Rachunek Prawdopodobieństwa - Lista 2

Wydział Matematyki, kier. matematyka, studia licencjackie, II rok.

Zad.1 Korzystając z funkcji charakterystycznych pokazać, że jeśli ciąg zmiennych losowych (X_n) zbiega według rozkładu do zmiennej X o rozkładzie jednopunktowym, to $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ według prawdopodobieństwa.

Zad.2 Używając funkcji charakterystycznych i twierdzenia Lévy-Cramera udowodnić Słabe Prawo Wielkich Liczb bez założenia skończoności wariancji, tzn. pokazać, że jeżeli (X_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie takim, że $\mathbf{E}|X_1| < \infty$, to zachodzi

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{E}X_1.$$

Zad.3 Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{B}(60, 0.4)$. Jakim rozkładem normalnym możemy przybliżać rozkład zmiennej X? Niech Y będzie zmienną losową o tym rozkładzie.

(a) Obliczyć $\mathbf{P}(20 \leq X \leq 23)$, $\mathbf{P}(20 \leq Y \leq 23)$ oraz $\mathbf{P}(19,5 \leq Y \leq 23,5)$. Użyć kalkulatora i tablic rozkładu normalnego.

(b) Jakie możemy wyciągnąć z tego wnioski?

Zad.4 W pewnym mieście mieszka 15000 osób. Prawdopodobieństwo, że dana osoba będzie się chciała zaszczepić na grypę wynosi $0,4$. Mieszkańcy podejmują decyzję o szczepieniu niezależnie. Ile trzeba przygotować szczepionek, aby prawdopodobieństwo, że zabraknie szczepionek było mniejsze niż $0,1$?

Zad.5 Pewien wadliwy mikroprocesor podczas wykonywania operacji robi błąd w obliczeniach z prawdopodobieństwem $p = 10^{-5}$. Niech n będzie liczby operacji wykonanej przez ten mikroproprocesor, a p_n odsetkiem błędnych operacji. Jak duże powinno być n, aby

$$\mathbf{P}\left(\frac{|p_n - p|}{p} > 0,2\right) \leq 0,05?$$

Zad.6 Stwierdzono, iż przeciętnie 30% spośród ogólnej liczby studentów przyjętych na studia kończy je w terminie. Ile osób trzeba przyjąć na pierwszy rok, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż 0,9 co najmniej 50 osób skończyło studia w terminie?

Zad.7 Pokazać, że $|e^x - 1 - x| \leq |x|^2$ dla $|x| < \frac{1}{2}$.

Zad.8 Niech $a_k, b_k \in \mathbf{C}$ oraz $|a_k| \leq 1$ i $|b_k| \leq 1$ dla $1 \leq k \leq n$. Pokazać, że

$$\left|\prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|.$$

Zad.9 Pokazać, że jeśli X jest zmienną losową oraz $\delta, \varepsilon > 0$, to

$$\mathbf{E}\big(|X|^2 \mathbf{1}_{\{|X|>\varepsilon\}}\big) \leq \frac{\mathbf{E}|X|^{2+\delta}}{\varepsilon^\delta}.$$

Zad.10 Niech (X_k) będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach oczekiwanych m_k i skończonych wariancjach. Oznaczmy $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var} X_k$. Załóżmy, że spełniony jest następujący warunek (zwany **warunkiem Lapunowa**): Dla pewnego $\delta > 0$, mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}|X_k - m_k|^{2+\delta} = 0.$$

Pokazać, że spełniony jest wtedy **warunek Lindeberga**: Dla każdego $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\big(|X_k - m_k|^2 \mathbf{1}_{\{|X_k - m_k| > \varepsilon s_n\}}\big) = 0,$$

Zad.11 Pokazać, że ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach i skończonym drugim momencie spełnia warunek Lindeberga.

Zad.12 Niech (U_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na $[-n, n]$. Uzasadnić, że ciąg U_n spełnia warunek Lapunowa.

Zad.13 Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takim, że X_n ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, n]$. Sprawdzić, czy istnieją ciągi liczb a_n i b_n takie, że ciąg

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Jeśli tak, wyznaczyć a_n i b_n.

Zad.14 Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takim, że X_n ma rozkład wykładniczy o parametrze $\sqrt{n}$. Sprawdzić, czy zachodzi CTG dla tego ciągu.

Zad.15 Niech (U_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie

$$\mathbf{P}(U_n = \pm 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}, \qquad \mathbf{P}(U_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}.$$

Sprawdzić, czy zachodzi CTG dla tego ciągu.

Zad.16 Niech X będzie zmienną losową spełniającą warunki
(a) $\mathbf{E}X^2 < \infty$
(b) Jeżeli Y, Z są niezależne o tym samym rozkładzie co X, to $X \stackrel{d}{=} \frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$.
Pokazać, że X ma rozkład normalny o średniej 0.

Wskazówka: Pokazać, że jeśli $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne o tym samym rozkładzie co X, to

$$X \stackrel{d}{=} \frac{X_1 + \ldots + X_{2^n}}{\sqrt{2}^n}$$

Zad.17 Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Wskazówka: Roważyć ciąg iid $X_n \sim$ Poiss(1) i pokazać, że $\frac{X_1+\ldots+X_n-n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$, gdy $n \to \infty$.

Zad.18 Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są iid takie, że $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciagu

$$Z_n = \frac{(X_1 + \ldots + X_n)^2}{n}.$$