Teoria potencjału procesów Markowa — lista zadań nr 2

(1) Niech $\mathscr{F}$ będzie σ-ciałem generowanym przez zamkniętą ze względu na branie skończonych przekrojów rodzinę podzbiorów $\mathscr{F}_0$. Udowodnij, że jeśli $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$ oraz $\mathbb{E}(\mathbb{1}_E X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_E Y)$ dla $E \in \mathscr{F}_0$, to $\mathbb{E}(\mathbb{1}_E X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_E Y)$ dla $E \in \mathscr{F}$. Wywnioskuj, że jeśli zmienna losowa Y jest mierzalna względem $\mathscr{F}$, to $Y = \mathbb{E}(X|\mathscr{F})$ prawie na pewno.
Wskazówka: Wykorzystaj lemat Dynkina o π-λ-układach.

(2) Udowodnij, że jeśli Y jest zmienną losową mierzalną względem σ-ciała generowanego przez Z, to Y jest borelowską funkcją Z, tj. $Y = \varphi(Z)$ dla pewnej funkcji borelowskiej φ.

(3) Niech $Y = \varphi(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$. Przypuśćmy, że X i Y są całkowalne. Przypomnij krótko uzasadnienie, że następujące warunki są równoważne:
(a) $Y = \mathbb{E}(X|Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$;
(b) $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Z_1\in B_1, Z_2\in B_2, \ldots, Z_n\in B_n\}} Y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Z_1\in B_1, Z_2\in B_2, \ldots, Z_n\in B_n\}} X)$ dla dowolnych zbiorów borelowskich $B_1, B_2, \ldots, B_n$;
(c) $\mathbb{E}(f_1(Z_1)f_2(Z_2)\ldots f_n(Z_n)Y) = \mathbb{E}(f_1(Z_1)f_2(Z_2)\ldots f_n(Z_n)X)$ dla dowolnych ograniczonych funkcji borelowskich $f_1, f_2, \ldots, f_n$;
(d) $\mathbb{E}(f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)Y) = \mathbb{E}(f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)X)$ dla dowolnej ograniczonej funkcji borelowskiej f.

(4) Uzasadnij, że warunkowa wartość oczekiwana jest ciągłym operatorem na $\mathscr{L}^1$ (przestrzeni zmiennych losowych X o skończonej średniej, z normą $\mathbb{E}(|X|)$).
Wskazówka: Wykorzystaj nierówność Jensena dla warunkowej wartości oczekiwanej.

(5) Niech X_t będzie ruchem Browna startującym z 0. Określmy $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}^d$ oraz $\tilde{X}_t(\tilde{\omega}) = x + X_t(\omega)$ gdy $\tilde{\omega} = (\omega, x) \in \tilde{\Omega}$. Niech ponadto $\mathbb{P}^x$ będzie obrazem miary $\mathbb{P}$ przez odwzorowanie $\Omega \ni \omega \mapsto (\omega, x) \in \tilde{\Omega}$. Uzasadnij, że tak skonstruowany proces jest ruchem Browna startującym z dowolnego punktu (równoważnie: dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$ proces $\tilde{X}_t - x$ z miarą $\mathbb{P}^x$ jest ruchem Browna startującym z zera).

Niech t_n ($n \geqslant 1$) będzie ciągiem wzystkich dodatnich liczb wymiernych bez powtórzeń, $t_0 = 0$. Niech ξ_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych o rozkładzie normalnym $N(0, 2)$. Określamy rekurencyjnie:

$$\begin{cases} X_{t_0} = 0 \\ X_{t_n} = X_{t_i} + \sqrt{t_n - t_i}\,\xi_n & \text{gdy } t_n > t_i = \max\{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}\}, \\ X_{t_n} = \frac{t_j - t_n}{t_j - t_i} X_{t_i} + \frac{t_n - t_i}{t_j - t_i} X_{t_j} + \sqrt{\frac{(t_n - t_i)(t_j - t_n)}{t_j - t_i}}\,\xi_n & \text{gdy } t_n \in (t_i, t_j),\ t_0, t_1, \ldots, t_{n-1} \notin (t_i, t_j). \end{cases}$$

(W konstrukcji X_{t_n} liczba t_n leży w pewnym przedziale, na który odcinek $(0, \infty)$ dzielą liczby $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$; jest to albo przedział postaci (t_i, ∞), co prowadzi do definicji w środkowym wierszu klamry, albo postaci (t_i, t_j) i wtedy stosujemy definicję w dolnym wierszu klamry).

