Teoria potencjału procesów Markowa — lista zadań nr 1

W $\mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 3$) definiujemy *jądro potencjału Newtona*: $U(x,x) = U(0) = \infty$,

$$U(x,y) = U(x-y) = \frac{1}{(d-2)\omega_d}\frac{1}{|x-y|^{d-2}} \qquad (x \neq y),$$

gdzie $\omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(\frac{d}{2})$ to miara powierzchiowa sfery jednostkowej $\partial B(0,1)$. *Operator potencjału Newtona* to:

$$U\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} U(x,y)\mu(dy)$$

i jest określony dla wszystkich miar μ takich, że

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|x|^{d-2}}\,|\mu|(dx) < \infty.$$

(1) Udowodnij, że $U\mu(x)$ jest poprawnie zdefiniowany dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$. *Wskazówka: Udowodnij wpierw, że* $\int_{B(0,R)} U(x-y)dx \leqslant C/(1+|x|^{d-2})$ *dla pewnej stałej* C. *Następnie wykorzytaj twierdzenie Fubiniego, aby udowodnić, że całka* $\int_{B(0,R)} U\mu(x)dx$ *jest skończona.*

(2) Wyznacz $\nabla U(x)$ i sprawdź, że $\Delta U(x) = 0$ dla $x \neq 0$.

(3) Udowodnij, że jeśli μ ma nośnik zwarty i gęstość $\mu(x)$ klasy C^2, to $\Delta U\mu = U\Delta\mu$. *Wskazówka: Udowodnij, że można różniczkować pod znakiem całki.*

(4) Niech D będzie otwarty. Udowodnij, że jeśli $|\mu|(D) = 0$, to $\Delta U\mu = 0$ w D. *Wskazówka: Udowodnij, że można różniczkować pod znakiem całki.*

(5) Udowodnij, że jeśli μ ma gęstość $\mu(x)$ klasy C^2 w otoczeniu x, to $\mu(x) = -\Delta U\mu(x)$. *Wskazówka: Wykorzystaj poprzednie dwa zadania.*

(6) Udowodnij, że jeśli μ ma ciągłą gęstość $\mu(x)$ w otoczeniu x, to $U\mu(x)$ nie musi być funkcją klasy C^2 w otoczeniu x. (♠)

Twierdzenie (rozwiązanie równania Poissona w kuli). Niech $D = B(0,r)$. Dla dowolnej funkcji u klasy C^2 na $\overline{D}$ zachodzi

$$u(x) = -\int_D G_D(x,y)\Delta u(y)dx + \int_{\partial D} P_D(x,z)u(z)dz,$$

gdzie $G_D(x,y)$ to *funkcja Greena* kuli, zaś $P_D(x,z)$ to *jądro Poissona* kuli:

$$\begin{aligned}
G_D(x,y) &= U(x,y) - (\tfrac{r}{|x|})^{d-2}U(\tfrac{r^2}{|x|^2}x,y) && (x,y \in \overline{D},\ x \neq 0,\ x \neq y),\\
G_D(0,y) &= U(x,y) - ((d-2)\omega_d)^{-1}r^{d-2} && (y \in D,\ y \neq 0),\\
G_D(x,x) &= \infty && (x \in \overline{D}),\\
P_D(x,z) &= \frac{1}{\omega_d r}\frac{r^2-|x|^2}{|x-z|^d} && (x \in D,\ y \in \partial D).
\end{aligned}$$

(7) Niech $D = B(0,r)$. Udowodnij, że $G_D(x,z) = 0$ dla $z \in \partial D$, $G_D(x,y) = G_D(y,x)$ dla $x,y \in \overline{D}$ oraz

$$P_D(x,z) = -\frac{z \cdot \nabla_y G_D(x,z)}{r}.$$

(8) Udowodnij, że funkcje harmoniczne w zbiorze otwartym D są analityczne w D.
Wskazówka: Można rozwijać jądro Poissona w szereg, można rozważać rozszerzenia holomorficzne i wykorzystać twierdzenie Morery.

(9) Udowodnij (*uśredniając po promieniu*), że jeśli D jest otwarty, zaś u jest harmoniczna w D, to

$$u(x) = \frac{1}{|B|} \int_B u(y)dy$$

dla każdej kuli B takiej, że $\overline{B} \subseteq D$.

