Mówiąc *proces Fellera*, mamy zawsze na myśli *proces Fellera o regulowanych trajektoriach.*

(1) Niech X_t będzie procesem Fellera, $x \in \mathscr{X}$, $\tau_x = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \neq x\}$. Udowodnij, że możliwe są trzy scenariusze: (a) $\mathbb{P}^x(\tau_x = \infty) = 1$; (b) $\mathbb{P}^x(\tau_x = \infty) = 1$; (c) $\mathbb{P}^x(0 < \tau_x < \infty) = 1$ oraz τ_x ma rozkład wykładniczy. Udowodnij ponadto, że w ostatnim przypadku $\mathbb{P}^x(X_{\tau_x} \neq x) = 1$, tj. X_t ma w chwili τ_x skok.

(2) Przy założeniach poprzedniego zadania udowodnij, że następujące warunki są równoważne: (a) $\mathbb{P}^x(\tau_x = \infty) = 1$; (b) $p_t(x, \{x\}) = 1$ dla wszystkich $t > 0$; (c) $p_t(x, \{x\}) = 1$ dla prawie wszystkich $t > 0$; (d) $u_\lambda(x, \{x\}) = \frac{1}{\lambda}$ dla wszystkich $\lambda > 0$; (e) $p_{t_n}(x, \{x\}) = 1$ dla pewnego ciągu t_n zbieżnego do 0.

(3) Wskaż przykład procesu Fellera X_t, dla którego $p_t(x, \{x\}) = 1$ dla nieskończenie wielu $t > 0$, lecz mimo to $\mathbb{P}^x(\tau_x = 0) = 1$.

(4) Niech $\mathscr{X} = \mathbb{R}$, niech τ będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym i niech

$$X_t = \begin{cases} X_0 + t & \text{gdy } X_0 > 0 \text{ lub } t < -X_0, \\ 0 & \text{gdy } X_0 \leqslant 0,\ -X_0 \leqslant t \leqslant -X_0 + \tau, \\ X_0 + t - \tau & \text{gdy } X_0 \leqslant 0 \text{ oraz } t > -X_0 + \tau. \end{cases}$$

Proces X_t to zatem jednostajny ruch w prawo z postojem o długości τ w zerze. Wyznacz prawdopodobieństwo przejścia X_t i sprawdź, że X_t jest procesem Markowa o ciągłych trajektoriach. Sprawdź też, że prawdopodobieństwo przejścia X_t nie jest fellerowskie, X_t nie ma mocnej własności Markowa i nie spełnia tezy zadania (1).

(5) Proces z poprzedniego zadania można łatwo zmodyfikować, by uzyskać proces Fellera: wystarczy zastąpić 0 przez dwa punkty: 0^- oraz 0^+. Wtedy $\mathscr{X} = (-\infty, 0^-] \cup [0^+, \infty)$ (z naturalną topologią), zaś $\tilde{X}_t$ jest ruchem jednostajnym w prawo, który w 0^- zatrzymuje się na czas τ, a następnie skacze do 0^+. Proces X_t powstaje przez sklejenie punktów 0^- oraz 0^+. Podaj szczegóły tej konstrukcji. (Podobne rozszerzenie można uzyskać dla dość szerokiej klasy procesów Markowa, jest to tzw. uzwarcenie Raya–Knighta.)

Jeśli X_t jest procesem Fellera i $f \in C_0$, to *generator* dany jest wzorem

$$Lf(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\mathbb{E}^x f(X_t) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{p_t f(x) - f(x)}{t}$$

(ze zbieżnością jednostajną lub — równoważnie — punktową do funkcji z C_0). Dziedzinę tego operatora oznaczamy przez $\mathrm{dom}(L)$. Wzór Dynkina orzeka, że

$$\mathbb{E}^x f(X_\tau) = f(x) + \mathbb{E}^x \int_0^\tau Lf(X_s) ds$$

dla $f \in \mathrm{dom}(L)$ oraz dla czasów Markowa τ spełniających $\mathbb{E}^x \tau < \infty$. Z kolei *operator charakterystyczny Dynkina* (w wersji symetrycznej) dany jest wzorem

$$L_x f = \lim_{r \to 0^+} \frac{\mathbb{E}^x f(X_{\tau_{B(x,r)}}) - f(x)}{\mathbb{E}^x \tau_{B(x,r)}}.$$

Dziedziną L_x jest $\mathrm{dom}(L_x)$. Tutaj $\tau_D = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin D\}$ jest czasem wyjścia ze zbioru D.

(6) Niech X_t będzie jednowymiarowym ruchem Browna. Udowodnij, że jeśli f jest ograniczoną funkcją dwukrotnie różniczkowalną w x, to

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{p_t f(x) - f(x)}{t} = f''(x).$$

Wywnioskuj, że jeśli $f, f', f'' \in C_0$, to $f \in \mathrm{dom}(L)$ oraz $Lf(x) = f''(x)$, tj. $\frac{1}{t}(p_t f - f)$ dąży jednostajnie do f'' gdy $t \to 0^+$. Czy jeśli f, f', f'' są ciągłe i ograniczone, to $\frac{1}{t}(p_t f - f)$ dąży jednostajnie do f''?

(7) Uogólnij poprzednie zadanie tak: udowodnij, że generatorem ruchu Browna w $\mathbb{R}^d$ jest operator Laplace'a.

(8) Niech X_t będzie jednowymiarowym ruchem Browna oraz $D = (a, b)$. Wykorzystując w odpowiedni sposób wzór Dynkina, znajdź $\mathbb{P}^x(\tau_D = a)$, $\mathbb{P}^x(\tau_D = b)$ oraz $\mathbb{E}^x \tau_D$ dla $x \in D$.

(9) Znajdź analogicznie $\mathbb{E}^x \tau_D$, czyli średni czas wyjścia z kuli $D = B(0, r)$ ruchu Browna w $\mathbb{R}^d$.

(10) Niech X_t będzie jednowymiarowym ruchem Browna. Udowodnij, że jeśli $f \in \mathrm{dom}(L)$, to f jest dwukrotnie różniczkowalna i $Lf = f''$.

(11) Czy jeśli X_t jest wielowymiarowym ruchem Browna i $f \in \mathrm{dom}(L)$, to f musi być dwukrotnie różniczkowalna? (♠)

(12) Niech X_t będzie procesem Fellera, D zbiorem otwartym, zaś τ_D czasem wyjścia z D. Niech $f(x) = \mathbb{E}^x \tau_D$. Udowodnij, że $L_x f = -1$ dla $x \in D$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \in \mathscr{X} \setminus D$.

(13) Niech X_t będzie procesem Fellera, D zbiorem otwartym, zaś τ_D czasem wyjścia z D. Niech $f(x) = \mathbb{E}^x e^{-\lambda \tau_D}$. Udowodnij, że $L_x f = \lambda f(x)$ dla $x \in D$ oraz $f(x) = 1$ dla $x \in \mathscr{X}_\infty \setminus D$.