkami gładkim, $\vec{n}_z$ oznacza skierowany na zewnątrz wektor normalny, σ jest miarą powierzchniową na ∂D, zaś $\vec{E}$ polem wektorowy klasy C^1 w $\overline{D}$.

TWIERDZENIE 1.3 (trzeci wzór Greena). Zachodzi:

$$u(\vec{x}) = -\int_D U(\vec{x},\vec{y})\Delta u(\vec{y})d\vec{y} + \oint_{\partial D} (U(\vec{x},\vec{z})\nabla u(\vec{z}) - u(\vec{z})\nabla_y U(\vec{x},\vec{z})) \cdot \vec{n}_z dz,$$

gdzie D oraz $\vec{n}_z$ są jak w twierdzeniu o dywergencji, u jest zaś funkcją klasy C^2 w $\overline{D}$.

Warto przypomnieć dowód trzeciego wzoru Greena: sprawdza się, że $\Delta_y U(x,y) = 0$ i stosuje się twierdzenie o dywergencji dla funkcji $u(\vec{y})\nabla_y U(\vec{x},\vec{y}) - U(\vec{x},\vec{y})\nabla u(\vec{y})$ w zbiorze $D \setminus B(\vec{x},\varepsilon)$. Po nietrudnych rachunkach i przejściu do granicy $\varepsilon \to 0^+$ otrzymuje się trzeci wzór Greena.

Załóżmy, że u jest klasy C^2 w $\mathbb{R}^d$ i spełnione są warunki $\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\vec{y}|)^{2-d}|\Delta u(\vec{y})|d\vec{y} < \infty$, $\lim_{|\vec{y}|\to\infty}(1+|\vec{y}|)\nabla u(\vec{y}) = 0$ oraz $\lim_{|\vec{y}|\to\infty} u(\vec{y}) = 0$. Stosując wzór Greena dla u oraz $D = B(\vec{0},r)$, a następnie przechodząc do granicy $r \to \infty$, otrzymujemy trzeci wzór Greena dla $\mathbb{R}^d$ (który zachodzi w istocie przy słabszych warunkach):

$$u(\vec{x}) = -\int_{\mathbb{R}^d} U(\vec{x},\vec{y})\Delta u(\vec{y})d\vec{y} = -U\Delta u(\vec{x}).$$

W szczególności jeśli $u = U\mu$ spełnia powyższe warunki, to $U\mu = u = -U\Delta u = -U\Delta U\mu$ (prawą stronę rozumiemy oczywiście jako $U(\Delta(U\mu))$). Ponieważ operator U jest różnowartościowy — o czym za chwilę — zachodzi równość, której potrzebujemy: $\mu(d\vec{y}) = -\Delta(U\mu)(\vec{y})d\vec{y}$.

Wykazanie, że U jest różnowartościowy, jest stosunkowo proste, ale wymaga odrobiny ostrożności. Jeśli μ ma gęstość $\mu(\vec{y})$ klasy C^2, to $\Delta U\mu = \Delta(U * \mu) = U * \Delta\mu = U\Delta\mu$ na mocy własności splotu. Na mocy trzeciego wzoru Greena oznacza to, że $\Delta U\mu = -\mu$. Jeśli więc $U\mu = 0$, to $\mu = 0$. Gdy μ jest dowolną miarą oraz $U\mu = 0$, wystarczy teraz rozważyć splot μ z jednością aproksymatywną i zastosować wynik dotyczący miar o gęstościach klasy C^2. Pomijamy tu szczegóły, bowiem i tak dowód nie jest do końca formalny: nie sprawdzamy, czy $U\mu$ spełnia warunki potrzebne do zastosowania trzeciego wzoru Greena.

1.3. **Funkcje harmoniczne.** Można wykazać, że równość $\mu = -\Delta U\mu$ ma charakter lokalny: zachodzi, o ile $U\mu$ jest klasy C^2 w otoczeniu danego punktu. W szczególności jeśli μ jest miarą zerową w obszarze D (czyli $|\mu|(D) = 0$), to $U\mu$ jest funkcją harmoniczną w D: $\Delta U\mu = 0$ w D. Naszym celem będzie teraz zbadanie własności funkcji harmonicznych.

Po krótkich rachunkach [[szczegóły]], wykorzystując trzeci wzór Greena dla kuli $B(\vec{0}, r)$, otrzymujemy następującą własność: jeśli u jest klasy C^2 w kuli $\overline{B}(0, r)$ oraz u jest harmoniczna w $B(\vec{0}, r)$, to

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B(\vec{0},r)} u(\vec{y}) d\vec{y}.$$

Powyższa równość nazywana jest *własnością wartości średniej*. Warto podkreślić, że prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne: funkcje mające własność wartości średniej są harmoniczne. Inna wersja tej własności udowodniona zostanie na ćwiczeniach.

Bezpośrednim wnioskiem z własności wartości średniej jest *zasada maksimum*: funkcja harmoniczna nie może mieć ścisłych ekstremów lokalnych wewnątrz obszaru harmoniczności.

Jeszcze innym wnioskiem (wymagającym dowodu) jest *własność Liouville'a*: nieujemne funkcje harmoniczne w $\mathbb{R}^d$ są stałe.

1.4. **Funkcja Greena i jądro Poissona.**

Notacja. Dla wygody opuszczamy strzałki w oznaczeniach wektorów: zamiast $\vec{x}$ piszemy x.

Rozważmy $x \in B(0, r) \setminus \{0\}$ oraz $z \in \partial B(0, r)$. Niech $x^* = (r^2/|x|^2)x$ będzie obrazem x w inwersji względem sfery $\partial B(0, r)$. Bezpośrednim rachunkiem (analitycznym lub geometrycznym: trójkąty $0xz$ oraz $0zx^*$ są podobne) łatwo sprawdzić sprawdzić, że

$$|x^* - z| = \frac{r|x - z|}{|x|}.$$

Oznacza to, że dwie funkcje zmiennej y: $U(x, y)$ (harmoniczna w $B(0, r) \setminus \{x\}$) oraz $(r/|x|)^{d-2} U(x^*, y)$ (harmoniczna w $B(0, r)$) przyjmują jednakowe wartości na brzegu obszaru $B(0, r)$. Niech

$$G_{B(0,r)}(x, y) = U(x, y) - (r/|x|)^{d-2} U(x^*, y)$$

dla $x, y \in \overline{B}(0, r)$, $x \neq 0$. Niech ponadto $G_{B(0,r)}(0, y) = U(x, y) - c_d r^{2-d}$ dla $y \in \overline{B}(0, r)$. Oznaczmy dodatkowo

$$P_{B(0,r)}(x, z) = \nabla_y G_{B(0,r)}(x, z) \cdot n_z = \frac{1}{\omega_d r} \frac{1 - |x|^2}{|x - z|^d}$$

dla $x \in B(0, r) \setminus \{0\}$, $y \in \partial B(0, r)$. Z trzeciego wzoru Greena wynika, że dla dowolnej funkcji u klasy C^2 w $\overline{D}$ zachodzi

$$u(x) = -\int_{B(0,r)} U(x, y) \Delta u(y) dy + \oint_{\partial B(0,r)} (U(x, z) \nabla u(z) - u(z) \nabla_y U(x, z)) \cdot n_z \sigma(dz),$$

zaś z twierdzenia o dywergencji (dla pola wektorowego $U(x^*, y)\nabla u(y) - u(y)\nabla_y U(x^*, y)$, tak jak w dowodzie trzeciego wzoru Greena, lecz z $x^* \notin D$) oraz

$$0 = -\int_{B(0,r)} U(x^*, y) \Delta u(y) dy + \oint_{\partial B(0,r)} (U(x^*, z) \nabla u(z) - u(z) \nabla_y U(x^*, z)) \cdot n_z \sigma(dz).$$

Mnożąc obie strony drugiej z powyższych równości przez $(r/|x|)^{d-2}$, a następnie odejmując je od stron pierwszej, otrzymujemy

$$u(x) = -\int_{B(0,r)} G_{B(0,r)}(x, y) \Delta u(y) dy + \oint_{\partial B(0,r)} u(z) \nabla_y G_{B(0,r)}(x, z) \cdot n_z \sigma(dz).$$

Dowodzi to następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE 1.4 (rozwiązanie równania Poissona w kuli). Jeśli u jest klasy C^2 w kuli $\overline{B}(0,r)$, to

$$u(x) = -\int_{B(0,r)} G_{B(0,r)}(x,y)\Delta u(y)dy + \oint_{\partial B(0,r)} u(z)P_B(x,z)\sigma(dz).$$

Zamieniając $\Delta u(y)$ na $g(y)$ oraz $u(z)$ na $f(z)$, otrzymujemy wzór na rozwiązanie równania Poissona: $\Delta u = g$ w D, $u = f$ w ∂D — o ile prawa strona określa funkcję u klasy C^2 w $\overline{D}$. Można to założenia osłabić; ostatecznie wystarcza ciągłość f w ∂D i odpowiednia ciągłość g w $\overline{D}$ (np. warunek Höldera; przy odpowiednim rozumieniu laplasjanu wystarcza nawet zwykła ciągłość g, lecz wówczas uzyskana funkcja u wcale nie musi być klasy C^2 w D).

Analogiczne twierdzenie zachodzi w dowolnym ograniczonym obszarze D o następujących własnościach: brzeg D jest odpowiednio regularny (tak, aby był sens mówienia o wektorze normalnym oraz mierze powierzchniowej i aby zachodziło twierdzenie o dywergencji) oraz dla dowonej funkcji ciągłej f na brzegu ∂D istnieje funkcja u harmoinczna w D i ciągła w $\overline{D}$, która jest równa f na brzegu ∂D (czyli u rozwiązuje zagadnienie Dirichleta z warunkiem brzegowym f). Dowód przepisuje się wówczas bez zmian, po zastąpieniu $U(x^*, y)$ funkcją harmoniczną w D i równą na brzegu funkcji $U(x, z)$.

Powyższe warunki są spełnione przy dość łagodnych założeniach o zbiorze D: wystarcza, że istnieje stożek V taki, że w każdym punkcie ∂D można zaczepić dwa stożki izometryczne z V, jeden zawarty w D, drugi zaś z D rozłączny (czyli gdy D jest *zbiorem Lipschitza*). Wtedy w prawie każdym (względem miary powierzchniowej σ) punkcie ∂D istnieje wektor normalny i zachodzi twierdzenie o dywergencji — jest to twierdzenie o różniczkowalności prawie wszędzie funkcji lipschitzowskich, które wykracza poza ramy niniejszego wykładu. Ponadto, jak wykażemy, w takich obszarach D zagadnienie Dirichleta ma jednoznaczne rozwiązanie. Klasyczny dowód wykorzystuje metody analizy rzeczywistej. My wykorzystamy dużo bardziej intuicyjny probabilistyczny dowód, w którym kluczową rolę odgrywa ruch Browna, czyli wielowymiarowy proces Wienera.

2. Ruch Browna

Podstawowym obiektem w probabilistycznej teorii potencjału jest (wielowymiarowy) ruch Browna. W niniejszym rozdziale przedstawiona jest teoria ruchu Browna w postaci, która umożliwia łatwe uogólnienia.

2.1. **Definicja.** Operator Laplace'a jest ściśle związany z procesem ruchu Browna, czyli wielowymiarowym standardowym procesem Wienera.

DEFINICJA 2.1. Proces stochastyczny (czyli rodzina zmiennych losowych) X_t, $t > 0$, o wartościach w $\mathbb{R}^d$ nazywany jest *ruchem Browna*, jeśli

(a) $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$;
(b) $\mathbb{P}(X_t \neq X_0) > 0$ dla pewnego $t > 0$;
(c) rozkład zmiennej $X_{s+t} - X_s$ $(s, t \geqslant 0)$ nie zależy od s (stacjonarne przyrosty);
(d) jeśli $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$, to zmienne $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ są niezależne (niezależne przyrosty);

(e) rozkład zmiennej $X_{s+t} - X_s$ $(s, t \geqslant 0)$ jest niezmienniczy na obroty, czyli przekształcenia ortogonalne $\mathbb{R}^d$ (izotropia);
(f) z prawdopodobieństwem 1 funkcja $t \mapsto X_t$ jest ciągła (ciągłość trajektorii).

Z powyższych postulatów wynika, że X_t ma wielowymiarowy rozkład normalny. Jest to bardzo łatwy wniosek z centralnego twierdzenia granicznego, gdy już wiadomo, że zmienne X_t mają skończone wariancje. Dowód tego ostatniego faktu jest jednak skomplikowany; podamy więc odpowiednie twierdzenie bez dowodu.

TWIERDZENIE 2.2. Jeśli X_t jest ruchem Browna, to dla każdego $t \geqslant 0$ zmienna X_t ma wielowymiarowy rozkład normalny o średniej 0 i macierzy kowariancji $\sigma^2 t \operatorname{Id}$ dla pewnego $\sigma > 0$.

Będziemy przyjmowali, że $\sigma^2 = 2$ (w teorii procesów stochastycznych zwykle ustala się $\sigma^2 = 1$; w teorii potencjału wygodniej jest jednak przyjąć $\sigma^2 = 2$).

Konstrukcję procesu Wienera można przeprowadzić na wiele sposobów — jeden z nich zostanie omówiony na ćwiczeniach, inny (przez układ ortogonalny funkcji Haara) pojawił się na kursie z procesów stochastycznych.

Jeśli pierwszy postulat ruchu Browna zastąpimy warunkiem $\mathbb{P}(X_0 = x) = 1$, to otrzymamy ruch Browna startujący z $x \in \mathbb{R}^d$; proces taki łatwo uzyskać ze zwykłego ruchu Browna X_t, rozważając proces $x + X_t$. Wygodnie będzie rozważać całą rodzinę ruchów Browna, startujących z różnych punktów. Hunt stosował oznaczenie X_t^x na proces startujący z x. Okazało się jednak, że wygodniejsze jest umieszczenie miejsca startu przy prawdopodobieństwie: miarę związaną z ruchem Browna startującym z $x \in \mathbb{R}^d$ będziemy oznaczali $\mathbb{P}^x$, zaś proces zawsze tym samym symbolem X_t. Wszystkie prawdopodobieństwa $\mathbb{P}^x$ są tu miarami na ustalonej przestrzeni probabilistycznej (z powodu warunku $\mathbb{P}^x(X_0 = x)$ są one oczywiście wzajemnie singularne) — konstrukcję takich miar opisuje jedno z ćwiczeń.

Wprowadzony wyżej zapis może wydawać się nieintuicyjny, ale doskonale pasuje do opisu *procesu kanonicznego*. Przestrzenią probabilistyczną w takim procesie jest przestrzeń trajektorii: w przypadku ruchu Browna jest to klasa funkcji ciągłych z $[0, \infty)$ w $\mathbb{R}^d$. Zdarzenie elementarne ω jest zatem funkcją opisującą ruch procesu i określamy po prostu $X_t(\omega) = \omega(t)$.

Każdy proces X_t zadaje miarę na przestrzeni trajektorii. Jeśli X_t jest ruchem Browna, to odpowiadająca mu miara $\tilde{\mathbb{P}}$ na przestrzeni funkcji ciągłych z $[0, \infty)$ w $\mathbb{R}^d$ nazywana jest *miarą Wienera* (a przestrzeń z tą miarą — *przestrzenią Wienera*). Formalnie miara ta jest określona na przestrzeni $C([0, \infty); \mathbb{R}^d)$ z σ-ciałem zbiorów borelowskich (w topologii zbieżności jednostajnej).

Na przestrzeni Wienera można też rozpatrywać σ-ciało generowane przez zbiory cylindryczne — najmniejsze σ-ciało, względem którego mierzalne są funkcje X_t (określone wzorem $X_t(\omega) = \omega(t)$). Jest to istotnie mniejsze σ-ciało niż σ-ciało zbiorów borelowskich.

Przestrzeń wszystkich możliwych trajektorii (czyli funkcji z $[0, \infty)$ w $\mathbb{R}^d$ — czy ogólniej w dowolną przestrzeń $\mathscr{X}$) z σ-ciałem generowanym przez zbiory cylindryczne nazywana jest przestrzenią kanoniczną. Warto podkreślić, że klasa funkcji ciągłych jest niemierzalnym podzbiorem przestrzeni kanonicznej (jest jednak zbiorem pełnej miary zewnętrznej względem rozkładu ruchu Browna).

2.2. **Własność Markowa.**

Notacja. Warunkowa wartość oczekiwana całkowalnej zmiennej losowej X względem σ-ciała $\mathscr{F}$ to zmienna losowa $E(X|\mathscr{F})$ mierzalna względem $\mathscr{F}$ i mająca te same całki po zbiorach mierzalnych względem $\mathscr{F}$. Pisząc $E(X|Y)$ mamy na myśli $E(X|\sigma(Y))$, gdzie $\sigma(Y)$ oznacza najmniejsze σ-ciało, względem którego Y jest mierzalna (czyli po prostu rodzinę przeciwobrazów $Y^{-1}(B)$ zbiorów mierzalnych B).

Myślimy o ruchu Browna, ale definicje są ogólne. Proces stochastyczny zawsze przyjmuje wartości w pewnej ustalonej przestrzeni miarowej $\mathscr{X}$ z ustalonym σ-ciałem $\mathscr{B}$. Zawsze będziemy zakładali, że w $\mathscr{X}$ jest ustalona topologia — metryzowalna, lokalnie zwarta (więcej o tym później) — oraz że $\mathscr{B}$ jest σ-ciałem zbiorów borelowskich. Wszystko dzieje się na przestrzeni probabilistycznej Ω z pewnym σ-ciałem $\mathscr{M}$.

DEFINICJA 2.3. Proces X_t ma *własność Markowa* (lub jest *procesem Markowa*) jeśli

$$\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B|X_{r_1}, X_{r_2}, \ldots, X_{r_m}, X_s) = \mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B|X_s),$$

o ile $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_m \leqslant s \leqslant s+t$, zaś B jest zbiorem borelowskim.

DEFINICJA 2.4. Proces Markowa X_t jest *jednorodny w czasie*, jeśli $\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B|X_s)$ nie zależy od s, o ile $0 \leqslant s \leqslant s+t$, zaś B jest zbiorem borelowskim. Innymi słowy

$$\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B|X_s) = p_t(X_s, B),$$

gdzie przez $p_t(x, B)$ oznaczyliśmy *prawdopodobieństwo przejścia*

$$p_t(x, B) = \mathbb{P}^x(X_t \in B).$$

Równoważna, często wygodniejsza definicja, to:

$$\mathbb{E}^x(f(X_{s+t})|X_{r_1}, X_{r_2}, \ldots, X_{r_m}, X_s) = \mathbb{E}^x(f(X_{s+t})|X_s),$$

o ile $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_m \leqslant s \leqslant s+t$, zaś f jest funkcją borelowską. W przypadku jednorodnego w czasie procesu Markowa prawa strona jest równa $\int_{\mathscr{X}} f(y)p_t(X_s, dy)$.

Indukcyjnie łatwo udowodnić, że procesy Markowa mają w istocie własność:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^x(X_{s+t_1} \in B_1, X_{s+t_2} \in B_2, \ldots, X_{s+t_n} \in B_n|X_{r_1}, X_{r_2}, \ldots, X_{r_m}, X_s)\\ = \mathbb{P}^x(X_{s+t_1} \in B_1, X_{s+t_2} \in B_2, \ldots, X_{s+t_n} \in B_n|X_s),\end{aligned}$$

o ile $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_m \leqslant s \leqslant s+t_1 \leqslant s+t_2 \leqslant \ldots \leqslant s+t_n$, zaś $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są zbiorami borelowskimi. Dla jednorodnych w czasie procesów Markowa prawą stronę można zapisać w postaci $\varphi(X_s)$, gdzie

$$\varphi(x) = \mathbb{P}^x(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \ldots, X_{t_n} \in B_n).$$

Szczegóły dowodu są treścią ćwiczenia.

Własność Markowa orzeka, że w każdej chwili s, przy ustalonej *teraźniejszości* (wartości X_s), *przyszłość* (czyli wartości zmiennych X_{s+t} dla $t \geqslant 0$) oraz *przeszłość* (czyli wartości zmiennych X_r dla $r \leqslant s$) są od siebie *warunkowo niezależne*. Można to nieformalne sformułowanie uściślić i nadać własności Markowa bardziej symetryczną postać, ale nie będzie to nam potrzebne.

LEMAT 2.5. Niech X_t będzie jednorodnym w czasie procesem Markowa. Wówczas prawdopodobieństwa przejścia spełniają równość Chapmana–Kołmogorowa:

$$p_{s+t}(x, B) = \int_{\mathscr{X}} p_t(y, B) p_s(x, dy)$$

jeśli tylko $x \in \mathscr{X}$, $0 \leqslant s \leqslant s + t$ oraz B jest zbiorem borelowskim.

Dowód. Równość Chapmana–Kołmogorowa wynika wprost z własności Markowa: jeśli $0 \leqslant s \leqslant s + t$, zaś B jest zbiorem borelowskim, to

$$\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B) = \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B | X_s)) = \mathbb{P}^x(p_t(X_s, B)) = \int_{\mathscr{X}} p_t(y, B) p_s(x, dy). \quad \square$$

Własność Markowa jest własnością *rozkładów skończenie wymiarowych* procesu X_t, czyli rozkładów łącznych wektorów postaci $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$. Poniższy wynik uogólnia znaną własność łańcuchów Markowa.

LEMAT 2.6. Niech X_t będzie procesem stochastycznym. Określmy $p_t(x, dy) = \mathbb{P}^x(X_t \in dy)$ dla $t \geqslant 0$ i $x \in \mathscr{X}$. Wówczas X_t jest jednorodnym w czasie procesem Markowa wtedy i tylko wtedy, gdy rozkład skończenie wymiarowy procesu X_t zadany jest przez $p_t(x, dy)$ w następującym sensie:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}^x(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \ldots, X_{t_n} \in B_n)\\ &= \int_{B_1} p_{t_1}(x, dx_1) \int_{B_2} p_{t_2 - t_1}(x_1, dx_2) \ldots \int_{B_{n-1}} p_{t_{n-1} - t_{n-2}}(x_{n-2}, dx_{n-1}) p_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, B_n),\end{aligned}$$

o ile $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ oraz $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są zbiorami borelowskimi.

Tożsamość z lematu można równoważnie zapisać w postaci

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^x(f(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}))\\ &= \int_{\mathscr{X}} p_{t_1}(x, dx_1) \int_{\mathscr{X}} p_{t_2 - t_1}(x_1, dx_2) \ldots \int_{\mathscr{X}} p_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) f(x_1, x_2, \ldots, x_n),\end{aligned}$$

o ile $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ oraz f jest funkcją borelowską. W istocie, warunek z lematu implikuję powyższą równość dla indykatorów zbiorów cylindrycznych (tj. postaci $\{X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \ldots, X_{t_n} \in A_n\}$) i wystarczy zastosować standardowy argument teorii miary. Jeszcze inna postać wykorzystana jest w dowodzie.