(6) Udowodnij, że skonstruowany wyżej proces $(X_t : t \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty))$ ma niezależne przyrosty o rozkładach normalnych: $X_{s+t} - X_s$ ma rozkład normalny $N(0, 2t)$ dla dowolnych $s, t \geqslant 0$, $s, t \in \mathbb{Q}$.
Wskazówka: Wystarczy obliczyć kowariancję zmiennych X_{t_n} oraz X_{t_m}.

(7) Udowodnij, że jeśli $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ są niezależnymi zmiennymi rzeczywistymi o tym samym symetrycznym rozkładzie oraz $X_k = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_k$, to

$$\mathbb{P}(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} > x) \leqslant 2\mathbb{P}(X_n > x)$$

dla $x > 0$ (zasada odbicia). Wywnioskuj, że

$$\mathbb{P}(\max\{|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|\} > x) \leqslant 2\mathbb{P}(|X_n| > x).$$

(8) Udowodnij, że dla procesu $(X_t : t \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty))$ skonstruowanego powyżej oraz $n, N > 0$, $x > 0$ zachodzi:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\sup\{|X_{s+t} - X_s| : s \in [0, N) \cap \mathbb{Q},\, t \in (0, \tfrac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}\} > x) \\
&\quad \leqslant \mathbb{P}(\sup\{|X_{j/n+t} - X_{j/n}| : j \in \{0, 1, \ldots, Nn-1\},\, t \in (0, \tfrac{2}{n}) \cap \mathbb{Q}\} > \tfrac{x}{2}) \\
&\quad \leqslant Nn\mathbb{P}(\sup\{|X_t| : t \in (0, \tfrac{2}{n}) \cap \mathbb{Q}\} > \tfrac{x}{2}) \\
&\quad \leqslant 2Nn\mathbb{P}(|X_{2/n}| > \tfrac{x}{2}) \to 0
\end{aligned}$$

gdy $n \to \infty$. Wywnioskuj, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie X_t rozszerzają się do funkcji ciągłych na $[0, \infty)$.

(9) Wykaż, że rozszerzenie X_t z poprzedniego zadania jest jednowymiarowym ruchem Browna (startującym z zera).

(10) Wykaż, że jeśli dla $j = 1, 2, \ldots, d$ procesy $X_{j,t}$ są niezależnymi od siebie jednowymiarowymi ruchami Browna, to $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t}, \ldots, X_{d,t})$ jest d-wymiarowym ruchem Browna (startującym z zera).

Niech $(X_t : t \in [0, \infty))$ będzie rodziną zmiennych losowych, $\mathbb{P}^x$ rodziną prawdopodobieństw. Wprowadzamy *prawdopodobieństwa przejścia*:

$$p_t(x, A) = \mathbb{P}^x(X_t \in A).$$

Rozważmy następującą własność: rozkłady skończenie wymiarowe X_t są dane przez prawdopodobieństwa przejścia wzorem

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^x(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \ldots, X_{t_n} \in B_n) \\
&= \int_{B_1} p_{t_1}(x, dx_1) \int_{B_2} p_{t_2 - t_1}(x_1, dx_2) \ldots \int_{B_{n-1}} p_{t_{n-1} - t_{n-2}}(x_{n-2}, dx_{n-1}) p_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, B_n),
\end{aligned}$$

gdy $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$, zaś $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są zbiorami borelowskimi. Powyższa własność jest równoważna własności Markowa i jednorodności w czasie: jeśli $0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant r_m \leqslant s \leqslant s+t$ i B jest borelowski, to

$$\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B | X_{r_1}, \ldots, X_{r_m}, X_s) = p_t(X_s, B).$$

(11) Sprawdź, że jednorodny w czasie proces Markowa spełnia warunek

$$\mathbb{P}^x(X_{s+t_1} \in B_1, X_{s+t_2} \in B_2, \ldots, X_{s+t_n} \in B_n | X_{r_1}, X_{r_2}, \ldots, X_{r_m}, X_s) = \varphi(X_s),$$

gdzie $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_m \leqslant s \leqslant s + t_1 \leqslant s + t_2 \leqslant \ldots \leqslant s + t_n$, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są borelowskie oraz

$$\varphi(x) = \mathbb{P}^x(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \ldots, X_{t_n} \in B_n).$$

Wskazówka: wykorzystaj opis rozkładów skończenie wymiarowych X_t przy pomocy prawdopodobieństwa przejścia.

