Rosnącą rodzinę σ-ciał $\mathscr{F}_t$ ($t \in [0,\infty)$) na ustalonej przestrzeni Ω nazywamy *filtracją*. Określamy ponadto

$$\mathscr{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{s\in[0,\infty)} \mathscr{F}_s\right), \qquad \mathscr{F}_{t+} = \bigcap_{s\in(t,\infty]} \mathscr{F}_s, \qquad \mathscr{F}_{t-} = \sigma\left(\bigcup_{s\in[0,t)} \mathscr{F}_s\right).$$

Tu $\sigma(\mathscr{F})$ oznacza najmniejsze σ-ciało zbiorów, która zawiera $\mathscr{F}$. Mówimy, że filtracja $\mathscr{F}_t$ jest *prawostronnie ciągła*, jeśli $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$. Analogicznie definiujemy pojęcie filtracji *lewostronnie ciągłej*. Jeśli X_t jest rodziną zmiennych losowych, to filtracja zdefiniowana wzorami

$$\begin{cases} \mathscr{F}_t = \sigma\{X_s : s \in [0,t]\} & \text{dla } t \in [0,\infty), \\ \mathscr{F}_\infty = \sigma\{X_s : s \in [0,\infty)\}, \end{cases}$$

nazywana jest *filtracją naturalną* procesu X_t. Tu $\sigma\{X_s : s \in [0,t]\}$ oznacza σ-ciało generowane przez zmienne X_s, $s \in [0,t]$, czyli najmniejsze σ-ciało, względem którego zmienne te są mierzalne; równoważnie, jest to σ-ciało generowane przez zdarzenia $\{X_s \in B\}$, gdzie $s \in [0,t]$ oraz B jest borelowski.

(1) Sprawdź, że $\mathscr{F}_{t+}$ oraz $\mathscr{F}_{t-}$ też są filtracjami, przy czym F_{t+} jest prawostronnie ciągła, natomiast $\mathscr{F}_{t-}$ jest lewostronnie ciągła. Sprawdź ponadto, że $\mathscr{F}_{t+} = (\mathscr{F}_{t-})_+$ oraz $\mathscr{F}_{t-} = (\mathscr{F}_{t+})_-$.

(2) Niech $\Omega = [0,\infty)$ i niech $\mathscr{F}$ będzie σ-ciałem zbiorów borelowskich na Ω. Sprawdź, że rodzina $\mathscr{F}_t = \{E \in \mathscr{F} : [t,\infty) \subseteq E \text{ lub } E \cap [t,\infty) = \varnothing\}$ jest filtracją. Wyznacz $\mathscr{F}_{t+}$ oraz $\mathscr{F}_{t-}$.

(3) Wskaż proces X_t, dla którego $\mathscr{F}_t$ z poprzedniego zadania jest naturalną filtracją.
Wskazówka: Proces X_t powinien być stały dla $t \geqslant \omega$.

(4) Niech $\Omega = [0,\infty)$ i niech $\mathscr{F}$ będzie σ-ciałem zbiorów borelowskich na Ω. Wykonaj poprzednie zadanie dla rodziny $\mathscr{F}_t = \{E \in \mathscr{F} : (t,\infty) \subseteq E \text{ lub } E \cap (t,\infty) = \varnothing\}$.

(5) Wskaż rodzinę prawdopodobieństw $\mathbb{P}^x$ i proces X_t mający własność Markowa, dla których $\mathscr{F}_t$ z poprzedniego zadania jest naturalną filtracją.
Wskazówka: Rozwiązaniem jest łańcuch Markowa z czasem ciągłym o dwóch stanach, z których jeden jest pochłaniający.

(6) Czy można wykonać poprzednie zadanie dla filtracji z zadania 2? Czy odpowiedź się zmieni, jeśli zastąpimy $\mathscr{F}_0$ przez $\mathscr{F}_{0+}$?

(7) Opisz filtrację naturalną (deterministycznego) procesu $X_t = X_0 + t$.