Dowód. Przypuśćmy wpierw, że tożsamość z lematu zachodzi. Niech $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_m \leqslant s \leqslant s + t$ i niech $A_1, A_2, \ldots, A_m, A, B$ będą zbiorami borelowskimi. Oznaczmy ponadto $E = \{X_{r_1} \in A_1, X_{r_2} \in A_2, \ldots, X_{r_m} \in A_m, X_s \in A\}$. Wystarczy zatem udowodnić, że

$$\mathbb{P}^x(E, X_{s+t} \in B) = \mathbb{E}^x(\mathbb{1}_E \, p_t(X_s, B)).$$

Równość ta wynika jednak wprost z założenia: lewa strona to (na mocy tożsamości w lemacie)

$$\int_{A_1} p_{r_1}(x, dx_1) \int_{A_2} p_{r_2 - r_1}(x_1, dx_2) \ldots \int_{A_m} p_{r_m - r_{m-2}}(x_{m-2}, dx_m) \int_A p_{s - r_m}(x_m, dy) p_t(y, B),$$

zaś prawa strona ma tę samą postać (na mocy tożsamości w uwadze pod lematem).

Jeśli X_t jest jednorodnym w czasie procesem Markowa, to tożsamości z lematu, w równoważnej postaci

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^x(f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\ldots,f_n(X_{t_n})))\\&=\int_{\mathscr{X}}p_{t_1}(x,dx_1)f_1(x_1)\int_{\mathscr{X}}p_{t_2-t_1}(x_1,dx_2)f_2(x_2)\ldots\int_{\mathscr{X}}p_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)f_n(x_n)\end{aligned}$$

(gdzie $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\ldots\leqslant t_n$ oraz $f_1,f_2,\ldots,f_n$ to funkcje borelowskie), dowodzi się indukcyjnie. Gdy $n=1$, nie ma czego dowodzić. Jeśli zaś równość jest prawdziwa dla pewnego n, to dla dowolnych czasów $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\ldots\leqslant t_{n+1}$ oraz funkcji borelowskich $f_1,f_2,\ldots,f_{n+1}$ zachodzi

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^x(f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\ldots f_n(X_{t_n})f_{n+1}(X_{t_{n+1}}))\\&\quad=\mathbb{E}^x(f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\ldots f_n(X_{t_n})\mathbb{E}^x(f_{n+1}(X_{t_{n+1}})|X_{t_1},X_{t_2},\ldots,X_{t_n}))\\&\quad=\mathbb{E}^x(f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\ldots f_n(X_{t_n})\mathbb{E}^x(f_{n+1}(X_{t_{n+1}})|X_{t_n}))\\&\quad=\mathbb{E}^x\left(f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\ldots f_n(X_{t_n})\int_{\mathscr{X}}p_{t_{n+1}-t_n}(X_{t_n},dx_{n+1})f_{n+1}(x_{n+1})\right).\end{aligned}$$

Pozostaje wykorzystać założenie indukcyjne dla funkcji $f_1,f_2,\ldots,f_{n-1},\tilde{f}_n$, gdzie

$$\tilde{f}_n(x)=f_n(x)\int_{\mathscr{X}}p_{t_{n+1}-t_n}(x,dy)f_{n+1}(y).$$ □

Łatwo sprawdzić, że każdy proces o niezależnych i stacjonarnych przyrostach spełnia założenia powyższego lematu, a więc ma własność Markowa. W szczególności ruch Browna jest więc procesem Markowa.

LEMAT 2.7. Jeśli X_t jest procesem o niezależnych i stacjonarnych przyrostach, to jest jednorodnym w czasie procesem Markowa.

Dowód. Niech $x\in\mathbb{R}^d$ i określmy przekształcenie liniowe $T(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1-x,x_2-x_1,\ldots,x_n-x_{n-1})$. Wówczas $T:(\mathbb{R}^d)^n\to(\mathbb{R}^d)^n$. Ponadto $T(X_{t_1},X_{t_2},\ldots,X_{t_n})$ ma względem $\mathbb{P}^x$ rozkład $\mu_{t_1}\times\mu_{t_2-t_1}\times\ldots\times\mu_{t_n-t_{n-1}}$, gdzie μ_t jest rozkładem przyrostu $X_{s+t}-X_s$. Wobec tego

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^x f(X_{t_1},X_{t_2},\ldots,X_{t_n})\\&\quad=\int_{\mathbb{R}^d}\mu_{t_1}(dy_1)\int_{\mathbb{R}^d}\mu_{t_2-t_1}(dy_2)\ldots\int_{\mathbb{R}^d}\mu_{t_n-t_{n-1}}(dy_n)f(T^{-1}(y_1,y_2,\ldots,y_n)).\end{aligned}$$

Zauważmy, że $p_t(x,B)=\mu_t(B-x)$. Wobec tego wstawiając kolejno $y_1=x_1-x$, $y_2=x_2-x_1$, …, $y_n=x_n-x_{n-1}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^x f(X_{t_1},X_{t_2},\ldots,X_{t_n})\\&\quad=\int_{\mathbb{R}^d}p_{t_1}(x,dx_1)\int_{\mathbb{R}^d}p_{t_2-t_1}(x_1,dx_2)\ldots\int_{\mathbb{R}^d}p_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)f(x_1,x_2,\ldots,x_n).\end{aligned}$$ □

Powyższy lemat pozwala na konstrukcję procesu przy pomocy prawdopodobieństw przejścia. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 2.8 (twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu procesu). Niech $p_t(x,dy)$ oznacza rodzinę prawdopodobieństw przejścia na lokalnie zwartej, metryzowalnej przestrzeni $\mathscr{X}$, tj. rodzinę nieujemnych jąder probabilistycznych spełniającą równanie

Chapmana–Kołmogorowa. Wówczas istnieje proces Markowa X_t, którego prawdopodobieństwami przejścia są $p_t(x, dy)$.

Dowód tego twierdzenia polega na konstrukcji miary zewnętrznej na przestrzeni trajektorii w sposób podobny do konstrukcji miary Lebesgue'a i uzasadnieniu, że odpowiadająca tej mierze zewnętrznej miara jest zgodna z rozkładami skończenie wymiarowymi opisanymi w lemacie. Szczegóły będą treścią zadań dodatkowych.

2.3. **Filtracje.** Własność Markowa można sformułować krócej:

$$\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B | \mathscr{F}_s) = \mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B | X_s)$$

gdzie $\mathscr{F}_t$ oznacza σ-ciało generowane przez zmienne X_s, $s \in [0,t]$, czyli najmniejsze σ-ciało, względem którego mierzalne są zmienne X_s dla $s \in [0,t]$, czyli

$$\mathscr{F}_t = \sigma(\{X_s : s \in [0,t]\}).$$

(W tym miejscu, a także w wielu miejscach poniżej, stosujemy oznaczenia z definicji własności Markowa: $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_m \leqslant s \leqslant s+t$; $A_1, A_2, \ldots, A_m, A, B$ są borelowskie). Wynikanie w jedną stronę jest niemal oczywiste:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B | X_{r_1}, X_{r_2}, \ldots, X_{r_m}, X_s) &= \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B | \mathscr{F}_s) | X_{r_1}, X_{r_2}, \ldots, X_{r_m}, X_s) \\ &= \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B | X_s) | X_{r_1}, X_{r_2}, \ldots, X_{r_m}, X_s) \\ &= \mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B | X_s).\end{aligned}$$

Aby udowodnić przeciwną implikację, wystarczy rozważyć rodzinę zdarzeń E o własności

$$\mathbb{P}^x(E, X_{s+t} \in B) = \mathbb{E}^x(\mathbb{1}_E \, \mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B | X_s)).$$

Na mocy własności Markowa rodzina ta zawiera wszystkie zdarzenia postaci $\{X_{r_1} \in A_1, X_{r_2} \in A_2, \ldots, X_{r_m} \in A_m\}$. Z lematu Dynkina o π-λ-układach wynika, że owa rodzina zawiera w takim razie $\mathscr{F}_s$ (szczegóły są treścią ćwiczenia).

Dla wygody oznaczmy przez $\mathscr{F}_\infty$ σ-ciało generowane przez wszystkie zmienne X_s, $s > 0$. Rodzina σ-ciał $\mathscr{F}_t$ ($t \in [0,\infty]$) nazywana jest naturalną filtracją procesu X_t.

Notacja. Pisząc na przykład $s \geqslant 0$, zawsze mamy na myśli rzeczywiste (skończone) wartości s. Jeśli dopuszczamy $s = \infty$, zawsze stosujemy zapis $s \in [0,\infty]$.

Definicja 2.9. Dowolna niemalejąca rodzina σ-ciał $\mathscr{F}_t$, $t > 0$, nazywana jest *filtracją*. Jeśli $\mathscr{F}_t$ jest filtracją, to oznaczamy $\mathscr{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{s \in [0,\infty)} \mathscr{F}_s)$. Proces X_t jest *adaptowany* do filtracji $\mathscr{F}_t$ jeśli dla każdego $t > 0$ zmienna losowa X_t jest mierzalna względem $\mathscr{F}_t$. *Filtracją naturalną* procesu X_t nazywa się najmniejszą filtrację, względem której X_t jest adaptowany (czyli równoważnie rodzinę σ-ciał $\mathscr{F}_t$ opisaną powyżej).

Jeśli $\mathscr{F}_t$ jest filtracją, oznaczamy

$$\mathscr{F}_{t+} = \bigcap_{s \in (t,\infty]} \mathscr{F}_s, \qquad \mathscr{F}_{t-} = \sigma\left(\bigcup_{s \in [0,t)} \mathscr{F}_s \right);$$

przy czym definiujemy $\mathscr{F}_{0-} = \mathscr{F}_0$ oraz $\mathscr{F}_{\infty+} = \mathscr{F}_\infty$. Filtracja $\mathscr{F}_t$ jest *prawostronnie ciągła*, jeśli $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$ dla $t \geqslant 0$; jest zaś *lewostronnie ciągła*, jeśli $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t-}$ dla $t > 0$.

Łatwo sprawdzić, że $\mathscr{F}_{t+}$ oraz $\mathscr{F}_{t-}$ również są filtracjami. Ponadto jeśli X_t jest procesem adaptowanym do filtracji $\mathscr{F}_t$, to jest też procesem adaptowanym do większej filtracji $\mathscr{F}_{t+}$.

2.4. **Czasy Markowa.** W zastosowaniach często trzeba zastosować własność Markowa dla losowych czasów. Bardzo użyteczne jest na przykład twierdzenie orzekające, że jesli X_t jest procesem Wienera oraz $\sigma = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = y\}$ jest czasem dojścia do poziomu y, to $Y_t = X_{\sigma+t}$ jest ponownie procesem Wienera (startującym z y). Dodatkowo Y_t jest niezależny od wszystkiego, co — mówiąc nieformalnie — przydarzyło się procesowi X_t do chwili σ.

Trudno jednak oczekiwać, że własność Markowa zachodzi dla dowolnych czasów losowych. W istocie, jeśli na przykład X_t jest procesem Wienera oraz $\sigma = \inf\{t \geqslant 0 : X_{t+1} = X_t\}$ oraz $Y_t = X_{\sigma+t}$, to $Y_1 = Y_0$ z prawdopodobieństwem 1, zatem Y_t nie jest procesem Wienera (a nawet nie jest procesem Markowa).

W przypadku procesu Wienera, a także wielu ogólniejszych procesów, własność Markowa zachodzi dla czasu losowego σ, o ile definicja zmiennej losowej σ nie odwołuje się do przyszłości. Formalnie opisuje to poniższa definicja.

DEFINICJA 2.10. Jeśli $\mathscr{F}_t$ jest filtracją, to zmienna losowa τ o wartościach w $[0,\infty]$ jest *$\mathscr{F}_t$-czasem Markowa* (lub *czasem zatrzymania*, *momentem stopu*, czasem nawet *czasem opcjonalnym*), jeśli $\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$ dla każdego $t \geqslant 0$. Jeśli τ jest $\mathscr{F}_{t+}$-czasem Markowa, to mówimy po prostu, że τ jest *czasem Markowa*. Ponadto określamy

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_\tau &= \{E \in \mathscr{F}_\infty : E \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t \text{ dla } t \geqslant 0\},\\
\mathscr{F}_{\tau+} &= \{E \in \mathscr{F}_\infty : E \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_{t+} \text{ dla } t \geqslant 0\},\\
\mathscr{F}_{\tau-} &= \sigma\{E \cap \{\tau > t\} : t \geqslant 0,\, E \in \mathscr{F}_t\};
\end{aligned}$$

definicja $\mathscr{F}_\tau$ ma sens dla $(\mathscr{F}_t)$-czasów Markowa, $\mathscr{F}_{\tau+}$ jest zdefiniowane dla wszystkich czasów Markowa, definicja $\mathscr{F}_{\tau-}$ ma sens dla dowolnych τ, ale w praktyce stosuje się ją tylko dla czasów Markowa.

Pewne własności czasów Markowa są treścią ćwiczeń; były też omawiane na kursie z procesów stochastycznych. W szczególności każdy $\mathscr{F}_t$-czas Markowa jest czasem Markowa (bowiem $\mathscr{F}_{t+}$ zawiera $\mathscr{F}_t$), ale wynikanie przeciwne w ogólności jest fałszywe. Dla przykładu podamy jeden ważny fakt dotyczący czasów Markowa.

LEMAT 2.11. Jeśli $\mathscr{F}_t$ jest filtracją, to zmienna losowa τ o wartościach w $[0,\infty]$ jest czasem Markowa wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t$ dla wszystkich $t > 0$.

Dowód. Jeśli τ jest czasem Markowa, to

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{\substack{s<t\\ s\in\mathbb{Q}}} \{\tau \leqslant t\} \in \bigcup_{\substack{s<t\\ s\in\mathbb{Q}}} \mathscr{F}_{s+} \subseteq \mathscr{F}_t,$$

bowiem $\mathscr{F}_{s+} \subseteq \mathscr{F}_t$ gdy $s < t$. Aby udowodnić wynikanie przeciwne, wystarczy zapisać

$$\{\tau \leqslant t\} = \bigcap_{\substack{t<u<t+\varepsilon\\ u\in\mathbb{Q}}} \{\tau < t\} \in \mathscr{F}_{t+\varepsilon}$$

dla dowolnego $\varepsilon > 0$, przez co $\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_{t+}$. □

Wprost z definicji oraz tożsamości $\{\min\{\tau, \sigma\} < t\} = \{\tau < t\} \cup \{\sigma < t\}$ wynika, że minimum czasów Markowa jest czasem Markowa, zaś minimum $\mathscr{F}_t$-czasów Markowa jest $\mathscr{F}_t$-czasem Markowa. Wiele podobnych własności jest treścią ćwiczeń.

TWIERDZENIE 2.12. Jeśli $\mathscr{F}_t$ jest filtracją naturalną procesu X_t o ciągłych trajektoriach, D jest zbiorem otwartym lub domkniętym oraz

$$\tau_D = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin D\}$$

jest *czasem wyjścia* ze zbioru D, to τ_D jest czasem Markowa.

Dowód. Jeśli D jest domknięty oraz $X_t \notin D$, to istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $X_u \notin D$ dla $u \in [t, t + \varepsilon)$. Wobec tego

$$\tau_D = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin D,\, t \in \mathbb{Q}\}.$$

Oznacza to, że

$$\{\tau_D < t\} = \bigcup_{\substack{s<t \\ s\in\mathbb{Q}}} \{X_s \notin D\} \in \mathscr{F}_t,$$

czyli τ_D jest $\mathscr{F}_t$-czasem Markowa.

Jeśli D jest otwarty, to D jest sumą wstępującej rodziny D_n zbiorów domkniętych (np. $D_n = \{x \in \mathscr{X} : d(x, y) \geqslant \frac{1}{n} \text{ dla } y \notin D\}$). Niech τ_n oznacza czas wyjścia z D_n. Oczywiście τ_n jest ciągiem rosnącym, zatem istnieje granica $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$. Ponadto $\tau_n \leqslant \tau_D$, więc również $\tau \leqslant \tau_D$. Z drugiej strony jeśli $\tau < \infty$, to $X(\tau_n)$ dąży do $X(\tau)$, zatem $X(\tau) \notin D$; wobec tego $\tau \geqslant \tau_D$. Oznacza to, że $\tau = \tau_D$. Ponieważ granica (rosnącego) ciągu czasów Markowa jest czasem Markowa, udowodniliśmy tezę twierdzenia. □

W pierwszej części dowodu potrzebowaliśmy wyłącznie prawostronnej ciągłości trajektorii. W drugiej zaś wystarcza prawostronna ciągłość oraz istnienie (z prawdopodobieństwem 1) granicy $\lim_{n\to\infty} X(\tau_n)$. Dowód drugiej części można usprawnić (i wykazać, że w istocie τ_D jest $\mathscr{F}_t$-czasem Markowa), ale argument przedstawiony powyżej stosuje się do szerokiej klasy procesów o nieciągłych trajektoriach. Powrócimy do tego tematu przy omawianiu procesów Fellera. Przy okazji warto podkreślić, że teza twierdzenia zachodzi również dla czasów wyjścia z dowolnych zbiorów borelowskich, pod warunkiem odpowiedniego uzupełnienia filtracji $\mathscr{F}_t$ (o tzw. zbiory analityczne lub ogólniej — o tzw. zbiory uniwersalnie mierzalne).

Jak łatwo sprawdzić, σ-ciała $\mathscr{F}_{\tau-}$, $\mathscr{F}_\tau$ i $\mathscr{F}_{\tau+}$ są w istocie σ-ciałami, o ile τ jest odpowiednio: $\mathscr{F}_t$-czasem Markowa, czasem Markowa i dowolną zmienną losową. Dla deterministycznych czasów $\tau = t$ zachodzi $\mathscr{F}_{\tau-} = \mathscr{F}_{t-}$, $\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_t$ oraz $\mathscr{F}_{\tau+} = \mathscr{F}_{t+}$. Ponadto $\mathscr{F}_{\tau-} \subseteq \mathscr{F}_\tau \subseteq \mathscr{F}_{\tau+}$ gdy τ jest $\mathscr{F}_t$-czasem Markowa oraz $\mathscr{F}_{\tau-} \subseteq \mathscr{F}_{\tau+}$ gdy τ jest czasem Markowa. Te i inne własności σ-ciał $\mathscr{F}_{\tau-}$, $\mathscr{F}_\tau$ i $\mathscr{F}_{\tau+}$ są treścią ćwiczeń.

LEMAT 2.13. Jeśli σ i τ są czasami Markowa względem pewnej filtracji $\mathscr{F}_t$ oraz $\sigma \leqslant \tau$, to $\mathscr{F}_{\sigma+} \subseteq \mathscr{F}_{\tau+}$. Analogicznie jeśli σ i τ są $\mathscr{F}_t$-czasami Markowa oraz $\sigma \leqslant \tau$, to $\mathscr{F}_\sigma \subseteq \mathscr{F}_\tau$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $E \cap \{\tau \leqslant t\} = (E \cap \{\sigma \leqslant t\}) \cap \{\tau \leqslant t\}$. W istocie, jeśli σ i τ są czasami Markowa i $E \in \mathscr{F}_{\sigma+}$, to $E \cap \{\sigma \leqslant t\} \in \mathscr{F}_{t+}$ oraz $\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_{t+}$, skąd $E \in \mathscr{F}_{\tau+}$. Analogiczny argument stosuje się do $\mathscr{F}_t$-czasów Markowa. □

LEMAT 2.14. Jeśli τ jest czasem Markowa, to zmienna losowa τ jest mierzalne względem $\mathscr{F}_{\tau-}$ oraz $\mathscr{F}_{\tau+}$.

Dowód. Zbiór $\{\tau > t\}$ jest postaci $E \cap \{\tau > t\}$ dla $E = \Omega \in \mathscr{F}_t$, zatem $\{\tau > t\} \in \mathscr{F}_{\tau-}$. Podobnie $\{\tau \leqslant t\} \cap \{\tau \leqslant s\} \in \mathscr{F}_{\min\{s,t\}+} \subseteq \mathscr{F}_{s+}$ dla $s \geqslant 0$, zatem $\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_{\tau+}$. □

LEMAT 2.15. Jeśli σ i τ są czasami Markowa, to zdarzenie $\{\sigma < \tau\}$ jest mierzalne względem $\mathscr{F}_{\sigma+}$ oraz $\mathscr{F}_{\tau+}$.

Dowód. Zachodzi

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\tau < t\} = \bigcup_{\substack{s<t \\ s\in\mathbb{Q}}} \big(\{\sigma < s\} \cap \{s < \tau\} \cap \{\tau < t\}\big).$$

Skoro $\{\sigma < s\} \in \mathscr{F}_s$, $\{s < \tau\} \in \mathscr{F}_{s+}$, $\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t$, powyższe zdarzenie należy do $\mathscr{F}_t$, czyli $\{\sigma < \tau\}$ jest mierzalne względem $\mathscr{F}_{\tau+}$. Ponadto

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\sigma < t\} = \big(\{\sigma < \tau\} \cap \{\tau < t\}\big) \cup \big(\{\sigma < t\} \cap \{t \leqslant \tau\}\big),$$

a skoro $\{\sigma < \tau\} \cap \{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t$, $\{\sigma < t\} \in \mathscr{F}_t$, $\{t \leqslant \tau\} \in \mathscr{F}_t$, również powyższe zdarzenie należy do $\mathscr{F}_t$, przez co $\{\sigma < \tau\}$ jest mierzalne względem $\mathscr{F}_{\sigma+}$. □

LEMAT 2.16. Jeśli malejący ciąg czasów Markowa τ_n dąży do τ, to $\mathscr{F}_{\tau+}$ jest częścią wspólną σ-ciał $\mathscr{F}_{\tau_n+}$.

Dowód. Jedno z ćwiczeń orzeka, że τ jest czasem Markowa. Jeśli zdarzenia $E \cap \{\tau_n < t\}$ należą do $\mathscr{F}_t$, to ich suma $E \cap \{\tau < t\}$ również jest w $\mathscr{F}_t$, czyli $\mathscr{F}_{\tau+}$ zawiera przekrój $\mathscr{F}_{\tau_n+}$. Z drugiej strony wiemy już, że σ-ciało $\mathscr{F}_{\tau+}$ jest zawarte w każdym σ-ciele $\mathscr{F}_{\tau_n+}$. □

2.5. **Mocna własność Markowa.** Nie wszystkie procesy Markowa spełniają warunek z definicji własności Markowa dla losowych czasów τ. To tłumaczy potrzebę poniższej definicji. W całym rozdziale przyjmujemy, że $\mathscr{F}_t$ jest naturalną filtracją procesu X_t.