Rozwiązania

(1) Rodzina zdarzeń E takich, że $\mathbb{E}(\mathbb{1}_E X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_E Y)$ jest λ-układem (zawiera Ω, jest zamknięta ze względu na branie różnic zdarzeń oraz przeliczalne sumy rozłącznych zdarzeń), która zawiera π-układ $\mathscr{F}_0$. Na mocy lematu Dynkina zawiera ona $\sigma(\mathscr{F}_0) = \mathscr{F}$. Z definicji warunkowej wartości oczekiwanej oznacza to, że jeśli Y jest mierzalna względem $\mathscr{F}$, to $Y = \mathbb{E}(X|\mathscr{F})$.

(2) Rozważmy wpierw przypadek, gdy zmienna Y przyjmuje przeliczalnie wiele wartości $y_1, y_2, \ldots$. Wówczas zdarzenia $E_n = \{Y = y_n\}$ są mierzalne względem $\sigma(Z)$, a więc są postaci $\{Z \in A_n\}$ dla pewnych zbiorów borelowskich A_n. Niech A oznacza sumę wszystkich zbiorów $A_n \cap A_m$, gdzie $n \neq m$, i niech $B_n = A_n \setminus A$ dla $n > 1$, $B_1 = \mathscr{X} \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \ldots)$. Określmy $\varphi(z) = y$ dla $z \in B_n$.

Z definicji wszystkie zbiory B_n są parami rozłączne. Zachodzi ponadto $E_n = \{Z \in B_n\}$. W istocie, gdy $n > 1$, to oczywiście $E_n \supseteq \{Z \in B_n\}$. Gdyby jednak $\omega \in E_n \setminus \{Z \in B_n\}$, to $Z(\omega) \in A_n \cap A_m$ dla pewnego $m \neq n$, czyli $Y(\omega) = y_n$ oraz $Y(\omega) = y_m$, sprzeczność. Zatem w istocie $E_n = \{Z \in B_n\}$. Dla $n = 1$ z kolei $E_1 = \Omega \setminus (E_2 \cup E_3 \cup \ldots) = \{Z \in \mathscr{X} \setminus (B_2 \cup B_3 \cup \ldots)\} = \{Z \in B_1\}$.

Oznacza to, że φ jest poprawnie określona, borelowska oraz $Y = \varphi(Z)$.

W przypadku ogólnych zmiennych losowych Y należy rozważyć zmienne Y_k przyjmujące przeliczalnie wiele wartości i zbieżne do Y. Z pierwszej części rozwiązania wiemy, że $Y_k = \varphi_k(Z)$ dla pewnych funkcji borelowskich φ_k skonstruowanych powyżej. Określmy $\varphi(z) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(z)$ gdy ta granica istnieje oraz $\varphi(z) = y_0$ w przeciwnym przypadku, gdzie $y_0 \in \mathscr{X}$ jest dowolnie wybranym punktem. Oczywiście $Y = \lim_{k\to\infty} Y_k = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(Z)$, zatem Y przyjmuje wartości tylko w tym zbiorze, w którym granica istnieje. A to oznacza, że $Y = \varphi(Z)$. (Uwaga: zbiór wartości Y może nie być borelowski!)

(3) Warunek (a) oznacza, że $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(Z_1,Z_2,\ldots,Z_n)\in B} Y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(Z_1,Z_2,\ldots,Z_n)\in B} X)$ dla wszystkich zbiorów borelowskich B i wynika z (b) przez lemat Dynkina o π-λ-układach. Warunek (b) oczywiście wynika z (c), który jest szczególnym przypadkiem (d). Z kolei (d) wynika z (a) przez indukcję miarową.

(4) Zachodzi $\|\mathbb{E}(X|\mathscr{F})\| = \mathbb{E}(|\mathbb{E}(X|\mathscr{F})|) \leqslant \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X|\,|\mathscr{F})) = \mathbb{E}|X| = \|X\|$.

