(1) Znajdź jądra λ-potencjału procesu Poissona z intensywnością $K > 0$ (na $\mathbb{N}$ lub na $\mathbb{R}$).

> *Złożonym procesem Poissona* nazywamy łańcuch Markowa z czasem ciągłym o wartościach w $\mathbb{R}^d$, którego intensywność skoków jest niezmiennicza na przesunięcia: $\nu(x, A) = \nu(A - x)$ dla pewnej miary ν. Proces taki jest postaci $X_t = Y_{N(t)}$, gdzie $N(t)$ jest procesem Poissona z intensywnością $\nu(\mathbb{R}^d)$, zaś Y_n jest błądzeniem losowym o przyrostach $Y_{n+1} - Y_n$ niezależnych i o jednakowym rozkładzie $\nu(A)/\nu(\mathbb{R}^d)$.

(2) Zapisz prawdopodobieństwa przejścia oraz jądra λ-potencjału złożonego procesu Poissona przy pomocy odpowiedniego szeregu, który zawiera n-krotne sploty miary ν ($\nu^{*0} = \delta_0$, $\nu^{*n} = \nu * \nu * ... * \nu$).

(3) Zapisz prawdopodobieństwa przejścia i jądra λ-potencjału dla dowolnego regularnego łańcucha Markowa z czasem ciągłym przy pomocy odpowiedniego szeregu, który zawiera n-krotne złożenia jądra $q(x, A) = \nu(x, A) - \nu(x, X)\delta_x(A)$:

$$q^0(x, A) = \delta_x(A), \qquad q^{n+1}(x, A) = \int_{\mathscr{X}} q^n(y, A) q(x, dy).$$

(4) Znajdź jądra λ-potencjału jednostajnego dryfu w prawo z prędkością 1.

(5) Znajdź transformatę Fouriera jądra λ-potencjału ruchu Browna w $\mathbb{R}^d$. Wyraź gęstość $u_\lambda(x, dy)$ przy pomocy odwrotnej transformaty Fouriera (wynik nie wyraża się przez funkcje elementarne, można go zapisać przy pomocy zmodyfikowanej funkcji Bessela drugiego rodzaju $K_{d/2-1}$).

(6) Wyraź jądra λ-potencjału procesu czasoprzestrzennego przy pomocy prawdopodobieństw przejścia wyjściowego procesu X_t.

> Niech B_t będzie d-wymiarowym ruchem Browna i niech $X_t = e^{-t} B_{(e^{2t}-1)/2}$. Proces X_t nazywany jest *procesem Ornsteina–Uhlenbecka.*

(7) Oczywiście proces Ornsteina–Uhlenbecka X_t ma ciągłe trajektorie i $\mathbb{P}^x(X_t = x) = 1$. Sprawdź, że X_t jest procesem Fellera, i wyznacz prawdopodobieństwa przejścia X_t.

(8) Wyznacz rozkład graniczny procesu Ornsteina–Uhlenbecka X_t gdy $t \to \infty$.

(9) Powyższa definicja procesu Ornsteina–Uhlenbecka jest dość sztuczna. Znajdź (w literaturze, w Internecie) inne definicje: przez stochastyczne równanie różniczkowe oraz przez odpowiednią całkę z ruchu Browna.

> Jeśli X_t jest procesem Fellera na $\mathscr{X}$, zaś μ nieujemną miarą na $\mathscr{X}$, to określamy $\mathbb{P}^\mu(E) = \int_{\mathscr{X}} \mathbb{P}^x(E)\mu(dx)$. Jeśli $\mathbb{P}^\mu(X_t \in A) = \mu(A)$, to μ nazywamy rozkładem stacjonarnym X_t.

(10) Niech X_t będzie ruchem Browna w $\mathbb{R}^d$, a μ — miarą Lebesgue'a na $\mathbb{R}^d$. Wyznacz $\mathbb{P}^\mu(X_t \in A)$ dla borelowskich A.

(11) Niech X_t będzie procesem Ornsteina–Uhlenbecka w $\mathbb{R}^d$, zaś μ standardowym rozkładem normalnym w $\mathbb{R}^d$. Znajdź $\mathbb{P}^\mu(X_t \in A)$.

(12) Niech B_t będzie d-wymiarowym ruchem Browna, niech $\mathbb{P} = \mathbb{P}^0$ i niech $X_t = e^{-t} B_{e^{2t}/2}$ dla $t \in \mathbb{R}$. Sprawdź, że X_t ma standardowy rozkład normalny dla

każdego $t \in \mathbb{R}$ oraz że X_t ma prawdopodobieństwa przejścia procesu Ornsteina–Uhlenbecka w $\mathbb{R}^d$.