Mówimy, że zmienna losowa τ o wartościach w $[0,\infty]$ jest $(\mathscr{F}_t)$-*czasem Markowa*, jeśli $\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$ dla wszystkich $t \geqslant 0$. Jeśli τ jest $(\mathscr{F}_{t+})$-czasem Markowa, to mówimy po prostu, że τ jest *czasem Markowa*. Ponadto określamy

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_\tau &= \{E \in \mathscr{F}_\infty : E \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t \text{ dla } t \geqslant 0\}, \\ \mathscr{F}_{\tau+} &= \{E \in \mathscr{F}_\infty : E \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_{t+} \text{ dla } t \geqslant 0\}, \\ \mathscr{F}_{\tau-} &= \sigma\{E \cap \{\tau > t\} : t \geqslant 0,\, E \in \mathscr{F}_t\} \end{aligned}$$

(definicja $\mathscr{F}_\tau$ ma sens dla $(\mathscr{F}_t)$-czasów Markowa, $\mathscr{F}_{\tau+}$ jest σ-ciałem dla wszystkich czasów Markowa, definicja $\mathscr{F}_{\tau-}$ ma sens dla dowolnych τ, ale w praktyce stosuje się ją tylko dla czasów Markowa).

(8) Sprawdź, że jeśli τ jest $(\mathscr{F}_t)$-czasem Markowa, to $\{\tau < t\}, \{\tau = t\} \in \mathscr{F}_t$.

(9) Sprawdź, że

$$\mathscr{F}_{\tau+} = \{E \in \mathscr{F}_\infty : E \cap \{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t \text{ dla } t \geqslant 0\}.$$

(10) Sprawdź, że czas deterministyczny (tj. $\tau = t$) jest $(\mathscr{F}_t)$-czasem Markowa.

(11) Sprawdź, że jeśli $\mathscr{F}_t$ jest naturalną filtracją procesu X_t, zaś τ czasem Markowa, to $\mathscr{F}_{\tau-}$ jest σ-ciałem generowanym przez zbiory postaci

$$\{X_{t_1} \in A_1,\, X_{t_2} \in A_2,\, ...,\, X_{t_n} \in A_n,\, \tau > t_n\},$$

gdzie A_1, ..., A_n są zbiorami borelowskimi oraz $0 \leqslant t_1 < ... < t_n$. Sprawdź ponadto, że rodzina powyższych zbiorów jest π-układem.

(12) Sprawdź, że $\mathscr{F}_\tau$ i $\mathscr{F}_{\tau+}$ są σ-ciałami dla odpowiednich czasów τ.

(13) Sprawdź, że $\mathscr{F}_{\tau-} \subseteq \mathscr{F}_{\tau+}$ dla czasów Markowa oraz $\mathscr{F}_{\tau-} \subseteq \mathscr{F}_\tau \subseteq \mathscr{F}_{\tau+}$ dla $(\mathscr{F}_t)$-czasów Markowa.

(14) Sprawdź, że jeśli $\tau = t$ jest czasem deterministycznym, to $\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_t$, $\mathscr{F}_{\tau+} = \mathscr{F}_{t+}$ oraz $\mathscr{F}_{\tau-} = \mathscr{F}_{t-}$.

(15) Udowodnij, że jeśli σ i τ są czasami Markowa, to $\sigma + \tau$ jest czasem Markowa.

(16) Udowodnij, że jeśli τ_n to ciąg czasów Markowa, to $\sup \tau_n$, $\inf \tau_n$, $\limsup \tau_n$ oraz $\liminf \tau_n$ są czasami Markowa.

(17) Sprawdź, że jeśli σ i τ są czasami Markowa oraz $\sigma \leqslant \tau$, to $\mathscr{F}_{\sigma-} \subseteq \mathscr{F}_{\tau-}$.

(18) Udowodnij, że jeśli σ i τ są czasami Markowa oraz $\sigma < \tau$, to $\mathscr{F}_{\sigma+} \subseteq \mathscr{F}_{\tau-}$. Ogólniej, jeśli σ i τ są czasami Markowa, $\sigma \leqslant \tau$ oraz $\sigma < \tau$ gdy $\sigma > 0$, $\tau < \infty$, to $\mathscr{F}_{\sigma+} \subseteq \sigma(\mathscr{F}_{\tau-} \cup \mathscr{F}_{0+})$.

