Rachunek Prawdopodobieństwa - Lista 4

Wydział Matematyki, kier. matematyka, studia licencjackie, II rok.

Zad.1 Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$, zaś a_n ciągiem liczbowym. Pokazać, że

$$\text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n \text{ jest zbieżny z prawd. 1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

Zad.2 Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na $[-1, 1]$. Dla jakich β szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\beta} X_n$ jest zbieżny z prawd. 1?

Zad.3 Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie

$$\mathbf{P}(X_n = n) = \mathbf{P}(X_n = -n) = \frac{1}{n^3}, \qquad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n^3}$$

Pokazać, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny z prawdopodobieństwem 1, ale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var} X_n = \infty$.

Zad.4 Niech X_n będzie nieujemnym ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Pokazać, że jeśli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{E} X_n < \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny z prawdopodobieństwem 1. Czy niezależność jest tutaj potrzebna?

Zad.5 Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Pokazać, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny z prawdopodobieństwem 1 $\Longleftrightarrow \mathbf{P}(X_1 = 0) = 1$.

Zad.6 Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takim, że X_n ma rozkład normalny $N(\mu_n, \sigma_n^2)$. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ w terminach zachowania się ciągu wariancji i wartości oczekiwanych zmiennych X_n.

Zad.7 Niech S_n będzie standardowym błądzeniem losowym. Pokazać, że dla każdego $\alpha > 0$

$$\mathbf{P}\big(\max_{1 \le k \le n} |S_k| > \alpha\big) \le 2\mathbf{P}(|S_n| > \alpha).$$

wsk.: Niech $A_k = \{|S_k| > \alpha\} \cap \{|S_j| \le \alpha, \text{dla } j < k\}$. Pokazać, że

- $\left\{\max\limits_{1 \le k \le n} |S_k| > \alpha\right\} = \bigcup\limits_{1 \le k \le n} A_k$
- $\mathbf{P}(A_k) \le 2\mathbf{P}(A_k \cap \{|S_n| > \alpha\})$.