DEFINICJA 2.17. Proces X_t ma *mocną własność Markowa* (lub jest *mocnym procesem Markowa*) jeśli na zdarzeniu $\{\sigma < \infty\}$ zachodzi

$$\mathbb{P}^x(X_{\sigma+t} \in B | \mathscr{F}_{\sigma+}) = \mathbb{P}^x(X_{\sigma+t} \in B | X_\sigma),$$

o ile σ jest czasem Markowa, $t \geqslant 0$, zaś B jest zbiorem borelowskim.

W przypadku procesu Markowa jednorodnego w czasie wymagamy w istocie, aby

$$\mathbb{P}^x(X_{\sigma+t} \in B | \mathscr{F}_{\sigma+}) = p_t(X_\sigma, B).$$

Równość na zdarzeniu $\{\sigma < \infty\}$ oznacza w istocie, że dla dowolnego $E \in \mathscr{F}_{\sigma+}$ zachodzi

$$\mathbb{P}^x(X_{\sigma+t} \in B, E, \sigma < \infty) = \mathbb{E}^x(p_t(X_\sigma, B), \mathbb{1}_{E\cap\{\sigma<\infty\}}),$$

(w przypadku procesów jednorodnych w czasie).

Podobnie, jak w przypadku zwykłej własności Markowa, indukcyjnie łatwo udowodnić, że mocne procesy Markowa spełniają, na zdarzeniu $\{\sigma < \infty\}$, równość

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^x(X_{\sigma+t_1} \in B_1, X_{\sigma+t_2} \in B_2, \ldots, X_{\sigma+t_n} \in B_n | \mathscr{F}_{\sigma+}) \\ = \mathbb{P}^x(X_{\sigma+t_1} \in B_1, X_{\sigma+t_2} \in B_2, \ldots, X_{\sigma+t_n} \in B_n | X_\sigma),\end{aligned}$$

o ile σ jest czasem Markowa, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$, zaś $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są zbiorami borelowskimi. Dowód jest w zaadzie taki sam, w kroku indukcyjnym stosuje się mocną własność Markowa dla czasu Markowa $\sigma + t_n$.

Mocna własność Markowa jest w istocie mocniejsza niż własność Markowa: stosując ją dla $\sigma = s$, otrzymujemy

$$\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B | \mathscr{F}_{s+}) = \mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B | X_s),$$

co jest nawet mocniejszym warunkiem niż własność Markowa, która po lewej stronie wymaga σ-ciała $\mathscr{F}_s$ zamiast $\mathscr{F}_{s+}$.

W tej chwili trudno przekonująco wytłumaczyć, dlaczego w definicji rozważa się czasy Markowa i σ-ciało $\mathscr{F}_{\sigma+}$ zamiast $\mathscr{F}_t$-czasów Markowa i σ-ciała $\mathscr{F}_\sigma$ — po pierwsze dlatego, że własność Markowa często stosuje się do czasów wyjścia ze zbioru, które nie sa $\mathscr{F}_t$-czasami Markowa; po drugie ze względu na to, proces Wienera (a także wszystkie procesy Fellera) mają tę własność.

Jedną z ciekawych konsekwencji warunkowania σ-ciałem $\mathscr{F}_{\sigma+}$ zamiast $\mathscr{F}_\sigma$ jest następujący wynik.

TWIERDZENIE 2.18 (prawo 0–1 Blumenthala). Jeśli X_t jest mocnym procesem Markowa, to $\mathscr{F}_{0+}$ składa się wyłącznie ze zdarzeń o prawdopodobieństwie 0 lub 1.

Dowód. Na mocy mocnej własności Markowa dla czasu Markowa $\sigma = 0$, zachodzi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^x(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \ldots, X_{t_n} \in B_n | \mathscr{F}_{0+}) \\ = \mathbb{P}^x(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \ldots, X_{t_n} \in B_n | X_0) \\ = \mathbb{P}^x(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \ldots, X_{t_n} \in B_n)\end{aligned}$$

gdy $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ oraz $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są borelowskie. Niech $E \in \mathscr{F}_{0+}$. Wówczas

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^x(E, X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \ldots, X_{t_n} \in B_n) \\ = \mathbb{E}^x(\mathbb{1}_E \mathbb{P}^x(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \ldots, X_{t_n} \in B_n | \mathscr{F}_{0+})) \\ = \mathbb{P}^x(E)\mathbb{P}^x(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \ldots, X_{t_n} \in B_n).\end{aligned}$$

Zatem klasa zdarzeń F takich, że $\mathbb{P}^x(E, F) = \mathbb{P}^x(E)\mathbb{P}^x(F)$ zawiera więc wszystkie zdarzenia cylindryczne $\{X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \ldots, X_{t_n} \in B_n\}$. Na mocy lematu Dynkina o π-λ-układach, klasa ta zawiera $\mathscr{F}_\infty$, a więc w szczególności należy do niej zdarzenie E. Stąd $\mathbb{P}^x(E) = \mathbb{P}^x(E, E) = (\mathbb{P}^x(E))^2$, a więc $\mathbb{P}^x(E) \in \{0, 1\}$. □

Innym równie ważnym co prostym wnioskiem z mocnej własności Markowa (a w zasadzie — założeniem w definicji tej własności) jest mierzalność $X_{\sigma+}$.

TWIERDZENIE 2.19. Jeśli X_t ma mocną własność Markowa, zaś σ jest czasem Markowa, to zmienna losowa X_σ jest mierzalna względem $\mathscr{F}_{\sigma+}$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że dla dowolnego zbioru borelowskiego B zachodzi

$$\mathbb{E}^x(\mathbb{1}_B(X_\sigma)|\mathscr{F}_{\sigma+}) = \mathbb{P}^x(X_\sigma \in B|\mathscr{F}_{\sigma+}) = p_0(X_\sigma, B) = \mathbb{1}_B(X_\sigma). \qquad \square$$

TWIERDZENIE 2.20. Proces Wienera jest mocnym procesem Markowa.

Dowód. Krok 1. Przypuśćmy, że σ jest $\mathscr{F}_t$-czasem Markowa, który przyjmuje przeliczalnie wiele wartości. Wtedy dla $E \in \mathscr{F}_\sigma$ oraz $s \geqslant 0$ zachodzi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(X_{\sigma+t} \in B, E, \sigma = s) &= \mathbb{P}_x(X_{s+t} \in B, E, \sigma = s)\\ &= \mathbb{E}^x(p_t(X_s, B)\mathbb{1}_{E\cap\{\sigma=s\}}) = \mathbb{E}^x(p_t(X_\sigma, B)\mathbb{1}_{E\cap\{\sigma=s\}});\end{aligned}$$

w środkowej równości wykorzystaliśmy fakt, że $E \cap \{\sigma = s\} \in \mathscr{F}_s$ i zwykłą własność Markowa. Sumując skrajne strony równości dla s równego wszystkim przeliczalnie wielu wartościom σ, otrzymujemy

$$\mathbb{P}_x(X_{\sigma+t} \in B, E, \sigma < \infty) = \mathbb{E}^x(p_t(X_\sigma, B)\mathbb{1}_{E\cap\{\sigma<\infty\}}).$$

Analogicznie jeśli f jest ograniczoną funkcją borelowską na $\mathbb{R}^d$, to

$$\mathbb{E}^x(f(X_{\sigma+t})\mathbb{1}_{E\cap\{\sigma<\infty\}}) = \mathbb{E}^x\left(\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)p_t(X_\sigma, dy)\right)\mathbb{1}_{E\cap\{\sigma<\infty\}}\right).$$

Krok 2. Niech σ będzie czasem Markowa i niech $\sigma_k = 2^k\lfloor 2^{-k}\sigma + 1\rfloor$ (oraz $\sigma_k = \infty$ gdy $\sigma = \infty$) dla $k = 0, 1, \ldots$. Wtedy dla $j = 1, 2, \ldots$ zachodzi

$$\begin{aligned}\{\sigma_k = 2^{-k}j\} &= \{2^{-k}(j-1) \leqslant \sigma < 2^{-k}j\}\\ &= \{\sigma < 2^{-k}j\} \setminus \{\sigma < 2^{-k}(j-1)\} \in \mathscr{F}_{2^{-k}j},\end{aligned}$$

skąd

$$\{\sigma_k \leqslant t\} = \bigcup_{j=1}^{\lfloor 2^k t\rfloor} \{\sigma_j = 2^{-k}j\} \in \mathscr{F}_t,$$

a więc σ_k jest $\mathscr{F}_t$-czasem Markowa, który przyjmuje przeliczalnie wiele wartości. Na mocy pierwszego kroku zachodzi zatem

$$\mathbb{E}^x(f(X_{\sigma_k+t})\mathbb{1}_{E\cap\{\sigma<\infty\}}) = \mathbb{E}^x\left(\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)p_t(X_{\sigma_k}, dy)\right)\mathbb{1}_{E\cap\{\sigma<\infty\}}\right).$$

dla $E \in \mathscr{F}_{\sigma_k}$.

Krok 3. Przy oznaczeniach z poprzedniego kroku, jeśli $E \in \mathscr{F}_{\sigma+}$, to

$$E \cap \{\sigma_k = 2^{-k}j\} = (E \cap \{\sigma < 2^{-k}j\}) \setminus \{\sigma < 2^{-k}(j-1)\} \in \mathscr{F}_{2^{-k}j},$$

czyli $E \in \mathscr{F}_{\sigma_k}$. Ponadto σ_k jest ciągiem malejącym o granicy równej σ, zatem X_{σ_k} dąży do X_σ, zaś X_{σ_k+t} dąży do $X_{\sigma+t}$. Przypuśćmy, że f jest ograniczoną funkcją ciągłą (wystarczy rozważać funkcje o zwartym nośniku lub funkcje dążące do zera w nieskończoności). Wtedy funkcja

$$g(x) = \int f(y)p_t(x, dy)$$

jest również ograniczoną funkcją ciągłą (jest to bowiem splot f z gęstością rozkładu normalnego). Oznacza to, że

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}^x(f(X_{\sigma_k+t})\mathbb{1}_{E\cap\{\sigma<\infty\}}) = \mathbb{E}^x(f(X_{\sigma+t})\mathbb{1}_{E\cap\{\sigma<\infty\}})$$

oraz

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}^x \left(\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) p_t(X_{\sigma_k}, dy) \right) \mathbb{1}_{E\cap\{\sigma<\infty\}} \right) = \mathbb{E}^x \left(\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) p_t(X_{\sigma}, dy) \right) \mathbb{1}_{E\cap\{\sigma<\infty\}} \right).$$

Wraz z wynikiem drugiego kroku daje to, na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej, równość

$$\mathbb{E}^x (f(X_{\sigma+t}) \mathbb{1}_{E\cap\{\sigma<\infty\}}) = \mathbb{E}^x \left(\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) p_t(X_{\sigma}, dy) \right) \mathbb{1}_{E\cap\{\sigma<\infty\}} \right).$$

dla $E \in \mathscr{F}_{\sigma+}$. Ponieważ indykatory zbiorów otwartych można przybliżać funkcjami ciągłymi (dla dowolnego zbioru otwartego B ciąg funkcji ciągłych $f_n(x) = \min\{1, n \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus B)\}$ dąży punktowo do $\mathbb{1}_B(x)$ i jest ograniczony przez 1), powyższa równość zachodzi również dla funkcji $f = \mathbb{1}_B$ dla zbiorów otwartych B (wykorzystujemy to ponownie twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej). Klasa zbiorów B takich, że rozważana równość zachodzi dla $f = \mathbb{1}_B$, jest λ-układem. Skoro zawiera ona zbiory otwarte, z lematu Dynkina o π-λ-układach wnioskujemy, że zawiera wszystkie zbiory borelowskie. To zaś jest równoważne mocnej własności Markowa. □

Zauważmy, że w powyższym dowodzie wykorzystaliśmy wyłącznie własność Markowa, prawostronną ciągłość trajektorii oraz ciągłość całki z f względem prawdopodobieństwa przejścia dla odpowiednich funkcji ciągłych f. Te własności będą stanowiły podstawę definicji procesu Fellera.

Przedstawiona wyżej definicja mocnej własności Markowa nie jest tą najczęściej używaną w przypadku procesu Wienera (czy ogólniej dla procesów Lévy'ego). Tradycyjne sformułowanie jest jednak nietrudną konsekwencją poprzedniego twierdzenia.

> Wniosek 2.21. Jeśli X_t jest procesem Wienera, zaś σ czasem Markowa względem naturalnej filtracji procesu X_t, to, warunkowo gdy $\sigma < \infty$, proces $Y_t = X_{\sigma+t} - X_\sigma$ jest startującym z zera procesem Wienera niezależnym of $\mathscr{F}_{\sigma+}$.

Dowód. Najprościej być może powtórzyć dowód twierdzenia z odpowiednimi modyfikacjami, lecz można też wywieść powyższy wniosek z samej tezy twierdzenia. Z uwagi pod definicją mocnej własności Markowa wynika, że $X_{\sigma+t}$ jest procesem Markowa o prawdopodobieństwach przejścia takich, jak proces Wienera; jest więc procesem Wienera startującym z X_σ. Stąd łatwo wynika, że Y_t jest procesem Wienera startującym z zera. Ponadto rozkład warunkowy zmiennej Y_t pod warunkiem $\mathscr{F}_{\tau+}$ to $p_t(0, dy)$, wobec czego zmienna Y_t jest niezależna od $\mathscr{F}_{\tau+}$. Analogicznie rozkłady skończenie wymiarowe Y_t są niezależne od $\mathscr{F}_{\tau+}$, co już oznacza niezależność całego procesu Y_t of $\mathscr{F}_{\tau+}$. □

Z ostatniego sformułowania łatwo wynika *zasada odbicia*.

> Wniosek 2.22. Jeśli X_t jest jednowymiarowym procesem Wienera startującym z zera, $x > 0$, zaś $\tau_x = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant x\}$ czasem dojścia do x, to
>
> $$\mathbb{P}(\tau_x < t) = \mathbb{P}(\max\{X_s : s \in [0,t]\} > x) = \mathbb{P}(|X_t| > x).$$

Dowód. Oznaczmy $\sigma = \tau_x$. Ponieważ τ_x jest czasem wyjścia z $(-\infty, x)$, jest to czas Markowa. Oczywiście $X_\sigma = x$ gdy $\sigma < \infty$. Na mocy mocnej własności Markowa proces $Y_t = X_{\sigma+t} - X_\sigma$ jest procesem Wienera niezależnym od $\mathscr{F}_{\sigma+}$ (na zdarzeniu $\{\sigma < \infty\}$; w

istocie prawdopodobieństwo tego zdarzenia to 1, ale nie będzie nam to potrzebne). Skoro σ jest mierzalna względem $\mathscr{F}_{\sigma+}$, Y_t jest procesem niezależnym od σ. Zachodzi więc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_t > x) &= \mathbb{P}(X_t > x, \sigma < t) = \mathbb{P}(X_t > X_\sigma, \sigma < t) = \mathbb{P}(Y_{t-\sigma} > 0, \sigma < t)\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(Y_{t-\sigma} > 0, \sigma < t|\sigma)) = \mathbb{E}(\tfrac{1}{2}\mathbb{1}_{\sigma<t}) = \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(\sigma < t). \qquad \square\end{aligned}$$

3. **Procesy Fellera**

Celem niniejszego rozdziału jest wprowadzenie w miarę ogólnej klasy procesów, dla których łatwo uogólnić wyniki dotyczące ruchu Browna, przedstawione w poprzedniej części. Do mierzalności czasów wyjścia potrzebna była prawostronna ciągłość trajektorii i równość granicy $X(\tau_n)$ oraz $X(\tau)$ gdy τ_n jest rosnącym ciągiem czasów Markowa zbieżnym do τ. Z kolei mocna własność Markowa wymagała własności Markowa, prawostronnej ciągłości trajektorii i ciągłości funkcji postaci $\int_{\mathscr{X}} f(y)p_t(x,dy)$ dla odpowiednio regularnych funkcji f.

3.1. **Fellerowskie prawdopodobieństwa przejścia i procesy Fellera.** Niech $\mathscr{X}$ będzie lokalnie zwartą metryzowalną przestrzenią topologiczną. W takiej przestrzeni ustalamy metrykę d, w której domknięte kule są zwarte. Rodzinę zbiorów borelowskich na $\mathscr{X}$ oznaczamy przez $\mathscr{B}$. Przez $\mathscr{X}_\infty$ oznaczać będziemy *jednopunktowe uzwarcenie* przestrzeni $\mathscr{X}$, czyli przestrzeń $\mathscr{X}_\infty = \mathscr{X} \cup \{\infty\}$, gdzie ∞ jest punktem spoza $\mathscr{X}$, z następującą topologią: zbiór $G \subseteq \mathscr{X}_\infty$ jest otwarty, jeśli $G \cap \mathscr{X}$ jest otwarty w $\mathscr{X}$ oraz, w przypadku gdy $\infty \in G$, zbiór $\mathscr{X} \setminus G$ jest zwarty w $\mathscr{X}$. Jeśli $\mathscr{X}$ nie jest zwarta, to $\mathscr{X}_\infty$ jest najmniejszą zwartą przestrzenią metryczną, która zawiera $\mathscr{X}$ jako swój podzbiór. W przeciwnym przypadku ∞ jest punktem izolowanym w $\mathscr{X}_\infty$.

Jeśli $\mathscr{X} = \mathbb{R}^d$, to $\mathscr{X}_\infty$ można skonstruować w następujący sposób. Przestrzeń $\mathscr{X}$ jest homeomorficzna ze sferą w $\mathbb{R}^{d+1}$ bez ustalonego punktu — bieguna; homeomorfizmem jest rzut stereograficzny. Wtedy $\mathscr{X}_\infty$ jest homeomorficzna z całą sferą, przy czym $\mathscr{X}$ jest odwzorowana w ten sam sposób, zaś biegun jest obrazem dodatkowego punktu ∞.

Przez $C_c(\mathscr{X})$ oznaczamy funkcje ciągłe na $\mathscr{X}$, które są równe zero poza pewnym zbiorem zwartym. Domknięcie tego zbioru w klasie wszystkich funkcji ciągłych to klasa $C_0(\mathscr{X})$ funkcji zbieżnych do zera w nieskończoności. W tej przestrzeni (a także w przestrzeni ograniczonych funkcji borelowskich) określona jest norma supremum $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in \mathscr{X}\}$. Celem jednego z ćwiczeń jest wykazanie, że $f \in C_0(\mathscr{X})$ wtedy i tylko wtedy, gdy rozszerzenie f do $\mathscr{X}_\infty$ dane wzorem $f(\infty) = 0$ jest ciągłe na $\mathscr{X}_\infty$.

Funkcje $f \in C_0(\mathscr{X})$ są w istocie jednostajnie ciągłe. Jeśli bowiem $\varepsilon > 0$, to przy dowolnie ustalonym $x_0 \in \mathscr{X}$ istnieje $R > 1$ takie, że $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ gdy $x \in \mathscr{X} \setminus B(x_0, R-1)$. Z drugiej strony f jest jednostajnie ciągła na zwartym zbiorze $\overline{B}(x_0, R)$. Wobec tego istnieje $\delta \in (0,1)$ taka, że gdy $x, y \in \overline{B}(x_0, R)$ spełniają $d(x,y) < \delta$), to $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Dla dowolnych $x, y \in \mathscr{X}$ takich, że $d(x,y) < \delta$ zachodzi któryś z wartunków: $x, y \in \overline{B}(x_0, R)$ lub $x, y \in \mathscr{X} \setminus B(x_0, R-1)$. W obu przypadkach $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, czyli faktycznie f jest jednostajnie ciągła.

Jeśli G jest otwartym podzbiorem $\mathscr{X}$, to istnieje niemalejący ciąg nieujemnych funkcji $f_n \in C_c(\mathscr{X})$ zbieżny punktowo do $\mathbb{1}_G(x)$. W istocie, wystarczy rozważyć $f_n(x) = \min\{1, \operatorname{dist}(x, \mathscr{X} \setminus G_n)\}$, gdzie $G_n = G \cap B(x_0, n)$ z dowolnie ustalonym x_0.

Przyjmujemy domyślną konwencję $f(\infty) = 0$ dla *dowolnej* funkcji f określonej pierwotnie na $\mathscr{X}$. Pozwoli to na uproszczenie sformułowań wielu twierdzeń i tożsamości.

DEFINICJA 3.1. *Jądrem* na $\mathscr{X}$ nazywamy dowolną funkcję $k(x, A)$ określoną dla $x \in \mathscr{X}$ oraz $A \in \mathscr{B}$, spełniającą następujące warunki:

(a) dla każdego $x \in \mathscr{X}$ funkcja $k(x, \cdot)$ jest (nieujemną) miarą borelowską na $\mathscr{X}$;
(b) dla każdego $A \in \mathscr{B}$ funkcja $k(\cdot, A)$ jest funkcją borelowską na $\mathscr{X}$.

Jądro k jest probabilistyczne, jeśli $k(x, \cdot)$ jest miarą probabilistyczną dla każdego $x \in \mathscr{X}$. Analogicznie definiujemy jądro podprobabilistyczne. Każde jądro podprobabilistyczne automatycznie rozszerzamy do jądra probabilistycznego na $\mathscr{X}_\infty$ wzorami $k(x, \{\infty\}) = 1 - k(x, \mathscr{X})$, $k(\infty, \mathscr{X}) = 0$ oraz $k(\infty, \{\infty\}) = 1$.

Jeśli k jest jądrem na $\mathscr{X}$, f funkcją borelowską na $\mathscr{X}$, zaś μ miarą borelowską na $\mathscr{X}$, to określamy

$$kf(x) = \int_{\mathscr{X}} f(y)k(x, dy), \qquad \mu k(A) = \int_{\mathscr{X}} k(x, A)\mu(dx),$$

jeśli tylko powyższe całki mają sens. Ponadto jeśli k_1 i k_2 są jądrami, to określamy

$$k_1k_2(x, A) = \int_{\mathscr{X}} k_2(y, A)k_1(x, dy).$$

Łatwo sprawdzić, że o ile dopuszczalne jest korzystanie z twierdzenia Fubiniego (co jest prawdą, gdy na przykład f i μ są nieujemne), zachodzi $(\mu k)f = \mu(kf)$, $(k_1k_2)f = k_1(k_2f)$, $(\mu k_1)k_2 = \mu(k_1k_2)$. Równie łatwo sprawdzić, że jeśli $k(x, \mathscr{X}) \leqslant M$ dla wszystkich $x \in \mathscr{X}$, to $\|kf\| \leqslant M\|f\|$ (gdzie norma oznacza normę supremum) oraz $\|\mu k\| \leqslant M\|\mu\|$ (gdzie norma oznacza wahanie całkowite miary).

