Teoria potencjału procesów Markowa — lista zadań nr 4

Niech $\mathscr{X}$ będzie lokalnie zwartą ośrodkową metryzowalną przestrzenią topologiczną, zaś $\mathscr{X}_\infty = \mathscr{X} \cup \{\infty\}$ jej jednopunktowym uzwarceniem: w $\mathscr{X}_\infty$ zbiór G jest otwarty, jeśli nie zawiera ∞ i jest otwarty w $\mathscr{X}$ lub jeśli zawiera ∞ i $\mathscr{X} \setminus G$ jest zwarty w $\mathscr{X}$.

Definiujemy $C_c(\mathscr{X})$ jako zbiór funkcji ciągłych równych zero poza pewnym zbiorem zwartym w $\mathscr{X}$ oraz $C_0(\mathscr{X})$ jako domknięcie $C_c(\mathscr{X})$ w topologii zbieżności jednostajnej na $\mathscr{X}$.

(1) Udowodnij, że $\mathscr{X}_\infty$ jest ośrodkową przestrzenią zwartą.

(2) Udowodnij, że istnieje ciąg f_n funkcji klasy $C_0(\mathscr{X})$ taki, że dla dowolnych $x, y \in \mathscr{X}_\infty$, $x \neq y$, istnieje n takie, że $f_n(x) \neq f_n(y)$. Udowodnij, że dla dowolnego takiego ciągu wzór

$$d_\infty(x,y) = \sup\left\{\frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{2^n \|f_n\|} : n = 1, 2, \ldots\right\}$$

określa metrykę na $\mathscr{X}_\infty$ ograniczoną przez 1 i zgodną z topologią X_∞.

(3) Wykaż, że funkcja

$$d_0(x,y) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{k} \frac{d_\infty(z_{j-1}, z_j)}{\min\{d_\infty(z_{j-1}, \infty), d_\infty(z_j, \infty)\}} : k \geqslant 1, z_0 = x, z_k = y\right\}$$

jest metryką na $\mathscr{X}$, która jest zgodna z topologią i w której domknięte kule są zwarte.

(4) Sprawdź, że funkcje ciągłe na $\mathscr{X}_\infty$ są postaci $a + f(x)$ dla $f \in C_0(\mathscr{X})$ (z konwencją $f(\infty) = 0$).

(5) Udowodnij, że każda skończona nieujemna miara borelowska μ na $\mathscr{X}$ jest wewnętrznie regularna, tj. dla wszystkich borelowskich A wielkość $\mu(A)$ jest równa supremum $\mu(K)$, gdzie K przebiega zwarte podzbiory A.

Rodzina jąder $p_t(x, A)$ nazywana jest *fellerowskim prawdopodobieństwem przejścia* na $\mathscr{X}$, jeśli $p_0(x, A) = \delta_x(A)$, $p_{t+s} = p_t p_s$, $p_t(x, \cdot)$ jest miarą podprobabilistyczną na $\mathscr{X}$, $p_t f(x) = \int p_t(x, dy) f(y)$ jest klasy $C_0(\mathscr{X})$ dla każdego $f \in C_0(\mathscr{X})$ i ponadto $p_t f$ dąży do f jednostajnie gdy $t \to 0^+$.

Proces X_t jest *procesem Fellera*, jeśli jest procesem Markowa o fellerowskich prawdopodobieństwach przejścia.

(6) Wykaż, że rozszerzenie fellerowskiego prawdopodobieństwa przejścia p_t na $\mathscr{X}_\infty$ (dane wzorami $p_t(x, \{\infty\}) = 1 - p_t(x, \mathscr{X})$, $p_t(\infty, A) = \delta_\infty(A)$) jest fellerowskim prawdopodobieństwem przejścia

(7) Przypuśćmy, że T jest przeliczalny i gęsty w $[0, \infty)$, zaś proces Markowa X_t ($t \in T$) ma fellerowskie prawdopodobieństwa przejścia p_t oraz jednostronne granice w każdej chwili $t \geqslant 0$. Niech $Y_t = X_{t+}$ dla $t > 0$. Uzasadnij, że z prawdopodobieństwem 1 proces Y_t jest prawostronnie ciągły, ma lewostronne granice i jest procesem Markowa z prawdopodobieństwami przejścia p_t.

Rozważmy jądro $\nu(x, A)$ na $\mathscr{X}$, spełniające $\nu(x, \{x\}) = 0$ dla każdego $x \in \mathscr{X}$. *Łańcuchem Markowa z czasem ciągłym* o intensywności skoków ν nazywamy proces $X_t = Y_{N(t)}$ na $\mathscr{X}_\infty$, w definicji którego:

- Y_n jest łańcuchem Markowa z czasem dyskretnym o prawdopodobieństwie przejścia $\nu(x, A)/\nu(x, \mathscr{X})$, przy czym $Y_\infty = \infty$;
- $N(t)$ jest procesem liczącym sygnały T_n;
- $T_0 = 0$ oraz $T_{n+1} = T_n + S_n/\nu(Y_n, \mathscr{X})$, gdzie S_n jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1, niezależnym też od procesu Y_n.

