Rachunek Prawdopodobieństwa - Lista 1

Wydział Matematyki, kier. matematyka, studia licencjackie, II rok.

Zad.1 Pokazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi

$$\left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zad.2 Oblicz funkcję charakterystyczną zmiennej losowej X o rozkładzie
(a) Poissona,
(b) geometrycznym,
(c) jednostajnym na $[a, b]$,
(d) wykładniczym,
(e) Cauchy'ego (wsk. skorzystaj z metody residuów).

Zad.3 Niech X i Y będą dwiema niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowej funkcji charakterystycznej $\varphi(t)$. Oblicz funkcję charakterystyczną zmiennej $X - Y$.

Zad.4 Udowodnij, że następujące warunki sa równoważne
(a) Zmienna losowa X jest symetryczna.
(b) $\varphi_X(t)$ jest funkcją rzeczywistą.
(c) $\varphi_X(t)$ jest funkcją parzystą.

Zad.5 Niech $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ będą funkcjami charakterystycznymi, natomiast $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ liczbami nieujemnymi spełniającymi warunek $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$. Wykaż, że wtedy funkcja $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t)$ też jest funkcją charakterystyczną. Jakiego rozkładu?

Zad.6 Które z poniższych funkcji są, a które nie są funkcjami charakterystycznymi:

(a) $\cos t$, (b) $\cos(t^2)$, (c) $\cos^2 t$, (d) $\dfrac{(1 + e^{-2it})^2}{4}$,

(e) $\sin t$, (f) $\dfrac{1 + \cos t}{2}$, (g) $\dfrac{1}{2 - e^{-it}}$, (h) $\dfrac{e^{-t^2} \sin t}{2t}$

W przypadku pozytywnej odpowiedzi określić odpowiadający rozkład.

Zad.7 Niech $\varphi(t)$ będzie funkcją charakterystyczną. Wykaż, że wówczas część rzeczywista $\operatorname{Re} \varphi$ oraz kwadrat modułu $|\varphi|^2$ też są funkcjami charakterystycznymi.

Zad.8 Uzasadnij, że jeśli φ jest funkcją charakterystyczną, to $|\varphi|$ nie musi być funkcją charakterystyczną. (Wskazówka: Rozważ zmienną Z taką, że $\mathbf{P}(Z = 0) = \frac{2}{3}$ oraz $\mathbf{P}(Z = 1) = \frac{1}{3}$)

Zad.9 Jakim rozkładom odpowiadają funkcje charakterystyczne:

$$\cos t, \quad \cos^2 t, \quad e^{-t^2}, \quad e^{-|t|}, \quad \frac{1}{1+t^2}, \quad \frac{1}{1-it}, \quad \frac{\sin t}{t}, \quad e^{-|t|} \cos t.$$

Zad.10 Niech X, Y będą zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
(a) Oblicz gęstość zmiennej losowej $X + Y$.
(b) Oblicz funkcję charakterystyczną zmiennej $X + Y$.
(c) Wykaż, że funkcja

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{dla } |t| < 1, \\ 0, & \text{dla } |t| \geq 1, \end{cases}$$

jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej Z
(d) Wskaż gęstość zmiennej Z.

Zad.11 (kryterium Polya) Udowodnij, że dowolna parzysta i ciągła funkcja f, wypukła dla $t > 0$, spełniająca warunki $0 \leq f(t) \leq 1$, $f(0) = 1$ oraz $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, jest funkcją charakterystyczną.

Zad.12 Czy istnieją dwie różne funkcje charakterystyczne, które są równe na pewnym przedziale symetrycznym względem zera?

Zad.13 Wykaż, że dla dowolnego $0 < p \leq 1$ funkcja $f(t) = \frac{1}{1+|t|^p}$ jest funkcją charakterystyczną.

Zad.14 Niech $\varphi_X(t)$ będzie funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X o rozkładzie absolutnie ciągłym.
(a) Wykaż, że $|\varphi_X(t)| < 1$ dla każdego $t \neq 0$.
(b) Wykaż, że $\lim_{t\to\infty} \varphi_X(t) = 0$. (Fakt ten nosi nazwę lematu Riemanna-Lebesgue'a)

Zad.15 Niech φ będzie funkcją charakterystyczną o rozkładzie μ. Uzasadnij, że

$$\varphi(s) = 1 \text{ dla pewnego } s \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi \text{ ma okres } s.$$

Wskazówka: pokazać, że z pierwszego warunku wynika, że rozkład μ jest dyskretny i skupiony na zbiorze $\{\frac{2\pi k}{s} : k \in \mathbf{Z}\}$.

Zad.16 Niech $\varphi(t)$ będzie funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X. Wykaż, że jeśli istnieje $\varphi''(0)$, to wtedy $\mathbf{E}X^2 < \infty$ oraz $\mathbf{E}X^2 = -\varphi''(0)$.

Zad.17 Niech $\varphi(t) = e^{-|t|^p}$, $p > 0$.
(a) Pokaż, że dla $p > 2$, φ nie jest funkcją charakterystyczną.
(b) Pokaż, że dla $0 < p \leq 1$, φ jest funkcją charakterystyczną.
(c)* Pokaż, że $\varphi(t)$ jest funkcją charakterystyczną dla $1 < p < 2$

Zad.18 Zmienne X i Y są niezależne i mają jednakowy rozkład o skończonej wariancji. Udowodnij, że następujące warunki są wtedy równoważne:
(a) X ma rozkład normalny o średniej 0.
(b) Dla dowolnych $s, t \in R$ zmienna $sX + tY$ ma rozkład taki sam jak $\sqrt{s^2 + t^2}X$.