DEFINICJA 3.2. *Fellerowskim prawdopodbieństwem przejścia* na $\mathscr{X}$ nazywamy rodzinę jąder podprobabilistycznych p_t na $\mathscr{X}$, gdzie $t \geqslant 0$, o własnościach:

(a) $p_0(x, A) = \delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$;
(b) $p_{s+t} = p_s p_t$ dla $s, t \geqslant 0$;
(c) $p_t f \in C_0(\mathscr{X})$ dla $f \in C_0(\mathscr{X})$;
(d) $p_t f$ dąży do f jednostajnie gdy $t \to 0^+$ dla $f \in C_0(\mathscr{X})$.

Rodzina jąder p_t wyznacza więc *mocno ciągłą półgrupę operatorów* na przestrzeni $C_0(\mathscr{X})$ — tzw. *półgrupę Fellera*. Wrócimy do tej interpretacji przy omawianiu generatora.

Naturalne rozszerzenie p_t do $\mathscr{X}_\infty$ też jest fellerowskim prawdopodobieństwem przejścia (sprawdzenie tego faktu jest treścią jednego z ćwiczeń).

Definicja procesu Fellera jest nader prosta.

DEFINICJA 3.3. *Proces Fellera* to jednorodny w czasie proces Markowa na $\mathscr{X}_\infty$, gdzie $\mathscr{X}$ jest lokalnie zwartą przestrzenią metryczną, którego prawdopodobieństwa przejścia są fellerowskie. *Czasem życia* procesu Fellera X_t nazywamy losowy czas

$$\zeta = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = \infty\}.$$

Dla wygody będziemy czasem przyjmowali, że $X_\infty = \infty$, tak aby $f(X_\infty) = 0$ dla dowolnej funkcji f na $\mathscr{X}$. Ta konwencja również pozwoli uprościć wiele sformułowań. Stan ∞ w kontekście procesów Fellera (czy ogólniej: procesów Markowa) często nazywany jest *stanem cmentarnym*.

Kluczowe twierdzenie stwierdza istnienie odpowiednio regularnego procesu Fellera o zadanych prawdopodobieństwach przejścia.

TWIERDZENIE 3.4. Dla dowolnego fellerowskiego prawdopodobieństwa przejścia p_t istnieje proces Fellera, którego prawdopodobieństwa przejścia są równe p_t. Można przy tym założyć, że (z prawdopodobieństwem 1 względem każdej z miar $\mathbb{P}^x$, $x \in \mathscr{X}$) proces ten ma ponadto prawostronnie ciągłe trajektorie z lewostronnymi granicami w każdym $t > 0$ (z języka francuskiego pochodzi określenie càdlàg, skrót od *continue à droite, limite à gauche*; po angielsku mówi się czasem RCLL, od *right continuous with left limits*).

Co więcej, jesli X_t jest procesem Fellera, to proces

$$Y_t = \lim_{\substack{s \to t^+ \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s$$

jest poprawnie określonym procesem Fellera o tych samych prawdopodobieństwach przejścia, który z prawdopodobieństwem 1 ma prawostronnie ciągłe trajektorie z lewostronnym granicami w każdym $t > 0$, i który spełnia $\mathbb{P}^x(Y_t = X_t) = 1$ dla każdego $t \geqslant 0$ i $x \in \mathscr{X}$ (przy czym trzeba tu rozważać odpowiednio uzupełnione σ-ciała $\mathscr{F}_t$).

Dowód tego twierdzenia podany zostanie w następnej części i na dodatkowej liście zadań. W przyszłości zawsze będziemy zakładać, że rozważany proces Fellera ma z prawdopodobieństwem 1 prawostronnie ciągłe trajektorie z lewostronnymi granicami. Dla wygody będziemy oznaczali

$$X_{t+} = \lim_{s \to t^+} X_s, \qquad X_{t-} = \lim_{s \to t^-} X_s.$$

Wiemy już, że procesy Fellera o regularnych trajektoriach mają mocną własność Markowa — dowód podany dla ruchu Browna wymaga jedynie kosmetycznych zmian.

TWIERDZENIE 3.5. Procesy Fellera, które z prawdopodobieństwem 1 mają prawostronnie ciągłe trajektorie z lewostronnymi granicami, są mocnymi procesami Markowa. W szczególności jeśli σ jest czasem Markowa, to $Y_t = X_{\sigma+t}$ jest procesem Fellera o rozkładzie początkowym $\mathscr{F}_{\sigma+}$ i o tych samych prawdopodobieństwach przejścia, co X_t, i który w takim razie też ma mocną własność Markowa.

3.2. **Przykłady procesów Fellera.** Poniższe stwierdzenie było jedną z motywacji do wprowadzenia pojęcia procesu Fellera.

PRZYKŁAD 3.6. Ruch Browna jest procesem Fellera.

Powyższe stwierdzenie wynika z dużo ogólniejszego wyniku i ciągłości trajektorii ruchu Browna.

TWIERDZENIE 3.7. Procesy Lévy'ego, a więc procesy o przyrostach niezależnych i stacjonarnych, spełniające warunek *stochastycznej ciągłości*: X_t jest zbieżne do X_0 według miary $\mathbb{P}^x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$, są procesami Fellera.

Dowód. Wiemy już, że omawiane procesy są procesami Markowa, których prawdopodobieństwa przejścia są jednorodne w czasie i przestrzeni: $p_t(x, A) = \mu_t(A - x)$, gdzie μ_t jest miarą (w przypadku ruchu Browna jest ot miara o gęstości $(4\pi t)^{-d/2} \exp(-|x|^2/(4t))$ gdy $t > 0$ oraz $\mu_0 = \delta_0$). Pozostaje sprawdzić, że prawdopodobieństwo przejścia p_t jest fellerowskie. Pierwsze dwa warunki są spełnione automatycznie przez każde prawdopodobieństwo przejścia jednorodnego w czasie procesu Markowa. Trzeci jest konsekwencją własności splotu i równości

$$p_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) p_t(x, dy) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x + z) p_t(0, dz) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x + z) \mu_t(dz).$$

W istocie, jeśli f jest ciągła i ograniczona oraz x_n dąży do x, to $f(x_n + z)$ dąży do $f(x + z)$ punktowo i na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej $p_t f(x_n)$ dąży $p_t f(x)$. Podobnie jeśli f jest ograniczona i dąży do zera w nieskończoności oraz $|x_n|$ dąży do nieskończoności, to $p_t f(x_n)$ dąży do zera, ponownie na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej. Ostatnia własność fellerowskiego prawdopodobieństwa przejścia jest konsekwencją stochastycznej ciągłości i jednostajnej ciągłości funkcji f: jeśli $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ jest dobrana z definicji jednostajnej ciągłości f, to zachodzi

$$|p_t f(x) - f(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x + z) - f(x)| \mu_t(dz) \leqslant \varepsilon \mu_t(B(0, \delta)) + 2\|f\| \mu_t(\mathbb{R}^d \setminus B(0, \delta)).$$

Zbieżność według miary X_t do 0 względem $\mathbb{P}^0$ oznacza, że $\mu_t(\mathbb{R}^d \setminus B(0, \delta))$ dąży do zera gdy $t \to 0^+$, zatem dla dostatecznie małych $t > 0$ zachodzi

$$\|p_t f - f\| \leqslant \varepsilon \cdot 1 + 2\|f\| \cdot \varepsilon = \varepsilon(1 + 2\|f\|).$$

Oznacza to, że $p_t f$ dąży do f jednostajnie gdy $t \to 0^+$. □

Bezpośrednim wnioskiem jest wynik zawarty w kolejnych trzech przykładach. Przypomnijmy, że *proces Poissona* to proces X_t o kawałkami stałych, prawostronnie ciągłych trajektoriach, który ma niezależne i stacjonarne przyrosty o rozkładzie Poissona. Przyjmujemy, że początkową wartością może być dowolny punkt $x \in \mathbb{R}$.

PRZYKŁAD 3.8. Proces Poissona jest procesem Fellera.

Innym znanym procesem o niezależnych i stacjonarnych przyrostach jest proces Cauchy'ego, pochodzący od rodziny rozkładów Cauchy'ego w $\mathbb{R}^d$:

$$\mu_t(dx) = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{(d+1)/2}} \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{(d+1)/2}} \, dx.$$

Funkcją charakterystyczną rozkładu μ_t jest $e^{-t|\xi|}$ (dowód tego faktu pomijamy), skąd łatwo wywnioskować, że $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$ oraz że μ_t dąży *-słabo do δ_0 gdy $t \to 0^+$. Oznacza to, że rodzina prawdopodobieństw przejścia $p_t(x, A) = \mu_t(A - x)$ jest fellerowska, a więc istnieje proces Fellera o takich prawdopodobieństwach przejścia — jest to właśnie *proces Cauchy'ego*.

PRZYKŁAD 3.9. Proces Cauchy'ego jest procesem Fellera.

Jest wreszcie oczywiste, że proces deterministyczny $X_t = X_0 + tv$, gdzie v jest ustalonym wektorem w $\mathbb{R}^d$, jest procesem o niezależnych (bo deterministycznych) i stacjonarnych przyrostach. Proces ten nosi nazwę *procesu jednostajnego dryfu* w kierunku v i często jest nazywany żartobliwe (lecz nie bez powodu) *uniwersalnym kontrprzykładem*.

PRZYKŁAD 3.10. Proces jednostajnego dryfu jest procesem Fellera.

Ważną klasą przykładów procesów Markowa są procesy, których trajektorie są kawałkami stałe. Najogólniejsza konstrukcja wygląda następująco. Rozważmy jądro $\nu(x, A)$ na $\mathscr{X}$, spełniające $\nu(x, \{x\}) = 0$ dla każdego $x \in \mathscr{X}$. Niech Y_n $(n = 0, 1, \ldots)$ będzie łańcuchem Markowa z czasem dyskretnym o prawdopodobieństwie przejścia $\nu(x, A)/\nu(x, \mathscr{X})$. Oznaczmy dla wygody $Y_\infty = \infty$. Łańcuch Markowa Y_n opisuje kolejne stany odwiedzane przez proces X_t, przy czym czas $T_{n+1} - T_n$ spędzony w stanie Y_n, warunkowo gdy $Y_0 = x_0, Y_1 = x_1, \ldots$, ma rozkład wykładniczy z parametrem $\nu(x_n, \mathscr{X})$. Przyjmujemy tu $T_0 = 0$.

Z formalnego punktu widzenia konstrukcja Y_n wymaga twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu procesu, zaś T_n łatwo skonstruować przy pomocy ciągu niezależnych zmiennych losowych S_n (niezależnych również od procesu Y_n) o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1: wystarczy przyjąć $T_0 = 0$ oraz $T_{n+1} = T_n + S_n/\nu(Y_n, \mathscr{X})$. Gdy $\nu(Y_n, \mathscr{X}) = 0$, to oczywiście przyjmujemy $T_{n+1} = \infty$.

Jeśli $N(t)$ jest procesem liczącym sygnały T_n, czyli $N(t)$ jest największą nieujemną liczbą całkowitą n dla której $T_n \leqslant t$ (oraz $N(t) = \infty$ gdy $T_n \leqslant t$ dla wszystkich n), to $X_t = Y_{N(t)}$.

Skonstruowany wyżej proces X_t nazywany jest *łańcuchem Markowa z czasem ciągłym* (o niekoniecznie dyskretnej przestrzeni stanów). W przypadku, gdy $\nu(x, \mathscr{X})$ jest funkcją ograniczoną, mówimy, że X_t jest *regularnym* łańcuchem Markowa z czasem ciągłym.

Zachodzi następujące twierdzenie, którego dowód pomijamy (przebiega on podobnie do analogicznego dowodu dla łańcuchów Markowa z czasem ciągłym o skończonej przestrzeni stanów).

TWIERDZENIE 3.11. Łańcuchy Markowa z czasem ciągłym są procesami Markowa.

Uzasadnienie stwierdzenia z kolejnego przykładu jest treścią ćwiczenia na liście zadań.

PRZYKŁAD 3.12. Łańcuchy Markowa z czasem ciągłym o skończonej liczbie stanów są procesami Fellera.

Więcej przykładów łańcuchów Markowa z czasem ciągłym omówionych będzie przy okazji odpowiednich zadań.

Gdy X_t jest procesem Fellera, procesem takim jest również proces czasoprzestrzenny (t, X_t). Formalna definicja tego procesu jest odrobinę bardziej skomplikowana.

DEFINICJA 3.13. Jeśli X_t jest procesem Fellera, to proces czasoprzestrzenny Z_t jest określony na $\mathbb{R} \times \Omega$ (lub $[0, \infty) \times \omega$) wzorem $Y_t(a, \omega) = (a + t, X_t(\omega))$ i przyjmuje wartości w $\mathbb{R} \times \mathscr{X}$ (lub $[0, \infty) \times \mathscr{X}$). Miara $\mathbb{P}^{a,x} = \delta_a \times \mathbb{P}^x$ dana jest wzorem $\mathbb{P}^{a,x}(A \times E) = \delta_a(A)\mathbb{P}^x(E)$.

TWIERDZENIE 3.14. Jeśli X_t jest procesem Fellera, to proces czasoprzestrzenny Z_t jest procesem Fellera na $\mathbb{R} \times \mathscr{X}$ lub $[0, \infty) \times \mathscr{X}$.

Dowód. Rozważmy przypadek procesu o wartościach w $\mathbb{R} \times \mathscr{X}$; przypadek przestrzeni stanów $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ jest analogiczny. Proces $Z_t = (T_t, X_t)$ jest jednorodnym w czasie procesem Markowa (względem filtracji naturalnej Z_t, czyli $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{F}_t$, gdzie $\mathscr{F}_t$ jest filtracją naturalną X_t): łatwo wykazać, że rozkład warunkowy Z_{s+t} pod warunkiem $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{F}_s$ to $\delta_{T_s+t}(db) p_t(X_s, dy)$, gdzie p_t oznacza prawdopodobieństwo przejścia procesu X_t. W szczególności prawdopodobieństwem przejścia Z_t jest $q_t(a, x, db, dy) = \delta_{a+t}(db) p_t(x, dy)$.

Jeśli $f \in C_0(\mathbb{R} \times \mathscr{X})$, to f jest jednostajnie ciągła. Wynika stąd, że dla każdego $a \in \mathbb{R}$ funkcja $f_a(x) = f(a, x)$ jest klasy C_0 na $\mathscr{X}$, przy czym gdy a dąży do b w $\mathbb{R}$, to f_a dąży do f_b jednostajnie. Ponadto f_a dąży jednostajnie do zera gdy $|a| \to \infty$ (bowiem $|f(a, x)| < \varepsilon$ poza zbiorem zwartym — którego rzut na pierwszą współrzędną jest zwarty). Dodatkowo jeśli $F(x) = \sup\{|f(a, x)| : a \in \mathbb{R}\}$, to $F \in C_0(\mathscr{X})$ (ciągłość wynika z jednostajnej ciągłości f, zaś zbieżność do zera jest ponownie konsekwencją tego, że $|f(a, x)| < \varepsilon$ poza zbiorem zwartym — którego rzut na drugą współrzędną jest zwarty). Oczywiście

$$q_t f(a, x) = \int_{\mathscr{X}} f(a + t, y) p_t(x, dy) = p_t f_{a+t}(x).$$

W kolejnej części dowodzimy, że $p_t f(x)$ jest ciągłą funkcją t, x oraz f (łącznie). W świetle wcześniejszych obserwacji oznacza to ciągłość $p_t f_{a+t}(x)$ względem a i x (łącznie). Ponadto gdy $|a| \to \infty$, to $p_t f_{a+t}$ dąży do zera jednostajnie, a skoro $|p_t f_{a+t}(x)| \leqslant p_t F(x)$ dla wszystkich $a \in \mathbb{R}$, to $p_t f_{a+t}(x)$ dąży do zera również gdy $x \to \infty$, jednostajnie względem $a \in \mathbb{R}$. Wszystko to dowodzi, że $q_t f \in C_0(\mathbb{R} \times \mathscr{X})$.

Gdy $t \to 0^+$, to $f_{a+t}(x)$ dąży do $f_a(x)$ jednostajnie względem $a \in \mathbb{R}$ oraz $x \in \mathscr{X}$ (bo f jest jednostajnie ciągła). Stąd i z ciągłości $p_t f(x)$ jako funkcji trzech zmiennych wynika zaś, że $p_t f_{a+t}(x)$ dąży do $f_a(x)$ jednostajnie względem $a \in \mathbb{R}$ oraz $x \in \mathscr{X}$.

Dowiedliśmy zatem, że q_t spełnia wszystkie warunki fellerowskiego prawdopodobieństwa przejścia. □

3.3. **Własności fellerowskich prawdopodobieństw przejścia.** Wprost z definicji wynika, że $\|p_t f\| \leqslant \|f\|$ dla dowolnej funkcji $f \in C_0(\mathscr{X})$ (czy ogólniej: dowolnej ograniczonej funkcji borelowskiej na $\mathscr{X}$). Pierwszy wynik jest wygodnym wzmocnieniem definicji fellerowskiego prawdopodobieństwa przejścia, wykorzystanym już powyżej.

LEMAT 3.15. Jeśli p_t jest fellerowskim prawdopodobieństwem przejścia, to funkcja $p_t f(x)$ jest ciągła względem wszystkich trzech argumentów (t, x, f) łącznie.

Dowód. Zauważmy, że

$$|p_s g(y) - p_t f(x)| \leqslant |p_t f(y) - p_t f(x)| + |p_s f(y) - p_t f(y)| + |p_s f(y) - p_s g(y)|.$$

Oczywiście

$$|p_s f(y) - p_s g(y)| \leqslant \|p_s(f - g)\| \leqslant \|f - g\|.$$

Ponadto jeśli $r = \min(s, t)$, to $r + |s - t| = \max(s, t)$, zatem

$$\begin{aligned} |p_s f(y) - p_t g(y)| &\leqslant \|p_s f - p_t g\| = \|p_{r+|s-t|} f - p_r f\| \\ &= \|p_r(p_{|s-t|} f - f)\| \leqslant \|p_{|s-t|} f - f\|. \end{aligned}$$

Jeśli więc $t \geqslant 0$, $x \in \mathscr{X}$ oraz $f \in C_0(\mathscr{X})$ są ustalone i $\varepsilon > 0$, to z warunków $\|g - f\| < \frac{\varepsilon}{3}$ (g jest w pewnym otoczeniu f), $\|p_{|s-t|}f - f\| < \frac{\varepsilon}{3}$ (s jest w pewnym otoczeniu t) oraz $|p_t f(y) - p_t f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (y jest w pewnym otoczeniu x) wynika, że $|p_s f(y) - p_t f(x)| < \varepsilon$. □

Kolejny lemat pozwala całkować wyrażenia postaci $p_t f$ po czasie.

LEMAT 3.16. Dla dowolnego fellerowskiego prawdopodobieństwa przejścia p_t, zbioru borelowskiego A i ograniczonej lub nieujemnej funkcji borelowskiej f funkcje $p_t(x, A)$ oraz $p_t f(x)$ są borelowskimi funkcjami zmiennych (t, x) łącznie.

Dowód. Wiemy już, że gdy $f \in C_0(\mathscr{X})$, to $p_t f(x)$ jest ciągłą funkcją (t, x) łącznie. Jeśli A jest zbiorem otwartym, to istnieje ciąg nieujemnych funkcji $f_n \in C_0(\mathscr{X})$, niemalejący i zbieżny punktowo do $\mathbb{1}_A$. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej wynika, że $p_t f_n$ dąży punktowo do $p_t \mathbb{1}_A$. W szczególności $p_t \mathbb{1}_A(x) = p_t(x, A)$ jest funkcją borelowską zbiennych (t, x). Klasa wszystkich zbiorów A mających tę własność jest λ-układem, który zawiera π-układ zbiorów otwartych. Na mocy lematu Dynkina o π-λ-układach $p_t(x, A)$ jest funkcją borelowską (t, x) dla dowonego borelowskiego zbioru A. Stosując standardowy argument w teorii miary wnioskujemy, że $p_t f(x)$ jest funkcją borelowską (t, x) dla dowolnej ograniczonej lub nieujemnej funkcji borelowskiej f. □

Ostatni wynik orzeka pewną regularność procesów Fellera, która przyda się przy regulowaniu trajektorii.

LEMAT 3.17. Każdy proces Fellera jest stochastycznie ciągły: jeśli $s \to t$, to zmienne losowe X_s są zbieżne do X_t według prawdopodobieństwa $\mathbb{P}^x$ dla dowolnego $x \in \mathscr{X}$ (w metryce przestrzeni $\mathscr{X}_\infty$).

Dowód. Niech $f, g \in C_0(\mathscr{X})$ oraz $0 \leqslant s \leqslant s + t$. Na mocy własności Markowa,

$$\mathbb{E}^x(f(X_s)g(X_{s+t})) = \mathbb{E}^x(f(X_s)g(X_{s+t})|\mathscr{F}_s) = \mathbb{E}^x(f(X_s)p_t g(X_s)) = p_s(f p_t g)(x).$$

Jeśli więc $s \to r$ oraz $t \to 0^+$, to $p_t g \to g$ w $C_0(\mathscr{X})$, a więc $f p_t g \to f g$ w $C_0(\mathscr{X})$, przez co $p_s(f p_t g) \to p_r(fg)$ w $C_0(\mathscr{X})$. Ostatecznie więc

$$\mathbb{E}^x(f(X_s)g(X_{s+t})) \to \mathbb{E}^x(f(X_r)g(X_r))$$

jednostajnie względem $x \in \mathscr{X}$.

Metrykę przestrzeni $\mathscr{X}_\infty$ można zapisać w postaci

$$d_\infty(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|,$$

gdzie f_n jest odpowiednim ciągiem funkcji klasy $C_0(\mathscr{X})$ o normie co najwyżej 1 (szczegóły są treścią jednego z ćwiczeń). Wobec tego, na mocy nierówności Schwarza,

$$(d_\infty(x, y))^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} ((f_n(x))^2 + (f_n(y))^2 - 2 f_n(x) f_n(y))$$

Z pierwszej części dowodu i twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej wynika, że gdy $s \to r$, $t \to 0^+$, to

$$\mathbb{E}^x \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} ((f_n(X_s))^2 + (f_n(X_{s+t}))^2 - 2 f_n(X_s) f_n(X_{s+t})) \to 0$$

jednostajnie względem $x \in \mathscr{X}$. Oznacza to, że

$$\mathbb{E}^x((d_\infty(X_s, X_{s+t}))^2) \to 0$$

jednostajnie względem $x \in \mathscr{X}$. Stąd oczywiście wynika teza twierdzenia. □

3.4. **Jądra potencjału.** Transformata Laplace'a funkcji f na $(0, \infty)$, czyli odwzorowanie $\lambda \mapsto \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt$, wyznacza tę funkcję jednoznacznie i zamienia różniczkowanie f w mnożenie transformaty f przez λ. Pomysł ten świetnie stosuje się do badania jąder $p_t(x, A)$ jako funkcji czasu.