(10) Udowodnij twierdzenie odwrotne: jeśli u jest lokalnie całkowalna w D i ma własność z poprzedniego zadania, to jest klasy C^2 i jest harmoniczna.
Wskazówka: Udowodnij wpierw, że jeśli $\operatorname{dist}(x, \partial D) > 2R$, *zaś* φ *jest nieujemną funkcją klasy* C^∞ *na* $[0, \infty)$ *równą jeden w* $[0, R]$ *i równą zero w* $[2R, \infty)$, *to*

$$\begin{aligned}\int_{B(x,2R)} u(y)\varphi(|x-y|)dy &= \int_R^{2R} (-\varphi'(r)) \left(\int_{B(x,r)} u(y)dy \right) dr \\ &= u(x) \int_R^{2R} (-\varphi'(r))|B(x,r)|dr\end{aligned}$$

i wywnioskuj, że u *jest klasy* C^∞ *w* D. *Do dowodu równości* $\Delta u(x) = 0$ *wykorzystaj własność wartości średniej w kuli* $B(x, r)$ *o małym promieniu i rozwinięcie Taylora* u *w otoczeniu* x. *Inny możliwy dowód drugiej części polega na uzyskaniu wpierw własności wartości średniej na sferze* $\partial B(x, r)$ *i wykorzystaniu wzoru na rozwiązanie równania Poissona w kuli* $B(x, r)$.

(11) Wywnioskuj *zasadę maksimum*: jeśli u jest harmoniczna w spójnym zbiorze otwartym D i ma w D ekstremum lokalne, to jest stała.
Wskazówka: Wykaż, że jeśli u *ma ekstremum lokalne w punkcie* $x \in D$, *to jest stała w pewnej kuli* $B(x, r)$, *a następnie wykorzystaj analityczność* u.

(12) Wywnioskuj *własność Liouville'a*: jeśli u jest harmoniczna w $\mathbb{R}^d$ i ograniczona z jednej strony, to jest stała.
Wskazówka: Jeśli $u(x) \geqslant a$ *dla wszystkich* x, *to*

$$\int_{B(x,r)} (u(z) - a)dz \leqslant \int_{B(y,|x-y|+r)} (u(z) - a)dz.$$

Twierdzenie (trzeci wzór Greena dla $\mathbb{R}^d$). Dla dowolnej funkcji u klasy C^2 takiej, że

$$\lim_{R\to\infty} \int_{B(0,2R)\setminus B(0,R)} \frac{|u(x)|}{1+|x|^d}\, dx = 0$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{B(0,2R)\setminus B(0,R)} \frac{|\nabla u(x)|}{1+|x|^{d-1}}\, dx = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\Delta u(x)|}{1+|x|^{d-2}}\, dx < \infty,$$

zachodzi $u = -U\Delta u$.

(13) Udowodnij (*uśredniając po promieniu*) trzeci wzór Greena dla $\mathbb{R}^d$.
Wskazówka: Wystarczy przecałkować trzeci wzór Greena dla kuli $B(0, r)$ *względem promienia* $r \in [R, 2R]$.

Rozwiązania

(1) Zauważmy wpierw, że gdy $|y| \leqslant 2R$, to

$$\int_{B(0,R)} U(x-y)dx \leqslant \int_{B(y,R+|y|)} U(x-y)dx$$
$$= \int_{B(0,R+|y|)} U(z)dz = C_1(R+|y|)^2 \leqslant 9C_1R^2.$$

Ponadto gdy $|y| \geqslant 2R$, zachodzi

$$\int_{B(0,R)} U(x-y)dy \leqslant C_2(|y|-R)^{2-d}|B(0,R)|$$
$$= C_3R^d(|y|-R)^{2-d} \leqslant C_3R^d(|y|/2)^{2-d}.$$

W obu przypadkach istnieje C_4 (zależące od R) takie, że prawa strona nie przekracza $C_4/(1+|x|^{d-2})$.

Przypuśćmy, że μ jest miarą nieujemną. Powyższe oszacowanie dowodzi, że całka iterowana $\int_{\mathbb{R}^d}\int_{B(0,R)} U(x-y)dx\mu(dy)$ jest skończona. Na mocy twierdzenia Fubiniego można zatem zamienić kolejność całkowania: całka $\int_{B(0,R)} U\mu(x)dx$ jest skończona — i przede wszystkim funkcja podcałkowa jest skończona prawie wszędzie.

Przypadek miar znakowanych rozważa się przez rozbicie miary μ na część dodatnią i ujemną.

