Lista 3

1. Pokaż, że jeśli $X_1, X_2, \ldots X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, to $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$.

2. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą zmiennymi losowymi iid o rozkładzie $X_i \sim U(0,1)$. Wyznacz dystrybuantę zmiennych losowych $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ oraz $Z = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

3. Udowodnij regułę 3-σ (trzech sigm): jeśli $Var\, X = \sigma^2 < \infty$ to $P(|X - EX| > 3\sigma) \leqslant \frac{1}{9}$.

4. Korzystając z 1. policz $Var\, X$, gdzie $X \sim B(n, p)$.

5. Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$. Wyznacz gęstość $X_1 + X_2$.

6. Wykorzystując odpowiednią nierówność, udowodnij słabe prawo wielkich liczb. Czyli, jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są zmiennymi losowymi iid o średniej μ i wariancji σ^2, to $\forall \varepsilon > 0$ zachodzi

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

7. Niech $X_1, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona $X_i \sim Pois(A)$, $i = 1, \ldots, 10$.

(i) wykorzystując nierówność Markowa znajdź oszacowanie górne dla $P(X_1 + \ldots + X_{10} \geqslant 15)$.

(ii) wykorzystując centralne twierdzenie graniczne znajdź przybliżoną wartość $P(X_1 + \ldots + X_{10} \geqslant 15)$.