Rozwiązania

(1) Po pierwsze, $\mathscr{F}_{t+}$ i $\mathscr{F}_{t-}$ są σ-ciałami (jako przekrój σ-ciał i wprost z definicji). Są to filtracje, bowiem rodziny $\mathscr{F}_{t+}$ i $\mathscr{F}_{t-}$ rosną wraz z t (niezależnie od tego, jak zdefiniujemy $\mathscr{F}_{0-}$ — czy jako σ-ciało trywialne, czy jako równe $\mathscr{F}_0$). Z definicji przekroju

$$(\mathscr{F}_{t+})_+ = \bigcap_{s\in(t,\infty]} \bigcap_{r\in(s,\infty]} \mathscr{F}_r = \bigcap_{r\in(t,\infty]} \mathscr{F}_r = \mathscr{F}_{t+}.$$

Analogicznie

$$(\mathscr{F}_{t-})_- = \sigma\left(\bigcup_{s\in[0,t)} \sigma\left(\bigcup_{r\in[0,s)} \mathscr{F}_r\right) \supseteq \sigma\left(\bigcup_{r\in[0,t)} \mathscr{F}_r\right)\right) = \mathscr{F}_{t-} \supseteq (\mathscr{F}_{t-})_-.$$

Dowodzi to odpowiedniej ciągłości $\mathscr{F}_{t+}$ i $\mathscr{F}_{t-}$. (Podobnie można udowodnić, że $(\mathscr{F}_{t+})_- = \mathscr{F}_{t-}$ oraz $(\mathscr{F}_{t-})_+ = \mathscr{F}_{t+}$).

(2) Z definicji rodzina $\mathscr{F}_t$ rośnie z t, ponadto $\mathscr{F}_t$ jest σ-ciałem (zbiór pusty należy do $\mathscr{F}_t$; jeśli $[t,\infty) \subseteq E$, to E^c jest rozłączny z $[t,\infty)$ i odwrotnie; suma przeliczalnie wielu zbiorów albo zawiera $[t,\infty)$ w całości, albo jest z nim rozłączna, bowiem wszystkie składniki mają taką własność).

Zbiór borelowski E należy do $\mathscr{F}_{t+}$ wtedy i tylko wtedy, gdy albo E zawiera $[t+\varepsilon,\infty)$ dla wszystkich $\varepsilon > 0$ (czyli zawiera (t,∞), albo dla pewnego $\varepsilon_0 > 0$ zbiory E i $[t+\varepsilon_0,\infty)$ są rozłączne. W drugim przypadku E nie zawiera w całości żadnego ze zbiorów $[t+\varepsilon,\infty)$ dla żadnego $\varepsilon > 0$, czyli E jest rozłączny z (t,∞). Do daje odpowiedź na pytanie o $\mathscr{F}_{t+}$: jest to klasa zbiorów E, które albo są rozłączne z (t,∞). albo ten zbiór zawierają.

Przypuśćmy teraz, że $E \in \mathscr{F}_t$. Jeśli E jest rozłączny z $[t,\infty)$, to E jest sumą zbiorów $E\cap[0,s)$, gdzie $s \in [0,t)\cap\mathbb{Q}$. Skoro $E\cap[0,s) \in \mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_{t-}$ dla dowolnego $s \in [0,t)$, zachodzi $E \in \mathscr{F}_{t-}$. Analogicznie jeśli E zawiera $[t,\infty)$, to E jest przekrojem zbiorów $E \cup [s,\infty)$ dla $s \in [0,t)\cap\mathbb{Q}$, a zbiory te są w $\mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t$.

(3) Jak łatwo stwierdzić, proces $X_t = \min(\omega, t)$ spełnia wszystkie założenia: $X_t^{-1}(A) = A$ gdy $A \cap [t,\infty) = \varnothing$ oraz $X_t^{-1}(A) = A \cup [t,\infty)$ w przeciwnym przypadku.

(4) Odpowiedzią może być $X_t = \omega$ gdy $\omega \leqslant t$, $X_t = \infty$ w przeciwnym przypadku. Wówczas $X_t^{-1}(A) = A \cap [0,t]$ gdy $\infty \notin A$ oraz $X_t^{-1}(A) = A \cup (t,\infty)$ gdy $\infty \in A$.

(5) Wystarczy uprościć odpowiedź do poprzedniego zadania w następujący sposób. Niech $X_t = 0$ gdy $\omega \leqslant t$, $X_t = 1$ w przeciwnym przypadku, czyli $X_t = \mathbb{1}_{[0,\omega)}(t)$. Niech $\mathbb{P}^0 = \delta_0$ i niech $\mathbb{P}^1$ będzie miarą o gęstości $e^{-\omega}$ na $(0,\infty)$. Wtedy $\mathscr{F}_t$ jest generowana przez zbiory $X_s^{-1}(\{0\}) = [0,s)$ dla $s \in [0,t]$. Ponadto, jak łatwo sprawdzić, X_t jest procesem Markowa (łańcuchem Markowa z czasem ciągłym), o prawdopodobieństwie przejścia $p_t(0,dy) = \delta_0(dy)$, $p_t(1,d) = (1-e^{-t})\delta_0(dy) + e^{-t}\delta_1(dy)$.