(2) Liczymy:

$$\partial_j U(x) = \frac{1}{(d-2)\omega_d}\partial_j[(|x|^2)^{1-d/2}] = -\frac{2}{\omega_d}(|x|^2)^{-d/2}\partial_j[|x|^2] = -\frac{x_j}{\omega_d|x|^d},$$
$$\nabla U(x) = -\frac{x}{\omega_d|x|^d},$$
$$\partial_j^2 U(x) = -\frac{1}{\omega_d|x|^d} + \frac{d\cdot x_j^2}{\omega_d|x|^{d+2}},$$
$$\Delta U(x) = -\frac{d}{\omega_d|x|^d} + \frac{d|x|^2}{\omega_d|x|^{d+2}} = 0.$$

(3) Ustalmy x_0. Aby móc różniczkować $U\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\mu(x-y)U(y)dy$ pod znakiem całki, wystarczy sprawdzić, że w pewnym otoczeniu x_0 pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji $\mu(x-y)U(y)$ względem zmiennej x są ograniczone przez pewną całkowalną funkcję zmiennej y. Tym ograniczeniem może być $C\mathbb{1}_{B(0,R+|x_0|)}(y)U(y)$, gdzie C jest wspólnym ograniczeniem na pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji μ, zaś R jest tak duże, że $\mu(x)=0$ gdy $|x| \geqslant R$.

(4) Tym razem chcemy różniczkować $U\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d\setminus D} U(x-y)\mu(dy)$ pod znakiem całki gdy $x \in D$ — wiemy już bowiem, że $\Delta U(x-y) = 0$ dla $x \in D$, $y \in \mathbb{R}^d \setminus D$. Jak już policzyliśmy, pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji $U(x)$ są ograniczone przez odpowiednio $C_1|x|^{1-d}$ oraz $C_2|x|^{-d}$. Jeśli więc $x_0 \in D$, $B(x_0,2r) \subseteq D$, to dla $x \in B(x_0,r)$, $y \in \mathbb{R}^d \setminus D$ pochodne cząstkowe $U(x-y)$ względem zmiennej x są ograniczone przez C_1r^{1-d} (pierwszego rzędu) oraz C_2r^{-d} (drugiego rzędu). To wystarcza do różniczkowania pod znakiem całki (tak, jak przy całce względem miary Lebesgue'a: korzystamy z definicji pochodnej,

twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej i twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej).

(5) Niech $x_0 \in D$, $B(x_0, 2r) \subseteq D$. Można rozbić μ na sumę dwóch miar, jednej o gęstości $\mu_1(x)$ klasy C^2 i o zwartym nośniku (zdefiniowanej jako $\mu_1(x)dx = \varphi(x)\mu(dx)$ dla φ klasy C^2 równej zero poza $B(x_0, 2r)$ i jeden w $B(x_0, r)$), drugiej równej zero w $B(x_0, r)$ (zdefiniowanej jako $\mu_2(dx) = (1 - \varphi(x))\mu(dx)$. Pozostaje zastosować wyniki poprzednich dwóch zadań.

(6) ...

(7) Przypadek $x = 0$ jest łatwy, rozważmy więc $x \neq 0$. Niech $x^* = \frac{r}{|x|^2}x$. Zachodzi

$$|x|^2|x^* - y|^2 = r^2 + |x|^2|y|^2 - 2r^2 x \cdot y = |y|^2|x - y^*|^2,$$

zatem

$$(\tfrac{r}{|x|})^{d-2}U(x^*, y) = (\tfrac{r}{|x||x^*-y|})^{d-2} = (\tfrac{r}{|y||x-y^*|})^{d-2} = (\tfrac{r}{|y|})^{d-2}U(x, y^*).$$

W szczególności $G_D(x, y) = G_D(y, x)$. Ponadto gdy $|y| = r$, to $y = y^*$ i wobec tego $U(x, y^*) = U(x, y)$, skąd $G_D(x, y) = 0$. Zachodzi wreszcie

$$\begin{aligned}
\nabla_y G_D(x, y) &= \nabla_y U(x, y) - \frac{r^{d-2}}{|x|^{d-2}}\nabla_y U(x^*, y) \\
&= \frac{1}{\omega_d}\frac{x - y}{|x - y|^d} - \frac{1}{\omega_d}\frac{r^{d-2}(x^* - y)}{|x|^{d-2}|x^* - y|^d} \\
&= \frac{1}{\omega_d}\frac{x - y}{|x - y|^d} - \frac{1}{\omega_d}\frac{r^{d-2}|x|^2(x^* - y)}{|y|^d|x - y^*|^d} \\
&= \frac{1}{\omega_d}\frac{x - y}{|x - y|^d} - \frac{1}{\omega_d}\frac{r^d(x - (|x|/r)^2 y)}{|y|^d|x - y^*|^d}\,.
\end{aligned}$$

Gdy $|y| = r$, to $y^* = y$, a więc

$$\nabla_y G_D(x, y) = -\frac{1}{\omega_d}\frac{(1 - (|x|/r)^2)y}{|x - y|^d}\,,$$

skąd

$$y \cdot \nabla_y G_D(x, y) = \frac{1}{\omega_d}\frac{r^2 - |x|^2}{|x - y|^d} = rP_D(x, y).$$

(8) Rozważmy $0 < s < r$. Naszym celem jest wykazanie, że jądro Poissona $P_{B(0,r)}(x, z)$ rozszerzają się do funkcji holomorficznych zmiennej x i zastosowanie twierdzenia Morery do wykazania holomorficzności całki z jądra Poissona opisującej funkcję harmoniczną u.