DEFINICJA 3.18. Dla fellerowskiego prawdopodobieństwa przejścia p_t oraz $\lambda \geqslant 0$ definiujemy *jądro λ-potencjału* wzorem

$$u_\lambda(x, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_t(x, A)dt.$$

Gdy $\lambda = 0$, piszemy często $u(x, A) = u_0(x, A)$.

Gdy $\lambda = 0$ jądro u_λ może być nieskończone, ale gdy $\lambda > 0$, to oczywiście $u_\lambda(x, \mathscr{X}) \leqslant \frac{1}{\lambda}$. Zauważmy, że $u_\lambda(x, A)$ istotnie jest jądrem: σ-addytywność względem A wynika z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej (alternatywnie: twierdzenia Fubiniego), zaś mierzalność względem x jest konsekwencją mierzalności $p_t(x, A)$ względem (t, x) oraz twierdzenia Fubiniego.

W przypadku $\lambda = 0$ jądro potencjału $u(x, A)$ ma ważną interpretację probabilistyczną: mierzy średni czas przebywania procesu X_t w zbiorze A, jeśli x jest punktem startu. W istocie: na mocy twierdzenia Fubiniego zachodzi

$$u(x, A) = \int_0^\infty p_t(x, A)dt = \int_0^\infty \mathbb{E}^x(\mathbb{1}_A(X_t))dt = \mathbb{E}^x\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_A(X_t)dt\right),$$

zatem $u(x, A)$ jest średnią miarą Lebesgue'a zbioru $\{t \in [0, \infty) : X_t \in A\}$.

Motywację do badania jąder potencjału (a także do używania właśnie takiej nazwy) stanowi następujący wynik.

PRZYKŁAD 3.19. Dla ruchu Browna zachodzi

$$u(x, A) = \frac{1}{(d-2)\omega_d} \int_A \frac{1}{|y-x|^{d-2}}\, dy$$

gdy $d \geqslant 3$ oraz $u(x, A) = \infty|A|$ gdy $d = 1$ lub $d = 2$. Jądrem 0-potencjału ruchu Browna jest więc jądro potencjału Newtona.

W istocie, podstawiając $|z|^2/(4t) = s$, $t = |z|^2/(4s)$, $dt = -|z|^2/(4s^2)ds$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (4\pi t)^{-d/2} e^{-|z|^2/(4t)}dt &= \frac{|z|^2}{4(\pi|z|^2)^{d/2}} \int_0^\infty s^{d/2} e^{-s} s^{-2} ds \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{4\pi^{d/2}|z|^{d-2}} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{2(d-2)\pi^{d/2}|z|^{d-2}} = U(z)\,.\end{aligned}$$

By uzyskać żądany wynik, wystarczy skorzystać z twierdzenia Fubiniego:

$$u(x, A) = \int_0^\infty \int_A (4\pi t)^{-d/2} e^{-|y-x|^2/(4t)} dy dt = \frac{1}{(d-2)\omega_d} \int_A \frac{1}{|y-x|^{d-2}}\, dy.$$

Jak już wspomniano, z nierówności $p_t(x, \mathscr{X}) \leqslant 1$ wynika nierówność $u_\lambda(x, \mathscr{X}) \leqslant \frac{1}{\lambda}$. Zachodzi zatem $\|p_t f\| \leqslant \|f\|$ oraz $\|u_\lambda f\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f\|$ dla borelowskich funkcji ograniczonych f.

LEMAT 3.20. Dla fellerowskiego prawdopodobieństwa przejścia p_t oraz $f \in C_0(\mathscr{X})$, $\lambda > 0$ zachodzi $u_\lambda f \in C_0(\mathscr{X})$.

Dowód. Jest to bardzo ogólny fakt, ale udowodnimy go elementarnie w naszym kontekście. Sumy Riemanna

$$g_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda k/n}}{n} p_{k/n} f$$

należą do $C_0(\mathscr{X})$, bowiem definiujący je szereg jest jednostajnie zbieżny (norma supremum wyrazu nie przekracza $e^{-\lambda k/n}\|f\|$). Zachodzi

$$\begin{aligned} |u_\lambda f(x) - g_n(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k/n}^{(k+1)/n} |e^{-\lambda t} p_t f(x) - e^{-\lambda k/n} p_{k/n} f(x)| dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k/n}^{(k+1)/n} |e^{-\lambda k/n} p_{k/n} (e^{-\lambda(t-k/n)} p_{t-k/n} f - f)(x)| dt \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-\lambda k/n} \|e^{-\lambda(t-k/n)} p_{t-k/n} f - f\| dt. \end{aligned}$$

Ponieważ $p_t f$ dąży do f jednostajnie gdy $t \to 0^+$, również $e^{-\lambda t} p_t f$ dąży do f jednostajnie gdy $t \to 0^+$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje więc $\delta > 0$ taka, że jeśli $t \in (0, \delta)$, to $\|e^{-\lambda t} p_t f - f\| < \varepsilon$. Jeśli więc $\frac{1}{n} < \delta$, to

$$|u_\lambda f(x) - g_n(x)| < \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-\lambda k/n} dt = \frac{\varepsilon}{n} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k/n} = \frac{\varepsilon}{n(1 - e^{-\lambda/n})} \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Zatem g_n dąży jednostajnie do $u_\lambda f$. □

LEMAT 3.21. Dla fellerowskiego prawdopodobieństwa przejścia p_t oraz $f \in C_0(\mathscr{X})$ zachodzi

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|\lambda u_\lambda f - f\| = 0.$$

Dowód. Jeśli $f \in C_0(\mathscr{X})$, to $p_t f$ dąży do f jednostajnie gdy $t \to 0^+$. Ponadto

$$\begin{aligned} |\lambda u_\lambda f(x) - f(x)| &= \left| \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} (p_t f(x) - f(x)) dt \right| \\ &\leqslant \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \|p_t f - f\| dt = \int_0^{\infty} e^{-s} \|p_{s/\lambda} f - f\| ds. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\|\lambda u_\lambda f - f\| \leqslant \int_0^{\infty} e^{-s} \|p_{s/\lambda} f - f\| ds.$$

Funkcja podcałkowa ograniczona jest przez $2e^{-s}$ i dąży punktowo do zera gdy $\lambda \to \infty$. Teza wynika więc z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej. □

LEMAT 3.22. Dla fellerowskiego prawdopodobieństwa przejścia p_t oraz $f \in C_0(\mathscr{X})$, $\lambda, \mu > 0$, $\lambda \neq \mu$, zachodzi równanie rezolwenty

$$u_\lambda u_\mu f = -\frac{1}{\lambda - \mu}(u_\lambda f - u_\mu f).$$

Dowód. W istocie, na mocy twierdzenia Fubiniego,

$$\begin{aligned} u_\lambda u_\mu f(x) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_t u_\mu f(x) dt = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} p_t p_s f(x) ds dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t - \mu s} p_{t+s} f(x) ds dt = \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-\lambda t - \mu(r-t)} p_r f(x) dr dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^r e^{-(\lambda-\mu)t - \mu r} p_r f(x) dt dr = \frac{1}{\lambda - \mu} \int_0^\infty (e^{-\mu r} - e^{-\lambda r}) p_r f(x) dr \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu} (u_\mu f(x) - u_\lambda f(x)). \end{aligned}$$

□

LEMAT 3.23. Dla fellerowskiego prawdopodobieństwa przejścia p_t, nieujemnej funkcji $f \in C_0(\mathscr{X})$, $\lambda \geqslant 0$ oraz $g = u_\lambda f$ zachodzi $e^{-\lambda t} p_t g(x) \leqslant g(x)$ dla wszystkich $x \in \mathscr{X}$ i $t \geqslant 0$ oraz

$$\lim_{t \to 0^+} e^{-\lambda t} p_t g(x) = g(x).$$

Tam, gdzie g jest skończona, zbieżność jest jednostajna.

Dowód. Zachodzi (na mocy twierdzenia Fubiniego)

$$e^{-\lambda t} p_t g(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda(t+s)} p_{t+s} f(x) ds = \int_t^\infty e^{-\lambda r} p_r f(x) dr.$$

Na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej prawa strona rośnie gdy $t \to 0^+$ do wartości granicznej równej $u_\lambda f(x) = g(x)$. Gdy wartość $g(x)$ jest skończona, można napisać

$$|g(x) - e^{-\lambda t} p_t g(x)| = \left| \int_0^t e^{-\lambda r} p_r f(x) dr \right| \leqslant \int_0^t e^{-\lambda t} \|p_r f\| dr \leqslant t \|f\|,$$

skąd wynika zbieżność jednostajna $e^{-\lambda t} p_t g$ do g. □

3.5. **Funkcje ekscesywne.** Jednym z podstawowych narzędzi teorii potencjału procesów Markowa są funkcje ekscesywne. W pewnym sensie pełnią rolę funkcji nieujemnych w teorii całki Lebesgue'a.

DEFINICJA 3.24. Nieujemna funkcja borelowska f o wartościach w $[0, \infty]$ nazywana jest *funkcją λ-ekscesywną* dla rodziny fellerowskich prawdopodobieństw przejścia $p_t(x, dy)$, jeśli $e^{-\lambda t} p_t f(x) \leqslant f(x)$ dla wszystkich $x \in \mathscr{X}$ i $t \geqslant 0$ i ponadto $e^{-\lambda t} p_t f(x)$ dąży do $f(x)$ gdy $t \to 0^+$. Gdy $\lambda = 0$, o funkcji f mówimy, że jest ekscesywna.

Ostatni wynik poprzedniej części oznacza zatem, że jeśli $f \in C_0(\mathscr{X})$, $f \geqslant 0$ oraz $\lambda \geqslant 0$, to funkcja $u_\lambda f$ jest λ-ekscesywna. Jeśli f jest λ_1-ekscesywna i $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$, to f jest λ_2-ekscesywna. Ponadto funkcje stałe są zawsze λ-ekscesywne: jeśli $f(x) = 1$, to $p_t f(x) = p_t(x, X) \leqslant 1 = f(x)$ i ponadto dla dowolnego $x \in \mathscr{X}$ istnieje funkcja $g \in C_0(\mathscr{X})$ taka, że $g(y) \leqslant 1$ oraz $g(x) = 1$, zatem

$$\liminf_{t\to 0^+} p_t f(x) \geqslant \lim_{t\to 0^+} p_t g(x) = g(x) = 1.$$

LEMAT 3.25. Jeśli X_t jest procesem Fellera o prawdopodobieństwie przejścia p_t, zaś g jest skończoną funkcją λ-ekscesywną, to proces $e^{-\lambda t} g(X_t)$ jest nieujemnym nadmartyngałem.

Dowód. Na mocy własności Markowa

$$\mathbb{E}^x(e^{-\lambda(t+s)} g(X_{s+t}) | \mathscr{F}_s) = e^{-\lambda(t+s)} p_t g(X_s) \leqslant e^{-\lambda s} g(X_s). \qquad \square$$

Funkcji ekscesywnych może być niewiele; można na przykład udowodnić, że dla jednowymiarowego ruchu Browna ekscesywne są tylko funkcje stałe. Okazuje się jednak, że gdy $\lambda > 0$, klasa funkcji λ-ekscesywnych postaci $u_\lambda f$ (gdzie $f \in C_0(\mathscr{X})$ jest nieujemna) jest już dostatecznie bogata.

LEMAT 3.26. Istnieje przeliczalna rodzina funkcji $g_n \in C_0(\mathscr{X})$ spełniających następujące warunki: g_n jest λ_n-ekscesywna dla pewnego $\lambda_n > 0$, zaś dla dowolnych $x, y \in \mathscr{X}$ istnieje n takie, że $g_n(x) \neq g_n(y)$ (a więc rodzina funkcji g_n rozdziela punkty przestrzeni $\mathscr{X}$).

Dowód. Rozważmy przeliczalną rodzinę nieujemnych funkcji $f_k \in C_0(\mathscr{X})$, która rozdziela punkty (na przykład $f_k(x) = \max\{1 - d(x_k, x), 0\}$, gdzie $\{x_k : k = 1, 2, \ldots\}$ jest ośrodkiem $\mathscr{X}$). Wówczas rodzina $mu_m f_k$, gdzie $k, m = 1, 2, \ldots$, spełnia warunki lematu: $mu_m f_k$ jest m-ekscesywna, a jeśli $f_k(x) \neq f_k(y)$, to dla dostatecznie duzych m również $mu_m f_k(x) \neq mu_m f_k(y)$ (bowiem $mu_m f_k$ dąży punktowo do f_k gdy $m \to \infty$). $\square$

3.6. **Regulacja trajektorii procesu Fellera.** Jesli g jest funkcją λ-ekscesywną dla prawdopodobieństw przejścia procesu Fellera X_t, to proces $Y_t = e^{-\lambda t} g(X_t)$ jest nieujemnym nadmartyngałem. Rozważmy proces Y_s określony wyłącznie dla wymiernych wartości $s \geqslant 0$. Z lematu Dooba wynika, że z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden trajektoria tak zawężonego procesu Y_s ma w każdym rzeczywistym argumencie $t \geqslant 0$ lewostronną i prawostroną granicę (szczegóły są treścią ćwiczenia na liście zadań). Tę samą własność ma zatem proces $g(X_s) = e^{\lambda s} Y_s$ (również określony wyłącznie dla wymiernych $s \geqslant 0$).

Może się wydawać, że zbiór tych zdarzeń elementarnych, dla których powyższe granice istnieją, może nie być mierzalny, bowiem granic jest nieprzeliczalnie wiele. Tak jednak nie jest: istnienie tych granic jest równoważne skończonej liczbie przejść między dowolnymi dwiema liczbami wymiernymi (jak w lemacie Dooba), który to zbiór zdefiniowany jest przy pomocy przeliczalnych sum i przekrojów.

Niech g_n będzie rodziną funkcji λ_n-ekscesywnych, która rozdziela punkty przestrzeni $\mathscr{X}$. Wówczas z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden (w powyższym sensie) trajektorie wszystkich procesów $g_n(X_s)$, określonych wyłącznie dla wymiernych $s \geqslant 0$, mają lewostronne i prawostronne granice w każdym rzeczywistym argumencie $t \geqslant 0$.

Przypuśćmy, że pewna granica jednostronna X_s, gdzie $s \geqslant 0$ są wymierne i dążą do rzeczywistego $t \geqslant 0$, nie istnieje. Istnieją wówczas dwa ciągi s_k, r_k liczb wymiernych,

zbieżne do t z odpowiedniej strony, takie, że granice x i y ciągów X_{s_k} oraz X_{r_k} istnieją, ale są różne (tutaj $x, y \in \mathscr{X}_\infty$). Niech g_n będzie funkcją, która rozdziela x i y, tj. $g_n(x) \neq g_n(y)$. Z powyższego rozumowania wynika, że $g_n(X_s)$ nie ma granicy jednostronnej gdy s dąży do t z odpowiedniej strony.

Oczywiście prawdziwe jest też wynikanie przeciwne: jeśli X_s ma granicę jednostronną, to $g_n(X_s)$ również ma granicę jednostronną. Udowodniliśmy zatem, że z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden proces X_s, zawężony do wymiernych czasów $s \geqslant 0$, ma granice jednostronne w każdym rzeczywistym argumencie $t \geqslant 0$. Stanowi to główny krok w dowodzie następującego rezultatu.

TWIERDZENIE 3.27. Niech X_t będzie procesem Fellera. Wówczas istnieje zdarzenie Ω_0 o prawdopodobieństwie $\mathbb{P}^x$ jeden dla każdego $x \in \mathscr{X}$ takie, że proces X_s zawężony do wymiernych czasów $s \geqslant 0$ ma granice jednostronne w każdym argumencie rzeczywistym $t \geqslant 0$. Określmy

$$\tilde{X}_t = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{s \to t^+ \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s & \text{gdy } \omega \in \Omega_0, \\ \infty & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wówczas $\tilde{X}_t$ jest *wersją* procesu X_t, czyli

$$\mathbb{P}^x(\tilde{X}_t = X_t) = 1$$

dla wszystkich $t \geqslant 0$ oraz $x \in \mathscr{X}$. W szczególności $\tilde{X}_t$ jest procesem Fellera o tych samych prawdopodobieństwach przejścia, co X_t, a zmienne losowe $\tilde{X}_t$ są mierzalne względem $\sigma(\mathscr{F}_{t+} \cup \{\Omega_0\})$. Dodatkowo $\tilde{X}_t$ z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden jest prawostronnie ciągły i ma lewostronne granice w każdym argumencie $t \geqslant 0$.

Dowód. Niech Ω_0 będzie zdarzeniem polegającym na tym, że wszystkie granice jednostronne procesu X_s, $s \in [0, \infty) \cap \mathbb{Q}$, istnieją. Wiemy już, Ω_0 w istocie jest zdarzeniem oraz $\mathbb{P}^x(\Omega_0) = 1$ dla wszystkich $x \in \mathscr{X}$. Oczywiście zmienna losowa $\tilde{X}_t$ jest mierzalna względem σ-ciała $\mathscr{F}_{t+}$ powiększonego o Ω_0. Ponadto łatwo sprawdzić (z definicji granicy jednostronnej), że

$$\lim_{s \to t^+} \tilde{X}_s = \lim_{\substack{s \to t^+ \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s,$$
$$\lim_{s \to t^-} \tilde{X}_s = \lim_{\substack{s \to t^- \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s,$$

a więc faktycznie proces $\tilde{X}_s$ ma trajektorie prawostronnie ciągłe z lewostronnymi granicami. Pozostaje uzasadnić, że $\tilde{X}_t$ jest wersją procesu X_t. Wiemy jednak, że proces X_t jest stochastycznie ciągły. Jeśli więc s przebiega argumenty wymierne oraz $s \to t^+$, to X_s dąży z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden do $\tilde{X}_t$, zaś według prawdopodobieństwa $\mathbb{P}^x$ do X_t. Teza wynika z równości granic według prawdopodobieństwa i prawie na pewno. □

DEFINICJA 3.28. Proces Markowa X_t ma *regulowane trajektorie*, jeśli jego trajektorie są prawostronnie ciągłe i posiadają lewostronne granice.

Odtąd zawsze będziemy rozważali procesy Fellera o regulowanych trajektoriach. Udowodnione wyżej twierdzenie orzeka, że założenie to nie zmniejsza ogólności rozważań:

każdy proces Fellera ma wersję o regulowanych trajektoriach. Przypomnijmy, że procesy Fellera o regulowanych trajektoriach mają mocną własność Markowa.

3.7. **Kwazilewostronna ciągłość.** Intuicyjnie proces kwazilewostronnie ciągły to proces, który nie ma skoków w momentach, które można przewidzieć.

DEFINICJA 3.29. Proces Markowa X_t nazywany jest *kwazilewostronnie ciągłym*, gdy ma następującą własność: jeśli σ_n jest rosnącym ciągiem czasów Markowa, zaś σ jest granicą tego ciągu, to dla dowolnego $x \in \mathscr{X}$ z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden ciąg X_{σ_n} jest zbieżny do X_σ, o ile tylko $\sigma < \infty$.

W teorii ogólniejszych procesów Markowa rozważa się również ogólniejszą własność, w której zbieżność wymagana jest wyłącznie wtedy, gdy $\sigma < \zeta$, gdzie ζ jest czasem dojścia procesu X_t w ∞.

Procesy kwazilewostronnie ciągłe mają własnośc $\mathbb{P}^x(X_t = X_{t-}) = 1$ dla każdego $x \in \mathscr{X}$ oraz $t > 0$ — wystarczy rozważyć deterministyczny ciąg σ_n rosnący do t. Oczywiście nie oznacza to jednak ciągłości trajektorii: przekrój nieprzeliczalnie wielu zdarzeń $\{X_t = X_{t-}\}$ nie musi być zdarzeniem o prawdopodobieństwie $\mathbb{P}^x$ jeden.

LEMAT 3.30. Jeśli $\mathbb{E}|X| < \infty$, $\mathbb{E}|X_n - X|$ dąży do zera gdy $n \to \infty$, $\mathscr{F}_n$ jest rosnącą rodziną σ-ciał oraz $\mathscr{F} = \sigma(\bigcup \mathscr{F}_n)$, to

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|\mathbb{E}(X_n|\mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(X|\mathscr{F})| = 0.$$

Prawdziwe jest następujące wzmocnienie lematu: jeśli X_n jest zbieżny do X z prawdopodobieństwem jeden, to także $\mathbb{E}(X_n|\mathscr{F}_n)$ jest zbieżny do $\mathbb{E}(X|\mathscr{F})$ z prawdopodobieństwem jeden.

Dowód. Z twierdzenia Dooba wynika, że jednostajnie całkowalny martyngał $\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n)$ dąży do $\mathbb{E}(X|\mathscr{F})$ w L^1, czyli $\mathbb{E}|\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n) - X|$ dąży do zera gdy $n \to \infty$. Ponadto

$$\mathbb{E}|\mathbb{E}(X_n|\mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n)| \leqslant \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X_n - X||\mathscr{F}_n)) = \mathbb{E}|X_n - X| \to 0$$

gdy $n \to \infty$. □

TWIERDZENIE 3.31. Jeśli X_t jest procesem Fellera o regulowanych trajektoriach, to X_t jest kwazilewostronnie ciągły.

Dowód. Niech σ_n będzie rosnącym czasem czasów Markowa, zaś σ jego granicą. Wystarczy udowodnić tezę twierdzenia dla skończonych czasów σ. W istocie, w ogólnym przypadku wystarczy wtedy rozważyć ciąg $\min\{\sigma_n, k\}$ zbieżny do $\min\{\sigma, k\}$ dla $k = 1, 2, \ldots$

Niech $E_n = \{\sigma_n < \sigma\}$. Wtedy zdarzenia E_n tworzą ciąg zstępujący; oznaczmy część wspólną tych zdarzeń przez E. Na dopełnieniu zdarzenia E zachodzi $\sigma_n = \sigma$ od pewnego n, a więc oczywiście X_{σ_n} dąży do X_σ. Z kolei na zdarzeniu E ciąg X_{σ_n} dąży do $X_{\sigma-}$. Pozostaje zatem wykazać, że $X_{\sigma-} = X_\sigma$ na zdarzeniu E.

Wiemy już, że $E_n \in \mathscr{F}_{\sigma_n+} \cap \mathscr{F}_{\sigma+}$. Niech $t > 0$ oraz $f \in C_0(\mathscr{X})$. Z mocnej własności Markowa (i mierzalności E_n względem $\mathscr{F}_{\sigma_n+}$) wynika, że

$$\mathbb{E}^x(f(X_{\sigma_n+t})\mathbb{1}_{E_n}|\mathscr{F}_{\sigma_n+}) = p_t f(X_{\sigma_n})\mathbb{1}_{E_n}$$

z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden. Obie strony są ograniczone przez $\|f\|$. Gdy $n \to \infty$, prawa strona powyższej równości dąży z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden do $p_t f(X_{\sigma-}) \mathbb{1}_E$. Zbadamy teraz granicę lewej strony.