(5) Wystarczy zauważyć, że $\tilde{X}_t(\tilde{\omega}) - x = X_t(\omega)$ gdy $\tilde{\omega} = (\omega, x)$, co oznacza, że proces $\tilde{X}_t - x$ z miarą $\mathbb{P}^x$ jest obrazem procesu X_t z miarą $\mathbb{P}$ przez odwzorowanie $\omega \mapsto (\omega, x)$.

(6) Wektor $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ jest obrazem wektora $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ przez przekształcenie liniowe (co łatwo wykazać indukcyjnie), ma więc rozkład normalny o średnich 0 i jest niezależny od ξ_{n+1}. Starannym rachunkiem łatwo wykazać (indukcyjnie), że $\mathbb{E}(X_{t_m} X_{t_n}) = 2\min\{t_m, t_n\}$. Stąd już wynika, że X_t jest procesem o niezależnych przyrostach i ponadto X_t ma rozkład normalny o średniej 0 i wariancji $2t$.

(7) Przypuśćmy, że $1 \leqslant k \leqslant n$. Ze względu na symetrię rozkładu $X_n - X_k$, zachodzi $\mathbb{P}(X_n \geqslant X_k) \geqslant \frac{1}{2}$. Ponadto zmienna $X_n - X_k$ jest niezależna od $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Wobec tego

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_1 \leqslant x, X_2 \leqslant x, \ldots, X_k > x, X_n > x) \\
&\qquad \geqslant \mathbb{P}(X_1 \leqslant x, X_2 \leqslant x, \ldots, X_k > x, X_n \geqslant X_k) \\
&\qquad \geqslant \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(X_1 \leqslant x, X_2 \leqslant x, \ldots, X_k > x).
\end{aligned}$$

Sumując stronami powyższe nierówności dla $k = 1, 2, \ldots, n$, otrzymujemy

$$\mathbb{P}(X_n > x) \geqslant \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} > x).$$

Stosując tę nierówność do X_k oraz do $-X_k$, otrzymujemy dwodzoną własność $\mathbb{P}(|X_n| > x) \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{P}(\max\{|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|\} > x)$.

(8) Należy uzasadnić poszczególne nierówności. Aby udowodnić pierwszą, przypuśćmy, że $|X_{s+t} - X_s| > x$ dla pewnych $s \in [0, N) \cap \mathbb{Q}$ oraz $t \in (0, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}$. Niech $j = \lfloor nt \rfloor \in \{0, 1, \ldots, Nn - 1\}$. Wtedy $|X_{s+t} - X_s| \leqslant |X_{s+t} - X_{j/n}| + |X_s - X_{j/n}|$, zatem któraś z liczb $|X_{s+t} - X_{j/n}|$ oraz $|X_s - X_{j/n}|$ musi być większa od $\frac{x}{2}$. Ponadto $s + t < \frac{j}{n} + \frac{2}{n}$. Oznacza to, że istnieje $\tilde{t} \in (0, \frac{2}{n}) \cap \mathbb{Q}$ (równe $s - \frac{j}{n}$ lub $s + t - \frac{j}{n}$) takie $|X_{j/n+t} - X_{j/n}| > \frac{x}{2}$. . Druga nierówność to oszacowanie prawdopodobieństwa sumy zdarzeń przez sumę prawdopodobieństw i wykorzystanie jednorodności w czasie przyrostów procesu: rodzina $(X_{j/n+s} - X_{j/n} : s \in (0, \frac{2}{n}) \cap \mathbb{Q})$ ma ten sam rozkład, co rodzina $(X_s : s \in (0, \frac{2}{n}) \cap \mathbb{Q})$. (Jest tu drobna subtelność: wiemy to dla skończonych podrodzin; rozszerzenie tego na rodzinę przeliczalną to wniosek z lematu Dynkina o π-λ-układach i definicji σ-ciała produktowego jako najmniejszego σ-ciała zawierającego zbiory cylindryczne).