W przypadku, gdy $\nu(x, \mathscr{X})$ jest funkcją ograniczoną, mówimy, że X_t jest regularnym łańcuchem Markowa z czasem ciągłym.

(8) Sprawdź, że łańcuchy Markowa z czasem ciągłym na skończonej przestrzeni stanów są procesami Fellera. Powiąż prawdopodobieństwa przejścia $p_t(x, dy)$ łańcucha Markowa z jego macierzą przejścia.

(9) Podaj przykład nieregularnego łańcucha Markowa z czasem ciągłym na dyskretnej, przeliczalnej przestrzeni stanów, który nie jest procesem Fellera.

(10) Podaj przykład regularnego łańcucha Markowa z czasem ciągłym na dyskretnej, przeliczalnej przestrzeni stanów, który nie jest procesem Fellera.

(11) Podaj przykład nieregularnego łańcucha Markowa z czasem ciągłym na dyskretnej, przeliczalnej przestrzeni stanów, który jest procesem Fellera.

(12) Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, aby regularny łańcuch Markowa z czasem ciągłym był procesem Fellera.

(13) Przypomnij definicję procesu Poissona z intensywnością $K > 0$ i sprawdź, że jest to regularny łańcuch Markowa z czasem ciągłym, który jest procesem Fellera na zbiorze liczb naturalnych (z zerem).

Niech X_t, $t \in [0, \infty) \cap \mathbb{Q}$, będzie rodziną nieujemnych zmiennych losowych, $\mathscr{F}_t = \sigma\{X_s : s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}\}$. Mówimy, że X_t jest (nieujemnym) nadmartyngałem, jeśli $\mathbb{E}(X_{s+t}|\mathscr{F}_s) \leqslant X_s$ dla wszystkich $t, s \geqslant 0$.

Twierdzenie (lemat Dooba). Średnia łączna liczba przejść w górę (nieujemnego) nadmartyngału ze stanu poniżej a do stanu powyżej b nie przekracza $a/(b - a)$.

(14) Przypomnij dowód lematu Dooba.

(15) Udowodnij, że (nieujemny) nadmartyngał X_t, $t \in [0, \infty) \cap \mathbb{Q}$, ma z prawdopodobieństwem 1 granice jednostronne w każdej chwili $t \geqslant 0$.

(16) Udowodnij, że jeśli funkcja f określona na zbiorze nieujemnych liczb wymiernych ma granice jednostronne w każdym nieujemnym argumencie rzeczywistym, to wzór

$$g(t) = \lim_{\substack{s \to t^+ \\ s \in \mathbb{Q}}} f(s)$$

określa prawostronnie ciągłą funkcją na $[0, \infty)$ z lewostronnymi granicami w każdym punkcie $t \in (0, \infty)$.

Rozwiązania

(1) Zdefiniowana przez nas topologia na $\mathscr{X}_\infty$ w istocie jest topologią: suma zbiorów otwartych w $\mathscr{X}$ jest otwarta, a jeśli choć jeden z nich ma zwarte dopełnienie, to i dopełnienie sumy jest zwarte. Ośrodkiem w $\mathscr{X}_\infty$ jest oczywiście ośrodek w $\mathscr{X}$ powiększony o ∞. Rozważmy dowolne pokrycie $\mathscr{X}_\infty$ zbiorami otwartymi. Jeden ze zbiorów z pokrycia zawiera ∞ i jego dopełnienie jest zwarte w $\mathscr{X}$. Dopełnienie to zawiera się więc w sumie skończonej podrodziny pozostałych zbiorów z pokrycia.

(2) Szukanymi funkcjami są na przykład funkcje $f_n(x) = \min\{r_n - d(x, x_n), 0\}$, gdzie x_n to elementy ośrodka w $\mathscr{X}$, zaś r_n jest dobrane tak, że $\overline{B}(x_n, r_n)$ jest zwarta, lecz albo $2r_n > 1$, albo $\overline{B}(x_n, 2r_n)$ nie jest zwarta. Oczywiście funkcje te są ciągłe i mają zwarty nośnik, więc należą do $C_0(\mathscr{X})$.