(6) Taki proces nie istnieje: musiałby mieć co najmniej dwa stany $x \neq y$ i w takim razie zmienna losowa X_0 musiałaby przyjmować co najmniej dwie wartości ($\mathbb{P}^x(X_0 = x) = 1$, $\mathbb{P}^y(X_0 = y) = 1$). Ale $\mathscr{F}_0$ jest σ-ciałem trywialnym.

Gdyby jednak zastąpić $\mathscr{F}_0$ przez $\mathscr{F}_{0+}$ to rozwiązaniem jest lewostronnie ciągła wersja procesu z poprzedniego zadania: $X_t = \mathbb{1}_{[0,\omega]}(t)$ dla $\omega > 0$, $X_t = 0$ dla $\omega = 0$; szczegóły pomijamy.

(7) Jest ona niezmienna w czasie: $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_0 = \sigma(X_0)$, bowiem $\sigma(X_t) = \sigma(X_0)$ dla każdego $t > 0$. Ciekawa uwaga: można określić $\Omega = \mathbb{R}$, $X_t(\omega) = \omega + t$, $\mathbb{P}^x = \delta_x$, przy czym na Ω można rozważać σ-ciało *wszystkich* podzbiorów $\mathbb{R}$. Takiego procesu nie można wystartować z rozkładu jednostajnego na ustalonym przedziale!

(8) Zachodzi $\{\tau < t\} = \bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap(0,t)}\{\tau \leqslant s\}$ oraz $\{\tau = t\} = \{\tau \leqslant t\} \setminus \{\tau < t\}$.

(9) Z jednej strony zachodzi $E \cap \{\tau < t\} = \bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap(0,t)}(E \cap \{\tau \leqslant s\})$, z drugiej zaś $E \cap \{\tau \leqslant t\} = \bigcap_{s\in\mathbb{Q}\cap(t,\infty)}(E \cap \{\tau < s\})$.

(10) Zdarzenie $\{\tau \leqslant s\}$ jest równe albo Ω, albo $\varnothing$, więc jest mierzalne względem dowolnego σ-ciała.

(11) Omawiane zdarzenia oczywiście należą do $\mathscr{F}_{\tau-}$. Niech $\tilde{\mathscr{F}}$ oznacza σ-ciało generowane przez takie zbiory; wiemy już więc, że $\tilde{\mathscr{F}} \subseteq \mathscr{F}_{\tau-}$. Rodzina zdarzeń E takich, że $E \cap \{\tau > t\} \in \tilde{\mathscr{F}}$, jest λ-układem, który zawiera π-układ zbiorów postaci $\{X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \ldots, X_{t_n} \in A_n\}$, gdzie $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant t$; rodzina ta zawiera więc $\mathscr{F}_t$. Oznacza to, że $\tilde{F}$ zawiera wszystkie zbiory postaci $E \cap \{\tau > t\}$, gdzie $E \in \mathscr{F}_t$. Stąd już wynika, że $\mathscr{F}_{\tau-} \subseteq \tilde{\mathscr{F}}$.

Jak łatwo sprawdzić, omawiana w zadaniu rodzina jest zamknięta na przekroje, a więc jest π-układem.

(12) Niech τ będzie $\mathscr{F}_t$-czasem Markowa. Z definicji $\Omega \in \mathscr{F}_\tau$, bowiem $\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$. Podobnie jeśli $E \in \mathscr{F}_\tau$, to $\Omega \setminus E \in \mathscr{F}_\tau$ — zachodzi bowiem $(\Omega \setminus E) \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\tau \leqslant t\} \setminus (E \cap \{\tau \leqslant t\}) \in \mathscr{F}_t)$. Analogicznie jeśli $E_n \in \mathscr{F}_\tau$, to $\bigcup_n E_n \in \mathscr{F}_\tau$, ponieważ $(\bigcup_n E_n) \cap \{\tau \leqslant t\} = \bigcup_n (E_n \cap \{\tau \leqslant t\}) \in \mathscr{F}_t$. To dowodzi, że $\mathscr{F}_\tau$ jest σ-ciałem. Druga część zadania (dotycząca $\mathscr{F}_{\tau+}$) jest analogiczna.

