Lista 8

① (a) $N(t)$ – proces Poissona z int. $\lambda > 0$.
Załóżmy, że każdy skok $N(t)$ jest klasyfikowany jako skok typu A z prawdopodobieństwem p i jako skok typu B z prawdop. $1-p$. Niech $N_1(t)$ i $N_2(t)$ oznaczają odpowiednio liczbę skoków typu A i B na $[0,t]$. Oczywiście zachodzi $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.
(i) wyznacz rozkład $(N_1(t), N_2(t))$
(ii) pokaż, że $N_1(t) \perp\!\!\!\perp N_2(t)$
(iii) pokaż, że $N_1(t)$ jest procesem Poissona z int. $\lambda \cdot p$ oraz $N_2(t)$ jest procesem Poissona z int. $\lambda(1-p)$.

(b)

Załóżmy, że klienci odwiedzają sklep z intensywnością $\lambda = 10$ na godzinę. Są to kobiety z prawdop. 0.6 oraz mężczyźni z prawdop. 0.4. Wyznacz prawdopodobieństwo, że trzy godziny po otwarciu sklepu odwiedziło go 20 kobiet i 10 mężczyzn.

② Niech $0 < s < t$, policz rozkład warunkowy zmiennej losowej $N(s)$ pod warunkiem $N(t) = n$.

③ Znajdź rozkład warunkowy $N(1) = n$ pod warunkiem $N(3) = n$.

④ Niech $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t$ oraz $I_j = (t_{j-1}, t_j]$. Oznaczmy przez $\mathcal{J}(I)$ liczbę skoków procesu Poissona $N(t)$ na przedziale I. Policz
$$P(\mathcal{J}(I_1) = n_1, \ldots, \mathcal{J}(I_k) = n_k \mid N(t) = n), \quad n_i \in \mathbb{N},\ n_1 + \ldots + n_k = n.$$

⑤ Samochody mijają ustalony punkt autostrady zgodnie z procesem Poissona o intensywności $\lambda = 3$ na minutę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że czas pomiędzy przejazdem dziesiątego a jedenastego samochodu przekroczy dwie minuty?

⑥ Niech $N(t)$ będzie procesem Poissona z int. λ oraz τ niech będzie zmienną o rozkładzie wykładniczym z par. β, $\tau \perp\!\!\!\perp N(t)$. Wyznacz rozkład liczby skoków procesu $N(t)$ na przedziale $[t, t+\tau]$.

⑦ Weźmy dwa niezależne procesy Poissona $N^{(1)}(t)$ i $N^{(2)}(t)$ z intensywnościami λ_1 i λ_2. Niech A_1 i A_2 oznaczają dwa kolejne momenty skoków procesu $N^{(1)}(t)$. Wyznacz rozkład $N^{(2)}(A_2) - N^{(2)}(A_1)$.