Funkcja $\eta(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2$ jest holomorficzną funkcją $x_1, x_2, \ldots, x_d$. Oczywiście $|\eta(x)| \leqslant |x|^2$. Ponadto jeśli $|\operatorname{Re} x| > r - s$ oraz $|\operatorname{Im} x| < \frac{1}{2}(r - s)$, to $|\eta(x)| \geqslant \operatorname{Re}\eta(x) \geqslant |\operatorname{Re} x|^2 - |\operatorname{Im} x|^2 \geqslant \frac{1}{2}(r - s)^2$.

Oznacza to, że rodzina funkcji holomorficznych $\psi_z(x) = (r^2 - \eta(x))(\eta(x - z))^{-d/2}$ jest poprawnie określona, gdy z jest wektorem rzeczywistym spełniającym $|z| = r$, zaś x jest wektorem zespolonym takim, że $|\operatorname{Re} x| < s$, $|\operatorname{Im} x| < \frac{1}{2}(r - s)$ (bowiem wtedy $|\operatorname{Re} x - z| \geqslant |z| - |\operatorname{Re} x| > r - s$, a więc $\operatorname{Re}\eta(x - z) > 0$). Ponadto $|\psi_z(x)| \leqslant (r^2 + |\eta(x)|)/|\eta(x - z)|^{d/2} \leqslant 2^{d/2}(r^2 + 2r^2)/(r - s)^d$.

Z twierdzenia Fubiniego, twierdzenia Morery i lematu Osgooda wynika zatem, że jeśli u jest ograniczona na $\partial B(0,r)$, to funkcja $\varphi(x) = \int_{\partial B(0,r)} \psi_z(x)u(z)\sigma(dz)$ jest holomorficzną funkcją x w obszarze $|\operatorname{Re} x| < s$, $|\operatorname{Im} x| < \frac{1}{2}(r-s)$.

Zauważmy, że jeśli x jest rzeczywistym wektorem, to $\psi_z(x) = P_{B(0,r)}(x, z0/(\omega_d r)$. Jeśli więc u jest ciągła w $\overline{B}(0,r)$ oraz harmoniczna w $B(0,r)$, to dla rzeczywistych wektorów $x \in B(0,r)$ zachodzi $u(x) = \varphi(x)/(\omega_d r)$. Zatem w istocie u jest analityczna w $B(0,s)$ dla dowolnego $s \in (0,r)$. Oczywiście zamiast kuli $B(0,r)$ można rozważać kulę o dowolnym środku, a stąd już wynika teza zadania.

(9) Wiemy już, że jeśli u jest harmoniczna w D oraz $\overline{B}(x,r) \subseteq D$, to $\sigma(\partial B(x,s))u(x) = \int_{B(x,s)} u(y)\sigma(dy)$ dla dowolnego $s \in (0,r]$. Całkując obie strony równości względem $s \in (0,r]$, otrzymujemy $|B(x,r)|u(x) = \int_{B(x,r)} u(y)dy$.

(10) Z twierdzenia Fubiniego wynika, że gdy $\overline{B}(x,2R) \subseteq D$, to zgodnie ze wskazówką

$$\begin{aligned}\int_{B(x,2R)} u(y)\varphi(|x-y|)dy &= \int_{B(x,2R)} \int_{|x-y|}^{2R} u(y)(-\varphi'(r))drdy \\ &= \int_R^{2R} (-\varphi'(r)) \left(\int_{B(x,r)} u(y)dy \right) dr \\ &= u(x) \int_R^{2R} (-\varphi'(r))|B(x,r)|dr,\end{aligned}$$

czyli w zbiorze $D_{2R} = \{x \in D : \operatorname{dist}(x, \partial D) > 2R\}$ funcja u jest równa splotowi u oraz funkcji klasy C^∞ o zwartym nośniku. Różniczkując pod znakiem całki, wnioskujemy, że u jest klasy C^∞ w D_{2R}. Wobec dowolności R, f jest klasy C^∞ w D.