Jeśli $x, y \in \mathscr{X}$, $x \neq y$, to istnieje $r > 0$ takie, że $3r < 1$, $2r < d(x, y)$ oraz $\overline{B}(x, 3r)$ jest zbiorem zwartym. W zbiorze $B(x, r)$ zawarty jest z kolei pewien element ośrodka x_n. Ponieważ $\overline{B}(x_n, 2r) \subseteq \overline{B}(x, 3r)$ jest zwarty, z pewnością $r_n \geqslant r$. W takim razie $r_n - d(x, x_n) > 0$, czyli $f_n(x) = r_n - d(x, x_n) > r_n - r$. Z kolei albo $f_n(y) = 0$, albo $f_n(y) = r_n - d(y, x_n) \leqslant r_n + d(x, x_n) - d(x, y) \leqslant r_n + r - 2r = r_n - r < f_n(x)$. W każdym razie $f_n(x) \neq f_n(y)$. Analogicznie postępujemy, gdy $y = \infty$.

Z definicji i założeń o funkcjach f_n wynika, że $0 \leqslant d_\infty(x, y) \leqslant 1$, $d_\infty(x, y) = d_\infty(y, x)$. Ponadto jeśli $d_\infty(x, y) = 0$, to $f_n(x) = f_n(y)$ dla wszystkich n, a więc $x = y$. Oczywiście zachodzi też $d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z) \leqslant d_\infty(x, z)$. Pozostaje wykazać zgodność d_∞ z topologią przestrzeni $\mathscr{X}_\infty$.

Kula $B_\infty(x, r)$ w metryce d_∞ to część wspólna zbiorów otwartych $A_n = \{y \in \mathscr{X}_\infty : |f_n(x) - f_n(y)| < 2^n r \|f_n\|\}$. Jeśli jednak $2^n r \geqslant 1$, to $A_n = \mathscr{X}_\infty$. Wobec tego $B_\infty(x, r)$ jest przekrojem skończonym zbiorów otwartych — a więc zbiorem otwartym.

Z drugiej strony niech $x \in \mathscr{X}_\infty$ i niech U będzie otoczeniem x. Zbiór $\mathscr{X}_\infty \setminus U$ jest zwarty i zawarty w sumie zbiorów otwartych $A_{n,k} = \{y \in \mathscr{X}_\infty : |f_n(y) - f_n(x)| > 2^{n-k}\|f_n\|\}$; suma ta wynosi bowiem $\mathscr{X}_\infty \setminus \{x\}$. Oznacza to, że $\mathscr{X}_\infty \setminus U$ jest zawarty w sumie skończonej liczby zbiorów $A_{n,k}$. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że jest to suma $A_{n,N}$ dla $n = 1, 2, \ldots, N$. Oznacza to, że U zawiera kulę $B_\infty(x, 2^{-N})$ w metryce d_∞.

(3) Łatwo sprawdzić, że d_0 w istocie jest metryką. Skoro d_∞ jest ograniczona przez 1, każdy składnik sumy w definicji d_0 to co najmniej $d_\infty(z_{j-1}, z_j)$. Stąd łatwo wynika, że $d_0(x, y) \geqslant d_\infty(x, y)$. Zbieżność w d_0 oznacza więc zbieżność w d_∞. Z drugiej strony w zbiorze $\mathscr{X}_\varepsilon = \{x \in \mathscr{X} : d_\infty(x, \infty) > \varepsilon\}$ zachodzi $d_0(x, y) \leqslant \varepsilon^{-1} d_\infty(x, y)$. Oznacza to, że jeśli x_n dąży do $x \in \mathscr{X}_\varepsilon$ w d_∞, to dąży do x w d_0. Ponieważ $\varepsilon > 0$ jest dowolny, zbieżność w d_0 jest równoważna zbieżności w d_∞ (do granicy w $\mathscr{X}$).

Wykażemy, że kule domknięte w d_0 są zwarte. W tym celu zauważmy, że

$$\frac{d_\infty(x, y)}{d_\infty(x, \infty) d_\infty(y, \infty)} \geqslant \frac{d_\infty(x, \infty) - d_\infty(y, \infty)}{d_\infty(x, \infty) d_\infty(x, \infty)} = \frac{1}{d_\infty(y, \infty)} - \frac{1}{d_\infty(x, \infty)},$$

skąd łatwo

$$d_0(x, y) \geqslant \frac{1}{d_\infty(y, \infty)} - \frac{1}{d_\infty(x, \infty)}.$$

W szczególności kula $\overline{B}_0(x,r)$ w metryce d_0 jest zawarta w $\mathscr{X}_\varepsilon = \mathscr{X} \setminus B_\infty(\infty, R)$, gdzie $r = \varepsilon^{-1} - (d_\infty(x,\infty))^{-1}$. Ponieważ zbieżność w d_0 jest równoważna zbieżności w d_∞ w $\mathscr{X}_\varepsilon$, kula domknięta $\overline{B}_0(x,r)$ jest zbiorem zwartym.

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

(10)

(11)

(12)

(13)

(14)

(15)

(16)