Trzecia nierówność wynika z poprzedniego zadania przez odpowiednie przejście graniczne:

$$\begin{aligned}
&\{\sup\{|X_s| : s \in (0, \tfrac{2}{n}) \cap \mathbb{Q}\} > x\} \\
&\quad = \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\sup\{|X_{j/k!}| : j \in \{1, 2, \ldots, 2k!/n\}\} > x\}
\end{aligned}$$

i suma po prawej stronie jest wstępująca, zatem

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\sup\{|X_s| : s \in (0, \tfrac{2}{n}) \cap \mathbb{Q}\} > x) \\
&\quad = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(\sup\{|X_{j/k!}| : j \in \{1, 2, \ldots, 2k!/n\}\} > x) \\
&\quad \geqslant \lim_{k\to\infty} 2\mathbb{P}(|X_{2/n}| > \tfrac{x}{2}) = 2\mathbb{P}(|X_{2/n}| > \tfrac{x}{2}).
\end{aligned}$$

Wreszcie zbieżność do zera to konsekwencja oszacowania

$$\mathbb{P}(|X_{2/n}| > \tfrac{x}{2}) \leqslant (\tfrac{2}{x})^4 \mathbb{E}((X_{2/n})^4) = (\tfrac{2}{x})^4 \cdot 3 \cdot (\tfrac{2}{n})^2.$$

Oznacza to, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie X_t są jednostajnie ciągłe na każdym przedziale $[0, N) \cap \mathbb{Q}$. Skoro tak, rozszerzają się one do funkcji ciągłych na $[0, \infty)$.

(9) Każdy wektor $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ (gdzie $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$) jest granicą analogicznych wektorów postaci $(X_{s_1}, X_{s_2}, \ldots, X_{s_n})$, gdzie $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{Q}$ (i $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n$). Oznacza to, że każdy wektor $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ ma wielowymiarowy rozkład normalny o zerowych średnich i odpowiednich kowariancjach: $\mathbb{E}(X_t X_s) = 2\min\{t, s\}$.

(10) Rozkład X_t jest wielowymiarowym rozkładem normalnym o średniej zero i macierzy kowariancji $2t\,\mathrm{Id}$. Ponadto X_t ma niezależne przyrosty i ciągłe trajektorie.

(11) Niech $q_j = r_j$ dla $j = 1, 2, \ldots, m$, $q_{m+1} = s$, $q_{m+1+j} = s + t_j$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$. Niech ponadto $A_1, A_2, \ldots, A_{m+n+1}$ będą dowolnymi zbiorami borelowskimi. Ze

wzoru na rozkłady skończenie wymiarowe wiadomo, że

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^x(X_{q_1} \in A_1, X_{q_2} \in A_2, \ldots, X_{q_{m+n+1}} \in A_{m+n+1}) \\
&= \int_{A_1} p_{q_1}(x, dx_1) \int_{A_2} p_{q_2-q_1}(x_1, dx_2) \ldots \\
&\qquad \ldots \int_{q_{m+n}} p_{q_{m+n}-q_{m+n-1}}(x_{m+n-1}, dx_{m+n}) p_{q_{m+n+1}-q_{m+n}}(x_{m+n}, A_{m+n+1}),
\end{aligned}$$

a z drugiej strony

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^x(\mathbb{1}_{X_{q_1} \in A_1, X_{q_2} \in A_2, \ldots, X_{q_{m+1}} \in A_{m+1}} \varphi(X_{q_{m+1}})) \\
&= \int_{A_1} p_{q_1}(x, dx_1) \int_{A_2} p_{q_2-q_1}(x_1, dx_2) \ldots \\
&\qquad \ldots \int_{A_m} p_{q_m-q_{m-1}}(x_{m-1}, dx_m) \int_{A_{m+1}} p_{q_{m+1}-q_m}(x_m, dx_{m+1}) \varphi(x_{m+1})
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = &\int_{A_{m+2}} p_{q_{m+2}-q_{m+1}}(x, dx_{m+2}) \int_{A_{m+3}} p_{q_{m+3}-q_{m+2}}(x_{m+2}, dx_{m+3}) \ldots \\
&\qquad \ldots \int_{A_{m+n}} p_{q_{m+n}-q_{m+n-1}}(x_{m+n-1}, dx_{m+n}) p_{q_{m+n+1}-q_{m+n}}(x_{m+n}, A_{m+n+1}).
\end{aligned}$$

Pozostaje zauważyć, że to implikuje tezę.