(13) Niech τ będzie $\mathscr{F}_t$-czasem Markowa. Zauważmy, że $(E \cap \{\tau > s\}) \cap \{\tau \leqslant t\} = (E \cap \{\tau \leqslant t\}) \cap \{\tau > s\} \in \mathscr{F}_t$: gdy $s \geqslant t$, rozważane zdarzenie jest puste, gdy zaś $s < t$, to $\{\tau > s\} \in \mathscr{F}_t$. Wobec tego $\mathscr{F}_{\tau-} \subseteq \mathscr{F}_\tau$. Zawieranie $\mathscr{F}_\tau \subseteq \mathscr{F}_{\tau+}$ jest oczywiste. Gdy τ jest czasem Markowa, dowód zawierania $\mathscr{F}_{\tau-} \subseteq \mathscr{F}_{\tau+}$ jest analogiczny.

(14) Zdarzenie $E \cap \{\tau \leqslant s\}$ jest równe E gdy $s \geqslant t$ oraz jest puste gdy $s < t$. Zatem $\mathscr{F}_\tau$ jest klasą zdarzeń E takich, że $E \in \mathscr{F}_s$ gdy $s \geqslant t$. To oznacza, że $\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_t$. Analogicznie dowodzi się, że $\mathscr{F}_{\tau+} = \mathscr{F}_{t+}$. Wreszcie zdarzenia generujące $\mathscr{F}_{\tau-}$ są postaci $\{X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \ldots, X_{t_n} \in A_n\}$, gdzie $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$. Stąd oczywicie wynika równość $\mathscr{F}_{\tau-} = \mathscr{F}_{t-}$.

(15) Zachodzi $\{\sigma + \tau < t\} = \bigcup_{s\in(0,t)\cap\mathbb{Q}}(\{\sigma < s\} \cap \{\tau < t - s\}) \in \mathscr{F}_t$.

(16) Zachodzi $\{\sup \tau_n \leqslant t\} = \bigcap\{\tau_n \leqslant t\} \in \mathscr{F}_{t+}$ oraz $\{\inf \tau_n < t\} = \bigcup\{\tau_n < t\} \in \mathscr{F}_t$, zatem $\sup \tau_n$ oraz $\inf \tau_n$ są czasami Markowa. Pozostaje zauważyć, że $\liminf \tau_n$ oraz $\limsup \tau_n$ wyrażają się przez infima i suprema.

(17) Jeśli $E \in \mathscr{F}_t$, to $\{\sigma > t\} \in \mathscr{F}_{t+}$, a więc

$$E \cap \{\sigma > t\} = \bigcup_{s\in(t,\infty)\cap\mathbb{Q}} (E \cap \{\sigma > t\}) \cap \{\tau > s\} \in \mathscr{F}_{\tau-}.$$

(18) Jeśli $E \in \mathscr{F}_{\sigma+}$, to $E \cap \{\sigma < t\} \in \mathscr{F}_t$, a więc $E \cap \{\sigma < t\} \cap \{\tau > t\} \in \mathscr{F}_{\tau-}$. Wobec tego

$$E \cap \{\sigma < \tau\} = \bigcup_{s\in[0,\infty)\cap\mathbb{Q}} (E \cap \{\sigma < t\} \cap \{\tau > t\} \in \mathscr{F}_{\tau-}.$$

Ponadto $E \cap \{\sigma = 0\} \in \mathscr{F}_{0+}$ oraz $\{\tau = 0\} \in \mathscr{F}_{0+}$, więc

$$E \cap \{\tau = 0\} = (E \cap \{\sigma = 0\}) \cap \{\tau = 0\} \in \mathscr{F}_{0+}.$$

Wreszcie $\{\tau = \infty\} =\in \mathscr{F}_{\tau-}$

$$E \cap \{\tau = \infty\} = \bigcap_{t \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q}} (E \cap \{\sigma < t\}) \cap \{\tau > t\} \in \mathscr{F}_{\tau-}.$$

Pozostaje zauważyć, że przy naszych założeniach zawsze zachodzi jedno ze zdarzeń $\{\sigma < \tau\}$, $\{\tau = 0\}$ lub $\{\tau = \infty\}$.