Przypuśćmy, że $0 \in D$ oraz że u jest klasy C^2 w otoczeniu 0. Ze wzoru Taylora wynika, że

$$u(x) = u(0) + \sum_{i=1}^d x_i \partial_i u(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d x_i x_j \partial_{ij} u(0) + o(|x|^2)$$

gdy $|x| \to 0$. Wobec tego

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} u(x)dx = u(0) &+ \frac{1}{|B(0,r)|} \sum_{i=1}^d \partial_i u(0) \int_{B(0,r)} x_i dx \\ &+ \frac{1}{2|B(0,r)|} \sum_{i,j=1}^d \partial_{ij} u(0) \int_{B(0,r)} x_i x_j dx + o(r^2).\end{aligned}$$

Składniki pierwszej sumy po prawej stronie są równe zero. Podobnie wszystkie składniki drugiej sumy się zerują, z wyjątkiem tych, dla których $i = j$. Stąd

$$\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} u(x)dx = u(0) + \frac{1}{2|B(0,r)|} \sum_{i=1}^d \partial_{ii} u(0) \int_{B(0,r)} x_i^2 dx + o(r^2).$$

Z symetrii wynika, że

$$\int_{B(0,r)} x_i^2 dx = \frac{1}{d} \int_{B(0,r)} |x|^2 dx = \frac{\omega_d}{d} \int_0^r s^{d+1} ds = \frac{\omega_d r^{d+2}}{d(d+2)} = \frac{r^2 |B(0,r)|}{d+2}.$$

Otrzymujemy więc

$$\frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)} u(x)dx = u(0) + \frac{r^2}{2(d+2)}\Delta u(0) + o(r^2),$$

czyli

$$\Delta u(0) = \lim_{r\to 0^+} \frac{2(d+2)}{r^2}\left(\frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)} u(x)dx - u(0)\right).$$

W przypadku gdy u ma własność wartości średniej, prawa strona jest oczywiście równa zero, zatem $\Delta u(0) = 0$. Rozważając funkcję $u(\cdot - x)$ zamiast $u(\cdot)$ otrzymujemy $\Delta u(x) = 0$ dla dowolnego $x \in D$.

(11) Jeśli u ma w x maksimum lokalne, to dla y z pewnej kuli $B(x,r)$ zachodzi nierówność $u(y) \leqslant u(x)$. Z drugiej strony $\int_{B(x,r)} u(y)dy = |B(x,r)|u(x)$, czyli $\int_{B(x,r)}(u(x) - u(y))dy = 0$. Całka z ciągłej funkcji nieujemnej jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja ta jest stale równa zero, zatem $u(y) = u(x)$ dla $y \in B(x,r)$. Z analityczności funkcji u wynika, że u jest stała na całym D: zbiór, na którym szereg potęgowy u ma wszystkie współczynniki równe zero, jest zarówno domknięty (z ciągłości u i jej pochodnych), jak i otwarty (z analityczności) w topologii względnej w D).

(12) Zgodnie ze wskazówką, na mocy własności wartości średniej, $|B(x,r)|(u(x)-a) \leqslant |B(y,|x-y|+r)|(u(y)-a)$, czyli $u(x)-a \leqslant (|x-y|/r+1)^d(u(y)-a)$. Przechodząc do granicy z $r \to \infty$ otrzymujemy $u(x) - a \leqslant u(y) - a$, czyli $u(x) \leqslant u(y)$. Skoro x i y są dowolne, funkcja u musi być stała.

(13) Całkując trzeci wzór Greena zgodnie ze wskazówką, otrzymujemy (gdy $|x| < R$)

$$\begin{aligned} u(c) &= \frac{1}{R}\int_R^{2R}\Bigg(-\int_{B(0,r)} U(x,y)\Delta u(y)dy \\ &\qquad + \oint_{\partial B(0,r)} (U(x,z)\nabla u(z) - u(z)\nabla_y U(x,z))\cdot n_z dz\Bigg)dr \\ &= -\int_{B(0,2R)} U(x,y)\Delta u(y)\min\{1, 2-\tfrac{|x|}{R}\}dy \\ &\qquad + \frac{1}{R}\int_{B(0,2R)\setminus B(0,R)} (U(x,z)\nabla u(z) - u(z)\nabla_y U(x,z))\cdot \tfrac{z}{|z|}dz. \end{aligned}$$

Dla ustalonego x oraz $z \in B(0,2R)\setminus B(0,R)$ zachodzi $U(x,z)/R \leqslant C/(1+|z|^{d-1})$ oraz $|\nabla_y U(x,z)|/R \leqslant C/(1+|z|^d)$. Przechodząc do granicy gdy $R \to \infty$ i stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej, otrzymujemy tezę.