Zauważmy, że ciąg $Y_n = f(X_{\sigma_n+t}) \mathbb{1}_{E_n}$ jest zbieżny z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden do $Y = f(X_{(\sigma+t)-}) \mathbb{1}_E$ gdy $n \to \infty$ oraz że ciąg ten jest ograniczony przez $\|f\|$. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej wynika, że $\mathbb{E}|Y_n - Y|$ dąży do zera gdy $n \to \infty$. Niech $\mathscr{F}$ będzie najmniejszym σ-ciałem zawierającym wszystkie σ-ciała $\mathscr{F}_{\sigma_n+}$. Na mocy lematu zachodzi

$$\mathbb{E}^x |\mathbb{E}^x(Y_n | \mathscr{F}_{\sigma_n+}) - \mathbb{E}^x(Y|\mathscr{F})| \to 0$$

gdy $n \to \infty$. Ponieważ granica w L^1 i granica z prawdopodobieństwem 1 muszą być równe z prawdopodobieństwem 1, otrzymujemy

$$\mathbb{E}^x(f(X_{(\sigma+t)-}) \mathbb{1}_E | \mathscr{F}) = p_t f(X_{\sigma-}) \mathbb{1}_E$$

z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden.

Gdy $t \to 0^+$, prawa strona powyższej równości dąży z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden do $f(X_{\sigma-}) \mathbb{1}_E$. Z kolei lewa strona dąży do $\mathbb{E}^x(f(X_\sigma) \mathbb{1}_E | \mathscr{F})$ w L^1 (bowiem $f(X_{(\sigma+t)-}) \mathbb{1}_E$ dąży do $f(X_\sigma) \mathbb{1}_E$ z prawdopodobieństwem 1, a więc też w L^1). Oznacza to, że

$$\mathbb{E}^x(f(X_\sigma) \mathbb{1}_E | \mathscr{F}) = f(X_{\sigma-}) \mathbb{1}_E.$$

Zmienna $f(X_{\sigma-}) \mathbb{1}_E$ jest jednak mierzalna względem $\mathscr{F}$: jest to granica zmiennych $f(X_{\sigma_n}) \mathbb{1}_{E_n}$, zaś $f(X_{\sigma_n}) \mathbb{1}_{E_n}$ jest mierzalna względem $\mathscr{F}_{\sigma_n+}$. (W istocie można wykazać, że $f(X_{\sigma-}) \mathbb{1}_E$ jest mierzalna względem $\mathscr{F}_{\sigma-}$, ale nie będzie nam to potrzebne). Ostatecznie więc

$$\mathbb{E}^x(f(X_\sigma) \mathbb{1}_E | \mathscr{F}) = f(X_{\sigma-}) \mathbb{1}_E.$$

Powyższa równość zachodzi dla wszystkich $f \in C_0(\mathscr{X})$. Rozważając niemalejący ciąg takich funkcji, zbieżny do $\mathbb{1}_G$ dla ustalonego zbioru otwartego G, otrzymujemy

$$\mathbb{E}^x(\mathbb{1}_G(X_\sigma) \mathbb{1}_E | \mathscr{F}) = \mathbb{1}_G(X_{\sigma-}) \mathbb{1}_E.$$

W szczególności prawa strona powyższej równości jest mierzalna względem $\mathscr{F}$. Całkując obie strony powyższej równości na dopełnieniu zdarzenia $\{X_{\sigma-} \in G\} \cap E$ (mierzalnego względem $\mathscr{F}$), otrzymujemy

$$\mathbb{P}^x(E, X_\sigma \in G, X_{\sigma-} \in \mathscr{X}_\infty \setminus G) = 0.$$

Rozważając przeliczalną rodzinę zbiorów G, która rozdziela punkty $\mathscr{X}_\infty$, otrzymujemy $\mathbb{P}^x(E, X_\sigma \neq X_{\sigma-}) = 0$, co kończy dowód twierdzenia. □

Jak już wiemy, konsekwencją kwazilewostronnej ciągłości jest mierzalność czasów wyjścia.

TWIERDZENIE 3.32. Jeśli X_t jest procesem Fellera o regulowanych trajektoriach, to czasy wyjścia τ_D ze zbiorów otwartych i domkniętych D są czasami Markowa.

Z kwazilewostronnej ciągłości wynika prosta, lecz bardzo ważna własność czasów wyjścia. Jej dowód jest identyczny z dowodem mierzalności czasu wyjścia ze zbioru otwartego.

TWIERDZENIE 3.33. Jeśli X_t jest procesem Fellera o regulowanych trajektoriach, zaś zbiór otwarty (lub domknięty) D jest sumą wstępującego ciągu zbiorów otwartych lub domkniętych D_n, to τ_D jest granicą ciągu τ_{D_n}, zaś X_{τ_D} jest granicą ciągu $X_{\tau_{D_n}}$ na zdarzeniu $\{\tau_D < \infty\}$. Ponadto jeśli D jest zbiorem otwartym, to

$$\tau_D = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin D \text{ lub } X_{t-} \notin D\}.$$

Dodatkowo $X_{\tau_D} \notin D$ na zdarzeniu $\{\tau_D < \infty\}$.

Dowód. Pierwsza część jest kopią dowodu twierdzenia orzekającego, że τ_D jest czasem Markowa. Aby udowodnić drugą część, wystarczy rozważyć wstępujący ciąg zbiorów domkniętych D_n zawartych w D i sumujących się do D. Wówczas jeśli σ oznacza prawą stronę dowodzonego wzoru, to z jednej strony mamy $\sigma \leqslant \tau_D$, z drugiej zaś dla każdego n zachodzi $\sigma \geqslant \tau_{D_n}$ (bowiem jeśli $X_t \notin D$, to $X_t \notin D_n$, zaś jeśli $X_{t-} \notin D$, to istnieje $s \in (0,t)$ takie, że $X_s \notin D_n$). Wystarczy więc wykorzystać pierwszą część twierdzenia. Ostatnia część twierdzenia wynika z prawostronnej ciągłości trajektorii: jeśli $\tau_D < \infty$ oraz $X_{\tau_D} \in D$, to $X_{\tau_D+s} \in D$ dla dostatecznie małych $s > 0$, co przeczyłoby definicji τ_D. □

Jednym z najważniejszych czasów wyjścia jest czas życia procesu.

DEFINICJA 3.34. Jeśli X_t jest procesem Fellera o regulowanych trajektoriach, to jego *czas życia* określony jest jako

$$\zeta = \tau_{\mathscr{X}} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = \infty\}.$$

Wiemy już, że czas życia ζ jest czasem Markowa. Udowodnimy kolejne dwie własności ζ. Pierwsza wynika wprost z ostatniego twierdzenia.

WNIOSEK 3.35. Jeśli X_t jest procesem Fellera o regulowanych trajektoriach, to

$$\zeta = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = \infty \text{ lub } X_{t-} = \infty\}.$$

Ponadto $X_\zeta = \infty$, jeśli tylko $\zeta < \infty$. Obie równości zachodzą z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden dla każdego $x \in \mathscr{X}$.

Druga własność wynika z roli, jaką odgrywa punkt ∞ — jest to stan cmentarny, do którego trafia proces po swojej śmierci.

TWIERDZENIE 3.36. Jeśli X_t jest procesem Fellera o regulowanych trajektoriach, to z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden zachodzi $X_t = \infty$ dla wszystkich $t \geqslant \zeta$.

Dowód. Z mocnej własności Markowa oraz równości $X_\zeta = \infty$ wynika, że dla każdego $t \geqslant 0$ z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden zachodzi $X_{\zeta+t} = \infty$. Wobec tego z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden zachodzi $X_{\zeta+t} = \infty$ jednocześnie dla wszystkich $t \geqslant 0$, $t \in \mathbb{Q}$. Pozostaje skorzystać z prawostronnej ciągłości trajektorii. □

Analogiczny argument działa oczywiście dla wszystkich $x \in \mathscr{X}$ takich, że $p_t(x, dy) = \delta_x(dy)$ dla wszystkich $t \geqslant 0$. Nietrudna modifikacja pozwala analizować postoje w dowolnym punkcie x; jest to tematem jednego z ćwiczeń na liście zadań.

3.8. **Operatory przesunięcia.** Własność Markowa procesu X_t wygodnie formułować w postaci: dla ustalonego $s \geqslant 0$ proces $Y_t = X_{s+t}$ jest takim samym procesem, co wyjściowy proces X_t, ale o rozkładzie początkowym zadanym przez rozkład X_s. Analogicznie formułować w tym języku można mocną własność Markowa. Wygodnie więc wprowadzić operację skrócenia trajektorii o początkowy odcinek $[0, s)$.

Z naszych założeń nie wynika jednak, że każda trajektoria procesu Y_t odpowiada pewnej trajektorii procesu X_t (oczywiście tak jest z prawdopodbieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden). Będzie to jeden z dodatkowych postulatów: zakładamy istnienie operatorów przesunięcia, spełniających warunki następującej definicji.

DEFINICJA 3.37. *Opeartory przesunięcia* ϑ_s to rodzina mierzalnych funkcji na przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω, spełniająca warunki $X_{s+t} = X_t \circ \vartheta_s$ oraz $\vartheta_t \circ \vartheta_s = \vartheta_{s+t}$ dla wszystkich $s, t \geqslant 0$.

Na przestrzeni kanonicznej wystarczy przyjąć $\vartheta_s(\omega)(t) = \omega(s + t)$. W ogólnym przypadku, jak już wspomniano, ϑ_s nie zawsze istnieje. Można jednak rozszerzyć Ω tak, aby operatory przesunięcia ϑ_s zawsze istniały: należy rozważyć iloraz przestrzeni $\Omega \times [0, \infty)$ przez relację równoważności:

$(\omega_1, s_1) \equiv (\omega_2, s_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X_{s_1+t}(\omega_1) = X_{s_2+t}(\omega_2)$ dla wszystkich $t \geqslant 0$.

Przy powyższej definicji łatwo odpowiednio rozszerzyć definicję procesu X_t, utożsamiając zdarzenie elementarne ω z parą $(\omega, 0)$. Można wtedy wykazać, że rozszerzenie to zachowuje wszystkie własności wyjściowego procesu (własność Markowa, mocną własność Markowa, kwazilewostronną ciągłość). Niezbyt skomplikowane szczegóły tej konstrukcji pomijamy.

Gdy τ jest czasem losowym, definiujemy operator przesunięcia ϑ_τ wzorem

$$\vartheta_\tau(\omega) = \vartheta_{\tau(\omega)}(\omega);$$

po prawej stronie występuje już operator przesunięcia o deterministyczny czas. Zwróćmy uwagę, że o ile $\vartheta_{s+t} = \vartheta_s \circ \vartheta_t$ oraz $\vartheta_{\sigma+t} = \vartheta_t \circ \vartheta_\sigma$, to nie zachodzi $\vartheta_{s+\tau} = \vartheta_\tau \circ \vartheta_s$ ani $\vartheta_{\sigma+\tau} = \vartheta_\sigma \circ \vartheta_\tau$. Zachodzi jednak wzór

$$\vartheta_{\sigma+\tau\circ\vartheta_\sigma} = \vartheta_\tau \circ \vartheta_\sigma.$$

W istocie, z definicji mamy

$$\vartheta_{\sigma+\tau\circ\vartheta_\sigma}(\omega) = \vartheta_{\sigma(\omega)+\tau(\vartheta_\sigma(\omega))}(\omega) = \vartheta_{\tau(\vartheta_\sigma(\omega))}(\vartheta_{\sigma(\omega)}(\omega)) = \vartheta_\tau(\vartheta_\sigma(\omega)).$$

Powyższy wzór będzie stosowany do czasów wyjścia. Jest on w tym kontekście bardzo intuicyjny: jeśli σ i τ to czasy wyjścia z A i B, to $\tau \circ \vartheta_\sigma$ to czas pierwszego wyjścia z B po pierwszym wyjściu z A, licząc właśnie od wyjścia z A.

Nietrywialnym problemem jest mierzalność ϑ_τ: w ogólnym przypadku funkcja ta nie musi być mierzalna.

TWIERDZENIE 3.38. Jeśli X_t jest procesem Fellera o regulowanych trajektoriach, zaś τ czasem Markowa, to operator przesunięcia ϑ_τ jest mierzalny (względem σ-ciała $\mathscr{F}_\infty$) i ponadto ϑ_τ^{-1} odwzorowuje $\mathscr{F}_t$ w $\mathscr{F}_{(\tau+t)+}$.

Dowód. Zmienna $X_t \circ \vartheta_\tau = X_{\tau+t}$ jest mierzalna względem $\mathscr{F}_{(\tau+t)+}$. Oznacza to, że dla każdego $s \in [0, t]$ i każdego zbioru borelowskiego A zachodzi $\vartheta_\tau^{-1}(\{X_s \in A\}) \in \mathscr{F}_{(\tau+t)+}$.

Standardowy argument dowodzi drugiej części twierdzenia. Pierwsza wynika zaś z drugiej: $\mathscr{F}_\infty$ jest najmniejszym σ-ciałem zawierającym wszystkie σ-ciała $\mathscr{F}_t$. □

Wygodnie czasem wprowadzić miary $\mathbb{P}^\mu$, gdzie μ jest dowolnym rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathscr{X}$, opisującym rozkład wartości początkowej procesu — czy wręcz dowolną nieujemną miarą na $\mathscr{X}$. Miary takie można zdefiniować wzorem

$$\mathbb{P}^\mu(E) = \int_{\mathscr{X}} \mathbb{P}^x(E)\mu(dx).$$

W tym celu trzeba jednak wiedzieć, że $\mathbb{P}^x(E)$ jest funkcją borelowską zmiennej $x \in \mathscr{X}$. Tak jest w istocie, gdy na przykład X_t jest procesem Fellera, a E zdarzeniem mierzalnym względem $\mathscr{F}_\infty$: wówczas rodzina zdarzeń E, dla których $\mathbb{P}^x(E)$ jest borelowska, jest λ-układem, który zawiera π-układ zdarzeń cylindrycznych $\{X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \ldots, X_{t_n} \in B_n\}$, gdzie $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są zbiorami borelowskim (bowiem wiemy już, że $p_t f$ jest funkcją borelowską dla dowolnej nieujemnej funkcji borelowskiej f).

Jeśli proces X_t ma mocną własność Markowa, to dla dowolnego czasu Markowa σ proces $Y_t = X_{\sigma+t} = X_t \circ \vartheta_\sigma$ (określony wyłącznie na zdarzeniu $\{\sigma < \infty\}$) ma te same rozkłady skończenie wymiarowe względem $\mathbb{P}^x$, co proces X_t względem $\mathbb{P}^\mu$, gdzie μ jest rozkładem X_σ (na zdarzeniu $\{\sigma < \infty\}$). Jeśli więc X_t jest procesem Fellera, to Y_t jest procesem Fellera o początkowym rozkładzie μ i tych samych prawdopodobieństwach przejścia, co X_t. W szczególności oznacza to, że Y_t ma mocną własność Markowa. Ponadto oba te procesy można przenieść (z dokładnością do zbioru o prawdopodobieństwie zero) na przestrzeń kanoniczną i po tej operacji otrzyma się identyczne procesy. Szczegóły tego argumentu pomijamy; wygodnie natomiast myśleć, że odtąd rozważamy procesy określone na przestrzeni kanonicznej.

Wnioskiem z powyższych rozważań jest następująca wersja mocnej własności Markowa: jeśli X_t jest procesem Fellera, τ jest czasem Markowa, Φ jest dowolnym funkcjonałem od procesu X_t, mierzalnym względem $\mathscr{F}_\infty$, oraz $\varphi(x) = \mathbb{E}^x\Phi$, to

$$\mathbb{E}^x(\Phi \circ \vartheta_\tau | \mathscr{F}_{\tau+}) = \varphi(X_\tau)$$

z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}^x$ jeden. W istocie: jeśli Φ zależy od skończenie wielu zmiennych $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$, to powyższa równość jest po prostu mocną własnością Markowa, natomiast przypadek ogólny uzyskuje się przez aproksymację (klasa zdarzeń E dla których równość zachodzi z $\Phi = \mathbb{1}_E$ jest λ-układem, który zawiera π-układ zdarzeń cylindrycznych, a następnie dowolny funkcjonał Φ można aproksymować jednostajnie funkcjonałami prostymi). Właśnie tej wersji mocnej własności Markowa będziemy używali w kolejnym rozdziale.

3.9. **Uzupełnianie σ-ciał.** Na mocy prawa 0–1 Blumenthala, σ-ciało $\mathscr{F}_{0+}$ składa się wyłącznie ze zdarzeń o prawdopodobieństwie $\mathbb{P}^x$ zero lub jeden. Z własności Markowa wynika, że $\mathscr{F}_{t+}$ różni się of $\mathscr{F}_t$ o zdarzenia o prawdopodobieństwie $\mathbb{P}^x$ zero, tzn. dowolne zdarzenie z $\mathscr{F}_{t+}$ można przybliżyć zdarzeniem z $\mathscr{F}_t$ z dokładnością do zdarzenia o prawdopodobieństwie zero. Z mocnej własności Markowa wynika, że analogicznie każde zdarzenie z części wspólnej wszystkich σ-ciał $\mathscr{F}_{(\tau+t)+}$ dla $t > 0$ można przybliżyć zdarzeniem z $\mathscr{F}_{\tau+}$ z dokładnością do zdarzenia o prawdopodobieństwie zero.

Oznacza to, że wygodnie jest rozważać σ-ciała zupełne względem miar $\mathbb{P}^x$: wtedy $\mathscr{F}_{t+} = \mathscr{F}_t$. Nie będzie to oczywiście filtracja naturalna procesu X_t, ale różnica polegająca na uzupełnieniu o podzbiory zdarzeń o prawdopodobieństwie zero nie ma znaczenia dla

naszych rozważań (staranny dowód tej uwagi wymaga jednak prześledzenia wszystkich dotychczasowych wyników dotyczących procesów Markowa).

Uzupełnienie σ-ciała $\mathscr{F}$ względem pojedyńczej miary $\mathbb{P}$ jest dobrze znaną operacją: rozważa się σ-ciało $\mathscr{F}^{\mathbb{P}}$ zbiorów różniących się od zdarzeń z $\mathscr{F}$ o zbiory $\mathbb{P}$-zerowe (tj. podzbiory zdarzeń $E \in \mathscr{F}$ takich, że $\mathbb{P}(E) = 0$). Uzupełnienie σ-ciała $\mathscr{F}$ względem rodziny miar $\mathbb{P}^x$ to przekrój $\tilde{F}$ wszystkich σ-ciał $\mathscr{F}^{\mathbb{P}^x}$.

Czasem wygodniej jest rozważać σ-ciała $\mathscr{F}^*$ zbiorów uniwersalnie mierzalnych, tj. uzupełnienie względem wszystkich możliwych miar probabilistycznych na $\mathscr{F}$. Okazuje się, że takie uzupełnienie również wystarcza do uzyskania prawostronnie ciągłej filtracji. Co więcej wystarcza ono też do następującego rezultatu, który podajemy wyłącznie dla informacji i bez dowodu.

TWIERDZENIE 3.39. Jeśli $\mathscr{F}_t$ jest filtracją naturalną procesu Fellera X_t, zaś D jest zbiorem borelowskim, to czas wyjścia τ_D jest czasem Markowa względem filtracji $\mathscr{F}_t^*$.

Dowód sprowadza się w istocie do wykorzystania twierdzenia Choqueta o uniwersalnej mierzalności rzutów zbiorów borelowskich.

4. Elementy probabilistycznej teorii potencjału

W tym rozdziale wprowadzone są podstawowe pojęcia teorii potencjału w ujęciu probabilistycznym. Przez cały czas zakładamy, że X_t jest procesem Fellera o regulowanych trajektoriach. Choć nie jest to konieczne, wygodnie myśleć, że X_t jest określony na przestrzeni kanonicznej.

4.1. Miary harmoniczne, funkcje Greena, funkcje harmoniczne.

Jeśli $D \subseteq X$ jest otwarty, to miarą harmoniczną nazywamy rozkład X_t w chwili τ_D. Z kolei funkcja Greena mierzy czas spędzony w zbiorze do chwili τ_D w podobny sposób jak jądro potencjału mierzy całość czasu spędzonego w zbiorze. Oba te pojęcia wiążą się z procesem X_t zatrzymanym lub zabitym w chwili τ_D.

DEFINICJA 4.1. Niech X_t będzie procesem Fellera, zaś τ — czasem Markowa. *Procesem zabitym* w chwili τ nazywamy proces

$$X_t^\tau = \begin{cases} X_t & \text{gdy } t < \tau, \\ \infty & \text{gdy } t \geqslant \tau, \end{cases}$$

zaś *procesem zatrzymanym* w chwili τ nazywamy proces $X_{\min\{t,\tau\}}$. Gdy $\tau = \tau_D$ jest czasem wyjścia ze zbioru otwartego D, to piszemy X_t^D zamiast $X_t^{\tau_D}$.

Prawdopodobieństwa przejścia procesu zabitego w chwili wyjścia z D oznaczamy przez

$$p_{D,t}(x, A) = \mathbb{P}^x(X_t \in A, t < \tau_D).$$

Jądro Greena lub *funkcja Greena* zbioru otwartego D względem X_t to jądro potencału procesu zabitego, dane wzorem

$$u_D(x, A) = \int_0^\infty p_{D,t}(x, A) = \mathbb{E}^x \left(\int_0^{\tau_D} \mathbb{1}_A(X_s) ds \right).$$

Miarą harmoniczną zbioru otwartego D względem procesu X_t nazywamy zaś

$$\omega_D(x,A) = \mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \in A, \tau_D < \infty).$$

Ogólniej, jeśli $\lambda \geqslant 0$, to określamy

$$u_{D,\lambda}(x,A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_{D,t}(x,A) = \mathbb{E}^x \left(\int_0^{\tau_D} e^{-\lambda s} \mathbb{1}_A(X_s) ds \right)$$

oraz

$$\omega_{D,\lambda}(x,A) = \mathbb{E}^x(e^{-\lambda \tau_D} \mathbb{1}_{\{X_{\tau_D} \in A, \tau_D < \infty\}}).$$

W wielu miejscach w tym rozdziale korzystamy z konwencji $f(\infty) = 0$. Dodatkowo w powyższej definicji, a także wielu miejscach w dalszej części, dla wygody przyjmujemy $X_\infty = \infty$. Pozwala to pisać $\mathbb{P}^x(X_\tau \in A)$ oraz $\mathbb{E}^x f(X_\tau)$ w miejsce bardziej starannych zapisów $\mathbb{P}^x(X_\tau \in A, \tau < \infty)$ oraz $\mathbb{E}^x(f(X_\tau)\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}})$. Pamiętajmy jednak, że granicą X_t gdy $t \to \infty$ zwykle nie jest ∞ (na przykład gdy X_t jest jednowymiarowym lub dwuwymiarowym ruchem Browna), zatem należy powyższą konwencję traktować ostrożnie.

