Lista 5

1. Oblicz funkcje charakterystyczne rozkładów: dwumianowego, Poissona, wykładniczego, dwustronnego wykładniczego.

2. Wykaż, że jeśli $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ są funkcjami charakterystycznymi pewnych rozkładów ciągłych oraz $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, $p_i \geq 0$, to $\sum_{i=1}^{n} p_i \varphi_i$ też jest funkcją charakterystyczną.

3. Niech X będzie zmienną losową o gęstości $f(x)$ i funkcji charakterystycznej $\varphi(z)$. Funkcjami charakterystycznymi jakich zmiennych losowych są $\varphi^2(z)$ oraz $|\varphi(z)|^2$?

4. Pokaż, że jeśli X_n mają rozkład Poissona z parametrem λ_n oraz $\lambda_n \to \lambda > 0$, to $X_n \xrightarrow{d} X$, gdzie $X \sim Pois(\lambda)$.

5. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem iid o rozkładzie dwustronnym wykładniczym z gęstością $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Wykorzystując funkcje charakterystyczne pokaż, że $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

6. Wykorzystując funkcję charakterystyczną wyznacz pierwsze dwa momenty rozkładu Poissona

7. Pokaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{d} X$, $b_n \to b$ to $a X_n + b_n \xrightarrow{d} aX + b$.

8. Niech X ma gęstość $f(x)$ i funkcję charakterystyczną $\varphi(z)$, niech Y ma gęstość $g(x)$ i funkcję charakterystyczną $\psi(z)$. Wykaż tzw. Tożsamość Parsevala

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ist} \varphi(s) g(s)\, ds = \int_{\mathbb{R}} \psi(x-t) f(x)\, dx$$