Niech $\vec{F}$ będzie polem wektorowym. Jeśli

$$\vec{F} = -\nabla V + \nabla \times \vec{A},$$

to funkcja V nazywana jest *potencjałem skalarnym* pola $\vec{F}$, zaś pole wektorowe $\vec{A}$ — *potencjałem wektorowym* pola $\vec{F}$. Parę potencjałów danego pola można wybrać na wiele sposobów — konkretny wybór nosi nazwę *cechowania*.

(1) Naszkicuj dowód następującego twierdzenia: jeśli $\vec{F}$ jest polem klasy C^1 w obszarze jednospójnym D oraz $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ w D, to istnieje potencjał skalarny V taki, że $\vec{F} = -\nabla V$ w D.

(2) Naszkicuj dowód następującego twierdzenia: jeśli $\vec{F}$ jest polem klasy C^1 w obszarze jednospójnym D oraz $\nabla \cdot \vec{F} = \vec{0}$ w D, to istnieje potencjał wektorowy $\vec{A}$ taki, że $\vec{F} = \nabla \times V$ oraz $A_3 = 0$ w D.

(3) Zauważ, że do potencjału skalarnego można dodać stałą, zaś do potencjału wektorowego — gradient dowolnej funkcji.

(4) Udowodnij, że do potencjału skalarnego można dodać dowolną funkcję harmoniczną (czyli spełniającą równanie $\Delta u = 0$), jeśli odpowiednio zmodyfikuje się potencjał wektorowy.

(5) Sprawdź, że funkcja $V(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2$ i pole wektorowe $\vec{A}(\vec{x}) = (0, 0, 2x_1x_2)$ tworzą parę potencjałów pola zerowego. Wyznacz $\vec{A}$ o podobnej własności dla $V(\vec{x}) = x_1/|\vec{x}|^3$.

Twierdzenie (rozkład Helmholtza). Załóżmy, że $D \subseteq \mathbb{R}^3$ jest obszarem, zaś $\vec{F}$ jest ciągłym polem wektorowym na D takim, że $|\vec{F}(\vec{x})|/(1 + |\vec{x}|)$ jest funkcją całkowalną w D. Wówczas istnieje potencjał skalarny i potencjał wektorowy pola $\vec{F}$.

Jeśli ponadto D jest regularny (w sensie twierdzenia o dywergencji) lub $D = \mathbb{R}^3$, $\vec{F}$ jest klasy C^1 na D wraz z brzegiem, zaś w przypadku $D = \mathbb{R}^3$ pochodne cząstkowe $\vec{F}$ spełniają analogiczny warunek całkowalności, to para potencjałów może być wyrażona wzorem:

$$\begin{cases} V(\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_D \dfrac{\nabla \cdot \vec{F}(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|}\, d\vec{y} - \dfrac{1}{4\pi} \oint_{\partial D} \dfrac{\vec{F}(\vec{z})}{|\vec{z} - \vec{x}|} \cdot d\vec{n}(\vec{z}), \\ \vec{A}(\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_D \dfrac{\nabla \times \vec{F}(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|}\, d\vec{y} + \dfrac{1}{4\pi} \oint_{\partial D} \dfrac{\vec{F}(\vec{z})}{|\vec{z} - \vec{x}|} \times d\vec{n}(\vec{z}), \end{cases}$$

gdzie $d\vec{y}$ oznacza element objętości, zaś $d\vec{n}(\vec{z})$ to wektor normalny skierowany na zewnątrz D przemnożony przez element powierzchni.

(6) Uzasadnij, że $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F}$.

(7) Określmy $\vec{F}(\vec{x}) = 0$ dla $\vec{x} \notin \overline{D}$. Niech $\vec{G} = U\vec{F}$, gdzie U jest operatorem potencjału Newtona. Zauważ, że wewnątrz D zachodzi

$$\vec{F} = -\Delta \vec{G} = -\nabla(\nabla \cdot \vec{G}) + \nabla \times (\nabla \times \vec{G})$$

i wobec tego prawdziwa jest pierwsza część twierdzenia Helmholtza.

(8) Zauważ, że uzyskany wyżej potencjał wektorowy $\vec{A} = \nabla \times \vec{G}$ spełnia $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

(9) Sprawdź, czy wewnątrz D para potencjałów $V = \nabla \cdot \vec{G}$ oraz $\vec{A} = \nabla \times \vec{G}$ jest równa parze podanej w drugiej części twierdzenia Helmholtza.

Niech $\vec{E}(t,\vec{x})$ oznacza pole elektryczne, $\vec{B}(t,\vec{x})$ pole magnetyczne, $\varrho(t,\vec{x})$ gęstość rozmieszczenia ładunku elektrycznego, zaś $\vec{J}(t,\vec{x})$ strumień prądu elektrycznego. Wielkości te spełniają *równania Maxwella*:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \varrho, \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \\ \nabla \times \vec{B} = \partial_t \vec{E} + \vec{J}. \end{cases}$$

Spełniona jest ponadto zasada zachowania ładunku elektrycznego:

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot \vec{J} = 0,$$

nazywana również *równaniem ciągłości*.

(10) Wyraź $\partial_t^2 \vec{E}$ oraz $\partial_t^2 \vec{B}$ bez używania pochodnej po czasie.

(11) Sprawdź, że jeśli $\varrho = 0$ oraz $\vec{J} = 0$, to współrzędne $\vec{E}$ oraz $\vec{B}$ spełniają (klasyczne) równanie fali: $\partial_t^2 u = \Delta u$.

Potencjał wektorowy $\vec{A}(t,\vec{x})$ pola magnetycznego nazywa się *potencjałem magnetycznym*, zaś potencjał skalarny $V(t,\vec{x})$ pola $\vec{E} - \partial_t \vec{A}$ — *potencjałem elektrycznym*. Gdy $\vec{A}$ nie zależy od czasu, potencjał elektryczny jest po prostu potencjałem skalarnym pola elektrycznego.

Cechowanie Lorenza to wybór potencjału magnetycznego, który spełnia warunek:

$$\partial_t V + \nabla \cdot \vec{A} = 0.$$

Cechowanie Coulomba z kolei zadane jest przez warunek $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

(12) Zauważ, że do potencjału magnetycznego można dodać gradient dowolnej funkcji u. Wówczas do potencjału elektrycznego należy dodać $\partial_t u$.

(13) Sprawdź, że przy cechowaniu Lorenza potencjał elektryczny i potencjał magnetyczny wyznaczają pola elektryczne i magnetyczne:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla V - \partial_t \vec{A}, \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \end{cases} .$$

(14) Udowodnij, że przy cechowaniu Lorenza równania Maxwella można zapisać w postaci

$$\begin{cases} \partial_t^2 V - \Delta V = \varrho, \\ \partial_t^2 \vec{A} - \Delta \vec{A} = \vec{J}. \end{cases}$$

(15) Zauważ, że jeśli u spełnia równanie fali $\partial_t^2 u = \Delta u$, to dodanie $\partial_t u$ do potencjału elektrycznego oraz ∇u do potencjału magnetycznego zachowuje cechowanie Lorenza.

Rozwiązania

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)
(8)
(9)
(10)
(11)
(12)
(13)
(14)
(15)