Jak się wkrótce przekonamy, w przypadku ruchu Browna powyższe pojęcia uogólniają definicje wprowadzone analitycznie w pierwszym rozdziale. Wprost z definicji wynikają nierówności

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant p_{D,t}(x,A) \leqslant p_t(x,A), \\ 0 &\leqslant u_{D,\lambda}(x,A) \leqslant u_\lambda(x,A). \end{aligned}$$

Ponadto $\tau_D \circ \vartheta_s = s + \tau_D$ na zdarzeniu $\{s < \tau_D\}$, zatem

$$\begin{aligned} p_{D,s+t}(x,A) &= \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^x(X_{t+s} \in A, s+t < \tau_D)|\mathscr{F}_{s+}) \\ &= \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^x(X_t \circ \vartheta_s \in A, t < \tau_D \circ \vartheta_s, s < \tau_D|\mathscr{F}_{s+})) \\ &= \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^x(X_t \circ \vartheta_s \in A, t < \tau_D \circ \vartheta_s|\mathscr{F}_{s+})\mathbb{1}_{s<\tau_D}). \end{aligned}$$

Na mocy (mocnej) własności Markowa zachodzi więc

$$p_{D,s+t}(x,A) = \mathbb{E}^x(p_{D,t}(X_s,A)\mathbb{1}_{s<\tau_D}) = p_{D,s}p_{D,t}(x,A).$$

Zatem w istocie $p_{D,t}$ jest prawdopodobieństwem przejścia; nie zawsze jednak jest to fellerowskie prawdopodobieństwo przejścia. Mamy również $u_D(x,A) = 0$ gdy $x \notin A$ lub $A \cap D = 0$ i oczywiście

$$\mathbb{E}^x \tau_D = u_D(x,D) = u_D(x,\mathscr{X}).$$

Podobnie $\omega_D(x,A) = \delta_x(A)$ dla $x \notin D$ oraz $\omega_D(x,A) = 0$ gdy $A \subseteq D$.

Wygodnie pamiętać o intuicyjnym znaczeniu wprowadzonych wyżej jąder: $p_{D,t}(x,A)$ to prawdopodobieństwo przejścia z x do A w czasie t bez wychodzenia z D. Przy tej interpretacji jest jasne, że $p_{D,s}p_{D,t} = p_{D,s+t}$. Podobnie $u_D(x,A)$ to średni czas spędzony w A przez proces X_t startujący z x do czasu wyjścia z D, natomiast $\omega_D(x,A)$ opisuje rozkład X_t w chwili wyjścia z D. Mając to na uwadze, łatwo napisać dowód kolejnego twierdzenia. Jego pierwsza część jest rodzajem równości Chapmana–Kołmogorowa dla miar harmonicznych.

TWIERDZENIE 4.2. Jeśli B i D są zbiorami otwartymi oraz $B \subseteq D$, to $\omega_D = \omega_B \omega_D$ oraz $u_D = u_B + \omega_B u_D$, czyli

$$\omega_D(x, A) = \int_{\mathscr{X}} \omega_D(y, A) \omega_B(x, dy)$$

oraz

$$u_D(x, A) = u_B(x, A) + \int_{\mathscr{X}} u_D(y, A) \omega_B(x, dy).$$

Analogiczne wzory zachodzą dla $\omega_{D,\lambda}$ oraz $u_{D,\lambda}$.

Dowód. Obie te równości są konsekwencją własności

$$\tau_D = \tau_B + \tau_D \circ \vartheta_{\tau_B}$$

(w szczególności więc $\tau_B \leqslant \tau_D$) i mocnej własności Markowa. W istocie, pisząc dla przejrzystości $X(t)$ zamiast X_t, mamy

$$X(\tau_D) = (X \circ \vartheta_{\tau_B})(\tau_D - \tau_B) = (X \circ \vartheta_{\tau_B})(\tau_D \circ \vartheta_{\tau_B}) = (X(\tau_D)) \circ \vartheta_{\tau_B}.$$

Oznacza to, że na mocy mocnej własności Markowa,

$$\begin{aligned} \omega_D(x, A) &= \mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \in A) = \mathbb{P}^x((X_{\tau_D}) \circ \vartheta_{\tau_B} \in A) = \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^x((X_{\tau_D}) \circ \vartheta_{\tau_B} \in A | \mathscr{F}_{\tau_B +})) \\ &= \mathbb{E}^x(\omega_D(X_{\tau_B}, A)) = \mathbb{E}^\mu \omega_D(X_0, A). \end{aligned}$$

Analogicznie

$$\begin{aligned} u_D(x, A) - u_B(x, A) &= \mathbb{E}^x \left(\int_{\tau_B}^{\tau_D} \mathbb{1}_A(X_s) ds \right) = \mathbb{E}^x \left(\int_0^{\tau_D \circ \vartheta_{\tau_B}} \mathbb{1}_A(X_t \circ \vartheta_{\tau_B}) dt \right) \\ &= \mathbb{E}^x \left(\left(\int_0^{\tau_D} \mathbb{1}_A(X_t) dt \right) \circ \vartheta_{\tau_B} \right) = \mathbb{E}^\mu \left(\int_0^{\tau_D} \mathbb{1}_A(X_t) dt \right) = \mathbb{E}^\mu(u_D(X_0, A)). \quad \square \end{aligned}$$

DEFINICJA 4.3. Funkcja borelowska f określona na $\mathscr{X}$ nazywana jest *funkcją harmoniczną* w zbiorze otwartym D względem procesu X_t, jeśli dla dowolnego zbioru B którego domknięcie jest zwarte i zawiera się w D zachodzi $\omega_B f = f$, czyli

$$f(x) = \int_{\mathscr{X}} f(y) \omega_B(x, dy) = \mathbb{E}^x f(X_{\tau_B}).$$

Funkcja f jest *regularnie harmoniczna* w D względem X_t, jeśli powyższa równość zachodzi dla $B = D$.

Przykładem funkcji (regularnie) harmonicznej jest zatem $f = \omega_D g$ dla dowolnej funkcji borelowskiej g (o ile f jest poprawnie określona i skończona). W istocie, jeśli $B \subseteq D$ (być może $B = D$), to

$$\omega_B f = \omega_B(\omega_D g) = (\omega_B \omega_D) g = \omega_D g = f.$$

Podkreślmy, że zakładamy tu wyłącznie, że całki występujące w definicji $\omega_D g$ są skończone. Powyższa równość stanowi też dowód kolejnego wyniku.

TWIERDZENIE 4.4. Funkcje regularnie harmoniczne są harmoniczne.

4.2. **Generator procesu.** Jeśli $p(t)$ jest ciągłą, ograniczoną funkcją rzeczywistą, spełniającą równanie $p(t)p(s) = p(t+s)$, to $p(t) = e^{tL}$ dla pewnego $L \leqslant 0$. Ponadto $\int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t)dt = (\lambda - L)^{-1}$ gdy $\lambda > 0$. Wynik ten, przy odpowiedniej interpretacji, zachodzi w dużo ogólniejszym kontekście, gdy $p(t)$ jest mocno ciągłą półgrupą operatorów na przestrzeni Banacha; zadowolimy się jednak wersją dla półgrup fellerowskich.

Niech p_t będzie fellerowskim prawdopodobieństwem przejścia i niech u_λ oznacza jądro λ-potencjału. W tej części traktujemy p_t i u_λ jako operatory, nie jako jądra. Zgadujemy, że istnieje operator L taki, że u_λ jest odwrotnym do $\lambda \mathrm{Id} - L$. Z równania rezolwenty wynika, że jeśli $\lambda, \mu > 0$, $\lambda \neq \mu$, to

$$u_\mu f = u_\lambda f + (\lambda - \mu) u_\lambda u_\mu f = u_\lambda (f + (\lambda - \mu) u_\mu f).$$

Powyższy wzór ma dwie konsekwencje. Po pierwsze, jeśli $u_\mu f = 0$, to $u_\lambda f = 0$ dla wszystkich $\lambda > 0$, przez co $f = \lim_{\lambda\to\infty}(\lambda u_\lambda f) = 0$; zatem u_μ jest operatorem różnowartościowym na $C_0(\mathscr{X})$. Po drugie wszystkie operatory u_λ mają ten sam obraz, który oznaczamy $\mathrm{dom}(L)$ — jest on bowiem dziedziną operatora L, który określamy następująco.

> DEFINICJA 4.5. Jeśli u_λ jest jądrem λ-potencjału fellerowskiego prawdopodobieństwa przejścia, to określamy
>
> $$Lu_\lambda f = \lambda u_\lambda f - f$$
>
> dla $\lambda > 0$ i $f \in C_0(\mathscr{X})$.

Określenie to nie zależy od λ znów na mocy równania rezolwenty: jeśli $u_\mu f = u_\lambda g = h$, to $g = f + (\lambda - \mu) u_\mu f = f + (\lambda - \mu) h$, zatem

$$\lambda h - g = \mu h - f.$$

Zauważmy wreszcie, że $\mathrm{dom}(L)$ jest gęstą podprzestrzenią $C_0(\mathscr{X})$, bowiem dla dowolnego $f \in C_0(\mathscr{X})$ zachodzi $\lambda u_\lambda f \in \mathrm{dom}(L)$ dla wszystkich $\lambda > 0$ oraz λu_λ dąży do f gdy $\lambda \to \infty$. Zazwyczaj $\mathrm{dom}(L)$ jest właściwą podprzestrzenią $C_0(\mathscr{X})$: można wykazać, że $\mathrm{dom}(L) = C_0(\mathscr{X})$ wtedy i tylko wtedy, gdy L jest operatorem ograniczonym na $C_0(\mathscr{X})$ i w takim przypadku trajektorie X_t są kawałkami stałe, a więc X_t jest łańcuchem Markowa z czasem ciągłym.

Powyższa definicja nie jest standardowa: zwykle definiuje się operator L jako prawostronną pochodną $p_t f$ w zerze. Wykażemy, że ta standardowa definicja jest równoważna przedstawionej powyżej.

> TWIERDZENIE 4.6. Jeśli L jest generatorem fellerowskiego prawdopodobieństwa przejścia p_t, to
>
> $$Lf = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(p_t f - f),$$
>
> dla wszystkich $f \in \mathrm{dom}(L)$. Co więcej, $f \in \mathrm{dom}(L)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in C_0(\mathscr{X})$ i powyższa granica istnieje w $C_0(\mathscr{X})$.

Dowód. Jeśli $h \in \mathrm{dom}(L)$ i $\lambda > 0$, to $h = u_\lambda f$ dla pewnego $f \in C_0(\mathscr{X})$, zatem

$$p_s h(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_{s+t} f(x) dt = e^{\lambda s} \int_s^\infty e^{-\lambda r} p_r f(x) dt = e^{\lambda s} h(x) - \int_0^s e^{\lambda(s-r)} p_r f(x) dr.$$

Wobec tego

$$\frac{p_s h(x) - h(x)}{s} = \frac{e^{\lambda s} - 1}{s}\, h - \frac{1}{s} \int_0^s e^{\lambda(s-r)} p_r f(x) dr.$$

Skoro $p_t f$ dąży do f jednostajnie gdy $t \to 0^+$, otrzymujemy

$$\lim_{s \to 0^+} s^{-1}(p_s h - h) = \lambda h - f = Lh;$$

w istocie, $s^{-1}(e^{\lambda s} - 1)h$ dąży do λh, $(\lambda s)^{-1}(e^{\lambda s} - 1)f$ dąży do f, zaś

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{s} \int_0^s e^{\lambda(s-r)} p_r f(x) dr - \frac{e^{\lambda s} - 1}{\lambda s}\, f(x) \right| &\leqslant \frac{1}{s} \int_0^s e^{\lambda(s-r)} \|p_r f - f\| dr \\ &= \int_0^1 e^{\lambda s(1-q)} \|p_{qt} f - f\| dq \end{aligned}$$

dla wszystkich $x \in \mathscr{X}$, zaś prawa strona dąży do zera na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej. Dowodzi to pierwszej części twierdzenia.

Przypuśćmy teraz, że $h \in C_0(\mathscr{X})$, granica $s^{-1}(p_s h - h)$ istnieje w $C_0(\mathscr{X})$ i jest równa g. Jak poprzednio,

$$u_\lambda(s^{-1}(p_s h - h))(x) = \frac{e^{\lambda s} - 1}{s}\, u_\lambda h(x) - \frac{1}{s} \int_0^s e^{\lambda(s-r)} p_r h(x) dr,$$

więc z ciągłości u_λ otrzymujemy

$$u_\lambda g = \lambda u_\lambda h - h.$$

Innymi słowy, $h = u_\lambda(g - \lambda h)$. W szczególności zatem $h \in \mathrm{dom}(L)$. □

Kolejne dwa wyniki nie będą nam potrzebne, ale są użyteczne i ciekawe. Z naszej definicji generatora wynika, że dla dowolnego $\lambda > 0$ obrazem operatora $\lambda \mathrm{Id} - L$ (określonego na $\mathrm{dom}(L)$) jest $C_0(\mathscr{X})$. Oznacza to, że operatora L nie można istotnie rozszerzyć (czyli określić na przestrzeni istotnie większej niż $\mathrm{dom}(L)$) w taki sposób, aby operator $\lambda \mathrm{Id} - L$ pozostał różnowartościowym odwzorowaniem dziedziny w $C_0(\mathscr{X})$. Dowodzi to następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE 4.7. Niech L będzie generatorem fellerowskiego prawdopodobieństwa przejścia p_t, zaś $\tilde{L}$ jego rozszerzeniem (określonym na dziedzinie $\mathrm{dom}(\tilde{L})$ i o wartościach w $C_0(\mathscr{X})$) spełniającym *zasadę dodatniego maksimum*: jeśli $f \in \mathrm{dom}(\tilde{L})$ oraz $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in \mathscr{X}\}$, to $\tilde{L}f(x_0) \leqslant 0$. Wówczas $\tilde{L} = L$ (tzn. $\mathrm{dom}(\tilde{L}) = \mathrm{dom}(L)$).

Dowód. Wystarczy dowieść, że operator taki spełnia warunek omówiony przed sformułowaniem twierdzenia. Niech $\lambda > 0$, $f \in C_0(\mathscr{X})$ oraz $\|f\| = cf(x_0)$, gdzie $|c| = 1$ (taki punkt x_0 istnieje na mocy zwartości $\mathscr{X}_\infty$). Wtedy $c(\lambda f(x_0) - Lf(x_0)) = \lambda |f(x_0)| - L(cf)(x_0) \geqslant \lambda |f(x_0)| = \|f\|$. Jeśli więc $f \neq 0$, to $\lambda f - Lf \neq 0$, czyli $\lambda \mathrm{Id} - L$ jest różnowartościowy. □

Warto podkreślić, że generatory fellerowskich prawdopodobieństw przejścia spełniają zasadę dodatniego maksimum: uzasadnienie jest częścią dowodu kolejnego wyniku.

WNIOSEK 4.8. Jeśli p_t jest fellerowskim prawdopodobieństwem przejścia o generatorze L, $f, g \in C_0(\mathscr{X})$ oraz

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{p_t f(x) - f(x)}{t} = g(x)$$

dla każdego $x \in \mathscr{X}$, to f należy do dziedziny L oraz $Lf = g$, a więc zbieżność w powyższej granicy jest jednostajna względem $x \in \mathscr{X}$.

Dowód. Niech $\tilde{L}f = g$ gdy spełnione są założenia wniosku. Oczywiście $\tilde{L}$ jest rozszerzeniem L, ponadto jeśli $f \in \mathrm{dom}(\tilde{L})$ oraz $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in \mathscr{X}\}$, to $p_t f(x_0) \leqslant f(x_0)$, a więc $\tilde{L}f(x_0) \leqslant 0$. □

Z naszego punktu widzenia najważniejszym wynikiem dotyczącym generatora jest następujący rezultat.

TWIERDZENIE 4.9 (wzór Dynkina). Niech X_t będzie procesem Fellera o regulowanych trajektoriach, τ czasem Markowa, u_λ odpowiadającym mu jądrem potencjału, zaś L generatorem.

(a) Jeśli $\lambda > 0$ i $f \in C_0(\mathscr{X})$, to

$$\mathbb{E}^x(e^{-\lambda\tau} u_\lambda f(X_\tau)) = u_\lambda f(x) - \mathbb{E}^x\left(\int_0^\tau e^{-\lambda t} f(X_t)dt\right).$$

(b) Jeśli $\lambda > 0$ i $f \in \mathrm{dom}(L)$, to

$$\mathbb{E}^x(e^{-\lambda\tau} f(X_\tau)) = f(x) + \mathbb{E}^x\left(\int_0^\tau e^{-\lambda t}(Lf(X_t) - \lambda f(X_t))dt\right).$$

(c) Jeśli $f \in \mathrm{dom}(L)$ oraz $\mathbb{E}^x\tau < \infty$, to

$$\mathbb{E}^x f(X_\tau) = f(x) + \mathbb{E}^x\left(\int_0^\tau Lf(X_t)dt\right).$$

Dowód. Pierwsza część jest prostą konsekwencją definicji i mocnej własności Markowa:

$$\begin{aligned} u_\lambda f(x) &= \mathbb{E}^x\left(\int_0^\tau e^{-\lambda t} f(X_t)dt + e^{-\lambda\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_{\tau+t})dt\right) \\ &= \mathbb{E}^x\left(\int_0^\tau e^{-\lambda t} f(X_t)dt\right) + \mathbb{E}^x\left(e^{-\lambda\tau}\mathbb{E}^x\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_t\circ\vartheta_\tau)dt|\mathscr{F}_{\tau+}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}^x\left(\int_0^\tau e^{-\lambda t} f(X_t)dt\right) + \mathbb{E}^x(e^{-\lambda\tau} u_\lambda f(X_t)). \end{aligned}$$

Druga część wynika z pierwszej zastosowanej do funkcji $g = \lambda f - Lf$. Z kolei aby uzyskać ostatnią, należy przejść do granicy gdy $\lambda \to 0^+$. Wtedy $e^{-\lambda\tau}$ dąży do 1 (na zdarzeniu $\{\tau < \infty\}$), a więc na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej $\mathbb{E}^x(e^{-\lambda\tau} f(X_\tau))$ dąży do $\mathbb{E}^x f(X_\tau)$. Podobnie $\lambda e^{-\lambda t}$ dąży do zera, a więc ponownie na mocy twierdzenia o zbieżności ograniczonej

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \mathbb{E}^x\left(\int_0^\tau \lambda e^{-\lambda t} f(X_t)dt\right) = 0.$$

Wreszcie $e^{-\lambda t}$ dąży do 1, a więc, kolejny raz na mocy twierdzenia o zbieżności ograniczonej,

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \mathbb{E}^x \left(\int_0^\tau e^{-\lambda t} L f(X_t) dt \right) = \mathbb{E}^x \left(\int_0^\tau L f(X_t) dt \right).$$

To dowodzi żądanej równości. □

Z dowodu jasno wynika, że w niektórych sytuacjach wzór Dynkina wymaga słabszych założeń. Jeśli na przykład jądro potencjału $u(x, \cdot)$ jest miarą skończoną na zbiorach zwartych, to warunek $\mathbb{E}^x \tau < \infty$ można osłabić do $\mathbb{P}^x(\tau < \infty) = 1$.

Jednym z najważniejszych zastosowań wzoru Dynkina jest następujący wynik, wyrażający do pewnego stopnia miarę harmoniczną przez funkcję Greena i generator.

WNIOSEK 4.10. Niech X_t będzie procesem Fellera o regulowanych trajektoriach, zaś τ_D czasem wyjścia ze zbioru otwartego D. Jeśli $\mathbb{E}^x \tau_D < \infty$ oraz $f \in \mathrm{dom}(L)$, to

$$\omega_D f(x) = f(x) + u_D L f(x).$$

Możliwy jest również opis generatora przy pomocy miar harmonicznych. W wielu sytuacjach jest on wygodniejszy niż definicja wykorzystująca prawdopodobieństwo przejścia.

DEFINICJA 4.11. Niech X_t będzie procesem Fellera o regulowanych trajektoriach i niech τ_D oznacza czas wyjścia ze zbioru D. Przypuśćmy, że punkt $x \in \mathscr{X}$ nie jest *stanem pochłaniającym*, a więc $\mathbb{P}^x(\tau_{\{x\}} < \infty) = 1$. Mówimy, że funkcja borelowska f należy do dziedziny $\mathrm{dom}_x(\mathfrak{L})$ operatora Dynkina w punkcie x, jeśli istnieje granica w definicji *operatora Dynkina* w x:

$$\mathfrak{L} f(x) = \lim_{B \to \{x\}} \frac{\mathbb{E}^x f(X_{\tau_B}) - f(x)}{\mathbb{E}^x \tau_B}.$$

Tu granica przy $B \to \{x\}$ oznacza granicę po wszystkich ciągach zbiorów otwartych B_n, których przekrojem jest $\{x\}$ i których średnice maleją do zera gdy $n \to \infty$. W przypadku, gdy x jest stanem pochłaniającym oraz $\mathbb{E}^x f(X_{\tau_B})$ jest poprawnie określona dla pewnego otoczenia B punktu x, określamy $\mathfrak{L} f(x) = 0$. Jeśli $f \in \mathrm{dom}_x(\mathfrak{L})$ dla wszystkich $x \in D$, to piszemy $f \in \mathrm{dom}_D(\mathfrak{L})$. Gdy $D = \mathscr{X}$, piszemy po prostu $f \in \mathrm{dom}(\mathfrak{L})$.

W języku miar harmonicznych i funkcji Greena operator Dynkina dany jest wzorem

$$\mathfrak{L} f(x) = \lim_{B \to \{x\}} \frac{\omega_B f(x) - f(x)}{u_B \mathbb{1}(x)},$$

gdzie $u_B \mathbb{1}(x) = u_B(x, \mathscr{X})$. Wprost z definicji wynika, że jeśli f jest harmoniczna w D, to $f \in \mathrm{dom}_D(\mathfrak{L})$ oraz $\mathfrak{L} f(x) = 0$ dla $x \in D$. Ponadto jeśli $f = u_D g$ dla pewnej funkcji g ciągłej w $x \in D$ (i takiej, że f jest poprawnie określona i skończona), to $f \in \mathrm{dom}_x(\mathfrak{L})$ oraz $\mathfrak{L} f(x) = -g(x)$. W istocie, na mocy mocnej własności Markowa (jak w dowodzie wzoru Dynkina),

$$\mathbb{E}^x f(X_{\tau_B}) = f(x) - \mathbb{E}^x \int_0^{\tau_B} g(X_t) dt,$$

a więc

$$\left|\frac{\mathbb{E}^x f(X_{\tau_B}) - f(x)}{\mathbb{E}^x \tau_B} - g(x)\right| = \frac{1}{\mathbb{E}^x \tau_B}\left|\mathbb{E}^x \int_0^{\tau_B} (g(X_t) - g(x))dt\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{\mathbb{E}^x \tau_B}\,\mathbb{E}^x \int_0^{\tau_B} |g(X_t) - g(x)|dt \leqslant \sup\{|g(y) - g(x)| : y \in B\}.$$

Gdy $B \to \{x\}$, prawa strona dąży do zera. Analogiczny argument wykorzystany zostanie w dowodzie lematu Dynkina.

Jak już wspomnieliśmy, operator Dynkina jest ściśle związany z generatorem. Aby to udowodnić, potrzebny jest pomocniczy wynik, który sam w sobie jest interesujący.

LEMAT 4.12. Niech X_t będzie procesem Fellera o regulowanych trajektoriach. Jeśli stan $x \in \mathscr{X}$ nie jest pochłaniający, to $\mathbb{E}^x \tau_{B(x,r)} < \infty$ dla dostatecznie małych $r > 0$.

Dowód. Niech $f \in C_0(\mathscr{X})$ spełnia warunki $f(x) = \|f\|$ oraz $f(y) < f(x)$ gdy $y \neq x$; na przykład $f(y) = \max\{1 - d(x,y), 0\}$. Rozważmy $\lambda > 0$ i $g = \lambda u_\lambda f$. Wtedy $g \in \mathrm{dom}(L)$ oraz $Lg = \lambda g - f$.

Skoro x nie jest pochłaniający, zachodzi $p_t(x, \{x\}) < 1$ dla prawie wszystkich $t > 0$ (dowód tego faktu jest treścią jednego z ćwiczeń), a więc $u_\lambda(x, \{x\}) < \frac{1}{\lambda}$. Oznacza to, że $g(x) < \frac{1}{\lambda} f(x)$, zachodzi bowiem

$$g(x) - u_\lambda(x, \{x\}) f(x) = \int_{\mathscr{X}\setminus\{x\}} f(y) u_\lambda(x, dy) < f(x) u_\lambda(x, \mathscr{X} \setminus \{x\}).$$

Wobec tego $Lg(x) < 0$. Skoro Lg jest funkcją ciągłą, przy $\varepsilon = -\frac{1}{2} Lg(x)$ zachodzi $Lg(y) < -\varepsilon$ dla y w pewnym otoczeniu $B(x,r)$ punktu x. Oznacza to, że dla każdego $t > 0$, przy oznaczeniu $\tau = \min\{\tau_{B(x,r)}, t\}$, zachodzi

$$\mathbb{E}^x \tau \leqslant \mathbb{E}^x \int_0^\tau \frac{-Lg(X_t)}{\varepsilon}\, ds.$$

Na mocy wzoru Dynkina otrzymujemy

$$\mathbb{E}^x \tau \leqslant \frac{1}{\varepsilon}(g(x) - \mathbb{E}^x g(X_\tau)) \leqslant \frac{g(x)}{\varepsilon}\,.$$

Gdy $t \to \infty$, lewa strona nierówności dąży do $\mathbb{E}^x \tau_{B(x,r)}$ na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej; prawa zaś nie zależy od t. To dowodzi skończoności $\mathbb{E}^x \tau_{B(x,r)}$. □

TWIERDZENIE 4.13 (lemat Dynkina). Niech X_t będzie procesem Fellera o regulowanych trajektoriach, bez stanów pochłaniających. Wówczas f jest w dziedzinie generatora L procesu X_t wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in C_0(\mathscr{X})$, f jest w dziedzinie operatora Dynkina $\mathfrak{L}$ procesu X_t oraz $\mathfrak{L} f \in C_0(\mathscr{X})$. W tym przypadku zachodzi $Lf(x) = \mathfrak{L} f(x)$ dla wszystkich $x \in \mathscr{X}$.

Dowód. Jeśli $f \in \mathrm{dom}(L)$ i B jest zbiorem otwartym takim, że $\mathbb{E}^x \tau_B < \infty$, to na mocy wzoru Dynkina zachodzi

$$\mathbb{E}^x f(X_{\tau_B}) = f(x) + \int_0^{\tau_B} Lf(X_t)dt.$$

Oznacza to, że

$$\left|\frac{\mathbb{E}^x f(X_{\tau_B}) - f(x)}{\mathbb{E}^x \tau_B} - Lf(x)\right| = \frac{1}{\mathbb{E}^x \tau_B}\left|\int_0^{\tau_B} (Lf(X_t) - Lf(x))dt\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{\mathbb{E}^x \tau_B}\int_0^{\tau_B} |Lf(X_t) - Lf(x)|dt \leqslant \sup\{|Lf(y) - Lf(x)| : y \in B\}.$$

Wystarczy teraz skorzystać z ciągłości Lf.

Aby udowodnić drugą część twierdzenia, napiszmy $\tilde{L}f = g$ gdy spełnione są warunki opisane w twierdzeniu. Na mocy pierwszej części, $\tilde{L}$ jest rozszerzeniem L. Z drugiej strony $\tilde{L}$ spełnia zasadę dodatniego maksimum. Oznacza to, że $L = \tilde{L}$, tak, jak żądano. □

W odróżnieniu od definicji generatora wykorzystującej prawdopodobieństwa przejścia p_t, definicja operatora Dynkina jest lokalna: gdy X_t ma ciągłe trajektorie, to definicja $\mathfrak{L}f(x)$ zależy wyłącznie od wartości f w dowolnie małym otoczeniu punktu x. Zupełnie inaczej jest w przypadku generatora: tam ważne są wartości f w całej przestrzeni.

PRZYKŁAD 4.14. Jedno z zadań na ćwiczeniach polega na wykazaniu, że generator ruchu Browna w $\mathbb{R}^d$ na funkcjach klasy $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ jest po prostu operatorem Laplace'a. Funkcja $f(x) = 1$ jest oczywiście harmoniczna i $\mathfrak{L}f = 1$, ale f nie jest w dziedzinie L. W tym wypadku jednak $p_t f = f$, zatem $t^{-1}(p_t f - f)$ dąży do zera (nawet jednostajnie). Jeśli $d \geqslant 2$, to harmoniczna jest jednak również na przykład funkcja $g(x) = \operatorname{Re}\exp(\exp(x_1 + ix_2))$. Ponieważ jednak $g(x) \geqslant \exp(\frac{1}{2}\exp(x_1))$ gdy $|x_2| < \frac{\pi}{3}$, funkcja $p_t g$ nie jest w ogóle poprawnie określona, zatem nie można mówić nawet o punktowej granicy $t^{-1}(p_t g - g)$. Mimo to $g \in \operatorname{dom}(\mathfrak{L})$ i oczywiście $\mathfrak{L}g = Lg$.

Lokalność operatora Dynkina przejawia się również w inny sposób: gdy proces X_t ma skoki, definicja $\mathfrak{L}f(x)$ może zależeć od wartości f na całej przestrzeni $\mathscr{X}$, ale zależy od zachowania procesu X_t wyłącznie do chwili wyjścia z dowolnie małego otoczenia x. Właśnie ten fakt pozwolił wykazać, że $\mathfrak{L}f = 0$ w D gdy f jest harmoniczna w D oraz $\mathfrak{L}f = -g$ w D gdy $f = u_D g$ i g jest ciągła w D (oraz f jest poprawnie określona i skończona).

Okazuje się zatem, że funkcja

$$f(x) = -u_D g(x) + \omega_D h(x) = -\mathbb{E}^x \int_0^{\tau_D} g(X_s)ds + \mathbb{E}^x h(X_{\tau_D})$$

stanowi rozwiązanie uogólnionego *zagadnienia Dirichleta–Poissona*

$$\begin{cases} \mathfrak{L}f(x) = g(x) & \text{dla } x \in D, \\ f(x) = h(x) & \text{dla } x \in \mathscr{X} \setminus D. \end{cases}$$

W przypadku ruchu Browna $\mathfrak{L}$ zgadza się z operatorem Laplace'a, zatem powyższe zagadnienie jest po prostu klasycznym zagadnieniem Dirichleta–Poissona.

Oczywiście pozostaje pytanie o regularność znalezionego przez nas rozwiązania, w szczególności — o ciągłość na brzegu. Wiąże się to z pojęciem regularności punktów brzegowych i w ogólności jest to skomplikowane zagadnienie. W przypadku wielu procesów, w szczególności dla ruchu Browna w $\mathbb{R}^d$, można sformułować proste geometryczne warunki dostateczne dla regularności punktu brzegowego; najbardziej klasycznym jest *warunek stożka zewnętrznego*. Nas zadowoli twierdzenie w poniższej postaci.

DEFINICJA 4.15. Punkt $x \in \mathscr{X}$ nazywany jest *punktem regularnym* dla zbioru F jeśli

$$\mathbb{P}^x(T_F = 0) = 1,$$

gdzie

$$T_F = \inf\{t > 0 : X_t \in F\}$$

jest *czasem trafienia* w F.

Należy podkreślić, że w definicji T_F występuje ostra nierówność $t > 0$. W przeciwnym razie wszystkie punkty F byłyby regularne.

TWIERDZENIE 4.16. Jeśli X_t jest procesem Fellera o regulowanych trajektoriach, $D \subseteq \mathscr{X}$ jest zbiorem otwartym i każdy punkt brzegu D jest regularny dla $\mathscr{X} \setminus D$, g jest funkcją ciągłą taką, że $u_D g$ jest poprawnie określona i skończona na D, zaś h jest funkcją ciągłą taką, że $\omega_D h$ jest poprawnie określone na D, to wzór

$$f(x) = -u_D g(x) + \omega_D h(x) = -\mathbb{E}^x \int_0^{\tau_D} g(X_s)ds + \mathbb{E}^x h(X_{\tau_D})$$

określa rozwiązanie uogólnionego *zagadnienia Dirichleta–Poissona*

$$\begin{cases} \mathfrak{L}f(x) = g(x) & \text{dla } x \in D, \\ f(x) = h(x) & \text{dla } x \in \mathscr{X} \setminus D, \end{cases}$$

przy czym f jest funkcją ciągłą na $\mathscr{X}$.

[do uzupełnienia; potrzebne dodatkowe założenia.] □

DEFINICJA 4.17. Proces stochastyczny A_t o wartościach rzeczywistych nazywany jest *funkcjonałem addytywnym* względem filtracji $\mathscr{F}_t$, gdy zmienna A_t jest mierzalna względem $\mathscr{F}_{t+}$ dla każdego $t \geqslant 0$ oraz

$$A_{s+t} = A_s + A_t \circ \vartheta_s$$

jeśli $0 \leqslant s \leqslant s + t$. Tu ϑ_s jest operatorem przesunięcia.

Proces stochastyczny M_t o wartościach nieujemnych jest *funkcjonałem multiplikatywnym* względem filtracji $\mathscr{F}_t$, jeśli zmienna M_t jest mierzalna względem $\mathscr{F}_{t+}$ dla każdego $t \geqslant 0$ oraz

$$M_{s+t} = M_s \cdot M_t \circ \vartheta_s$$

gdy $0 \leqslant s \leqslant s + t$.

4.3. **Funkcjonały addytywne i multiplikatywne.** Oczywiście A_t jest funkcjonałem addytywnym wtedy i tylko wtedy, gdy $M_t = \exp(-A_t)$ jest dodatnim funkcjonałem multiplikatywnym. Przykładem funkcjonału addytywnego względem filtracji naturalnej procesu Fellera jest

$$A_t = \int_0^t f(X_s)ds,$$

gdzie f jest (na przykład) ograniczoną funkcją borelowską. Funkcjonał multiplikatywny $M_t = \exp(-A_t)$ jest w tym wypadku nazywany funkcjonałem Feynmana–Kaca. Innym

ważnym przykładem funkcjonału multiplikatywnego jest $M_t = \mathbb{1}_{[0,\tau)}(t)$, gdzie τ jest czasem Markowa.

Funkcjonały addytywne wykorzystywane są do różnych celów: pozwalają badać potencjały niektórych miar (a nie tylko funkcji) w dużej ogólności; w tym kontekście pozwalają też na ścisły opis czasu lokalnego procesu w punkcie; pozwalają na opis losowej zmiany czasu procesu (jak w transformacie Girsanowa). Omówimy krótko ostatnie zastosowanie.

Jeśli proces Fellera X_t traktujemy jako opis ruchu cząstki, zaś A_t jest rosnącym funkcjonałem addytywnym względem filtracji naturalnej procesu X_t, to możemy traktować A_t jako czas wewnętrzny cząstki. Innymi słowy chcielibyśmy rozważać proces Y_s taki, że $Y_{A_t} = X_t$. Wygodniej jest jednak czasem nie określać tego procesu, a pracować z parą (X_t, A_t). Jądro potencjału takiej pary (lub równoważnie: procesu Y_t) dane jest przez całkę

$$u_{A,\lambda}(x, A) = \mathbb{E}^x \int_0^\infty e^{-\lambda A_t} \mathbb{1}_A(X_t) dA_t$$

(uwaga: jest to co innego niż potencjał funkcjonału addytywnego, definiowany jako wartość oczekiwana całki z $e^{-\lambda t}$ względem miary dA_t). Można sprawdzić, że $u_{\lambda,A}$ spełniają równanie rezolwenty i zachodzi wzór Dynkina: jeśli τ jest czasem Markowa, $\lambda > 0$ oraz $f \in \mathrm{dom}(L)$, to

$$\mathbb{E}^x(e^{-\lambda A_{\tau-}} f(X_\tau)) = f(x) + \mathbb{E}^x \int_0^\tau e^{-\lambda A_t} Lf(X_t) dt - \mathbb{E}^x \int_{[0,\tau)} e^{-\lambda A_t} \lambda f(X_t) dA_t.$$

Ważne w tym wzorze jest to, że f ma należeć do dziedziny generatora wyjściowego procesu X_t, a nie procesu ze zmienionym czasem. Powyższy wzór można interpretować następująco: generatorem procesu ze zmienionym czasem Y_t powinien być operator

$$L_A f(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\mathbb{E}^x f(X_t) - f(x)}{A_t}.$$

W przypadku, gdy $A_t = \int_0^t a(X_s) ds$ dla pewnej ciągłej funkcji $a(x)$, otrzymujemy

$$L_A f(x) = \frac{Lf(x)}{a(x)}.$$

Jednak nawet gdy a jest funkcją ciągłą, dziedzina generatora procesu Y_t może być skomplikowana i powyższemu wzorowi trudno nadać ścisłe znaczenie. Z tego powodu wygodniej jest pracować z parą (X_t, A_t).

Funkcjonały multiplikatywne pojawiają się przede wszystkim we wzorach Feynmana–Kaca. Jeśli X_t jest procesem Fellera opisującym ruch cząstki, zaś M_t funkcjonałem multiplikatywnym względem filtracji naturalnej procesu X_t, to M_t można traktować jako zmieniającą się masę cząstki w chwili t. Wówczas naturalne jest uwzględnienie tej masy w opisie ewolucji cząstki. Wprowadza się zatem nowe jądra przejścia i jądra potencjału

$$p_{M,t}(x, A) = \mathbb{E}^x(M_t \mathbb{1}_A(X_t)), \qquad u_M(x, A) = \int_0^\infty p_{M,t}(x, A) dt.$$

Dla uproszczenia zajmiemy się wyłącznie malejącymi funkcjonałami multiplikatywnymi: w tym przypadku można myśleć, że cząstka nie zmienia masy, ale zanika z pewną intensywnością (zależącą od położenia) i M_t to warunkowe prawdopodobieństwo (pod warunkiem $\mathscr{F}_t$), że cząstka przetrwała do chwili t. W tej sytuacji można określić (na odpowiednio powiększonej przestrzeni probabilistycznej) *podproces* Y_t taki, że $\mathbb{P}^x(Y_t = X_t | \mathscr{F}_t) = M_t$ oraz $\mathbb{P}^x(Y_t = \infty | \mathscr{F}_t) = 1 - M_t$. Znów zamiast badać podproces Y_t często wygodniej jest pracować z parą (X_t, M_t) — z tych samych powodów, co w przypadku funkcjonałów

addytywnych. Zachodzi bowiem na przykład wzór Dynkina z funkcjonałem multiplikatywnym:

$$\mathbb{E}^x(M_{\tau-}f(X_\tau)) = f(x) + \mathbb{E}^x \int_0^\tau M_t Lf(X_t)dt - \mathbb{E}^x \int_{[0,\tau)} f(X_t)dM_t.$$

Co ciekawe, jest to ten sam wzór, co wzór Dynkina z funkcjonałem addytywnym (w przypadku, gdy M_t jest dodatnim funkcjonałem multiplikatywnym i $A_t = -\lambda \ln(M_t)$). Tym razem jednak interpretacja jest inna: generatorem podprocesu Y_t powinien być operator

$$L_M f(x) = Lf(x) + \left(\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbb{E}^x M_t - 1}{t} \right) f(x).$$

Gdy $M_t = \exp(\int_0^t V(X_s)ds)$ dla pewnej funkcji ciągłej V, otrzymujemy

$$L_M f(x) = Lf(x) + V(x)f(x).$$

Powyższy operator nazywany jest *operatorem Schrödingera* z potencjałem $V(x)$, zaś identyfikacja półgrupy generowanej przez ten operator oraz półgrupy o jądrze $p_{M,t}$ to słynny *wzór Feynmana–Kaca*.

W powyższych rozważaniach ignorowaliśmy szczegóły techniczne i nie dowodziliśmy żadnych twierdzeń: materiał ten niestety wykracza poza ramy tych notatek.

4.4. **Struktura generatora procesu Fellera.** Generator procesu Fellera jest skomplikowanym obiektem: zwykle bardzo trudno opisać jego dziedzinę. Mimo to często znana jest postać $Lf(x)$ w przypadku, gdy f jest odpowiednio regularne. Tak jest na przykład, gdy X_t jest procesem Lévy'ego, czyli jednorodnym w przestrzeni procesem Fellera o wartościach w $\mathbb{R}^d$ (inaczej: jednorodnym w czasie i stochastycznie ciągłym procesem o przyrostach niezależnych).

TWIERDZENIE 4.18. Jeśli X_t jest procesem Lévy'ego i $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$, to

$$Lf(x) = \nabla f(x) \cdot A\nabla f(x) + b \cdot \nabla f(x) + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} (f(x+z) - f(x) - \mathbb{1}_{B(0,1)}(z) z \cdot \nabla f(x))\nu(dz),$$

gdzie A jest nieujemnie określoną macierzą, b wektorem, zaś ν nieujemną miarą na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, względem której funkcja $\min\{1, |z|^2\}$ jest całkowalna. Co więcej, dla każdej trójki (A, b, ν) istnieje proces Lévy'ego, którego generator L ma wyżej opisaną własność.

Klasycznym wynikiem opisującym generator procesu Fellera jest następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 4.19 (Twierdzenie Courrége'a). Jeśli X_t jest procesem Fellera o wartościach w $\mathbb{R}^d$ i dziedzina generatora L procesu X_t zawiera funkcje gładkie o zwartym nośniku, to

$$Lf(x) = \nabla f(x) \cdot A(x)\nabla f(x) + b(x) \cdot \nabla f(x) + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{x\}} (f(y) - f(x) - \mathbb{1}_{B(0,1)}(y-x)(y-x) \cdot \nabla f(x))\nu(x, dy)$$

dla $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, gdzie (dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$) $A(x)$ jest nieujemnie określoną macierzą, $b(x)$ wektorem, zaś $\nu(x, A)$ nieujemną miarą na $\mathbb{R}^d \setminus \{x\}$, względem której funkcja $\min\{1, |y-x|^2\}$ jest całkowalna.

Ciekawym i wciąż otwartym problemem jest opis operatorów, które są generatorami procesów Fellera w $\mathbb{R}^d$. Najlepszy znany wynik w tym kierunku pochodzi od Waltera Hoha i wymaga, by współczynniki $A(x)$, $b(x)$ i $\nu(x, A)$ zależały od x w odpowiednio gładki sposób. Uważa się jednak, że założenia te można istotnie osłabić.

W powyższym opisie $A(x)$ oraz $b(x)$ odpowiadają w pewnym sensie za część ciągłą procesu, zaś $\nu(x, A)$ opisuje opisuje intensywność skoków procesu X_t z x do A. Dla procesów Lévy'ego można to wyrazić formalnie w następujący sposób: jeśli $0 \notin A$, to $t\nu(A)$ jest oczekiwaną liczbą tych $s \in [0, t)$, dla których $X_s - X_{s-} \in A$. Analogiczne sformułowanie dla ogólniejszych procesów jest nieco bardziej kłopotliwe: dla rozłącznych zbiorów A i B zachodzi

$$\mathbb{E}^x \sum_{s \in [0,t]} \mathbb{1}_A(X_{s-}) \mathbb{1}_B(X_s) = \mathbb{E}^x \int_0^t \mathbb{1}_A(X_s) \nu(X_s, B) ds.$$

Ogólniej, jeśli $\varphi(t, x, y)$ jest nieujemną funkcją borelowską o własności $\varphi(t, x, x) = 0$, to

$$\mathbb{E}^x \sum_{s \in [0,t]} \varphi(s, X_{s-}, X_s) = \mathbb{E}^x \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{x\}} \varphi(s, X_s, X_s + z) \nu(X_s, dz) ds.$$

W istocie zachodzi dużo ogólniejsze twierdzenie.

TWIERDZENIE 4.20 (wzór na system Lévy'ego). Jeśli X_t jest procesem Fellera o regulowanych trajektoriach, to istnieje funkcjonał addytywny A_t oraz rodzina miar $\nu(x, A)$ na $\mathscr{X} \setminus \{x\}$ o następującej własności: jeśli $\varphi(t, x, y)$ jest nieujemną funkcją borelowską o własności $\varphi(t, x, x) = 0$, to

$$\mathbb{E}^x \sum_{s \in [0,t]} \varphi(s, X_{s-}, X_s) = \mathbb{E}^x \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{x\}} \varphi(s, X_s, X_s + z) \nu(X_s, dz) dA_s.$$

[[wzór na system Lévy'ego]]
[[generator z funkcjami Urysohna w dziedzienie i znaczenie dla wzoru Ikedy–Watanabe]]
[[Na listę: Dynkin zdefiniowany tylko przez kule; kule symetryczne i kontrprzykład.]]