

Rachunek prawdopodobieństwa w grach losowych.

Lista zawiera kilkadziesiąt zadań dotyczących różnych gier z użyciem kart i kości, w tym tych najbardziej popularnych jak brydż, tysiacy itp. Kolejne zadania będą pojawiać się sukcesywnie, gdy tylko autor będzie miał nowe pomysły.

Krzysztof Michalik

1. W grze w "tysiacy" każdy z trzech graczy otrzymuje początkowo 7 kart z talii 24 kart (as, król, dama, walet, 10 i 9 w każdym z 4 kolorów), a pozostałe 3 karty leżą osobno jako tzw. "musik". Pierwsza faza gry to licytacja. Gracz, który wygra licytację zabiera karty musika dla siebie.
 - (a) Ile jest różnych możliwych sposobów rozdania kart w tej grze (pomiędzy wszystkich graczy i musik)?
 - (b) Jeżeli dany gracz widzi swoje 7 kart to ile jest różnych możliwych musików?
 - (c) Jeżeli dany gracz widzi swoje 7 kart to jakie jest prawdopodobieństwo, że w musiku będzie
 - jedna wybrana karta np. król kier?
 - dwie wybrane karty np. król i dama kier?
 - trzy wybrane karty np. as, król i dama kier?
2. W grze w "tysiacy" każdy z trzech graczy otrzymuje początkowo 7 kart z talii 24 kart (as, król, dama, walet, 10 i 9 w każdym z 4 kolorów), a pozostałe 3 karty leżą osobno jako tzw. "musik". Pierwsza faza gry to licytacja. Gracz, który wygra licytację zabiera karty musika dla siebie. Meldunek to król i dama w jednym kolorze, co jest dodatkowo punktowane w trakcie rozgrywki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po wygraniu licytacji i zabraniu kart musika gracz będzie miał w swoich (dziesięciu) kartach meldunek jeżeli na początku w swoich siedmiu kartach nie miał żadnej damy oraz
 - nie miał żadnego króla,
 - miał jednego króla,
 - miał dwa króle,
 - miał trzy króle,
 - miał wszystkie cztery króle.
3. W grze w "tysiacy" każdy z trzech graczy otrzymuje początkowo 7 kart z talii 24 kart (as, król, dama, walet, 10 i 9 w każdym z 4 kolorów), a pozostałe 3 karty leżą osobno jako tzw. "musik".
 - a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że przed obejrzeniem kart gracz nr 1 będzie miał w swych kartach "meldunek 100" czyli króla i damę kier?

Po podniesieniu kart gracz pierwsza faza gry to licytacja. Jeżeli gracz wygra licytację to zabiera dla siebie karty z musika (a następnie daje każdemu z graczy po jednej karcie z posiadanych dziesięciu). Załóżmy, że po obejrzeniu kart gracz 1 ma w ręce asa, króla i 10 kier, damę karo, asa pik oraz 10 i 9 trefl. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po wygraniu licytacji gracz ten zdoła skompletować

 - b) meldunek 100,
 - c) meldunek 100 i jednocześnie meldunek 80 (króla i damę karo),
 - d) meldunek 100 lub meldunek 80.
4. W grze w "tysiacy" każdy z trzech graczy otrzymuje początkowo 7 kart z talii 24 kart (as, król, dama, walet, 10 i 9 w każdym z 4 kolorów), a pozostałe 3 karty leżą osobno jako tzw. "musik". Pierwsza faza gry to licytacja. Gracz, który wygra licytację zabiera karty musika dla siebie.

Gracz nr 1 ma w karcie asa, 10 i damę pik, asa i 10 kier, asa karo i 10 trefl. Zastanawia się czy warto wejść do licytacji.

a) Graczowi temu na pewno opłaci się wejść do licytacji jeżeli w kartach musika znajduje się król pik lub as trefl. Jakie jest prawdopodobieństwo takiego zdarzenia?

Gracz nr 1 zdecydował się wejść do licytacji i wygrał ją. Zabrał dla siebie karty musika, a w nich były: król pik, dama kier i 9 karo. W tym momencie ma dwie sensowne strategie:

- bezpieczną: zadeklarować "140", co daje pewny zysk 140 punktów,
- ryzykowną: zadeklarować "160", co oznacza zysk 160 punktów lub stratę 160 punktów.

Strategia ryzykowna przyniesie stratę jeżeli któryś z pozostałych graczy będzie miał w swoich kartach pozostałe kiery (czyli króla, waleta i 9). W przeciwnym wypadku strategia ta przyniesie zysk.

b) Wykazać, że szansa na zysk przy strategii ryzykownej wynosi około 81%.

c) Skonstruować zmienną losową, która opisuje zysk/stratę gracza 1 przy zastosowaniu strategii ryzykownej.

d) Która ze strategii będzie dla gracza korzystniejsza w dłuższym horyzoncie czasowym? Odpowiedź uzasadnić.

5. W grze w "tysiąca" każdy z trzech graczy otrzymuje początkowo 7 kart z talii 24 kart (as, król, dama, walet, 10 i 9 w każdym z 4 kolorów), a pozostałe 3 karty leżą osobno jako tzw. "musik". Pierwsza faza gry to licytacja. Gracz, który wygra licytację zabiera karty musika dla siebie.

Gracz nr 1 ma w karcie asa, 10 i damę kier, asa, damę i waleta pik oraz damę trefl. Zastanawia się czy warto wejść do licytacji.

a) Graczowi temu na pewno opłaci się wejść do licytacji jeżeli w kartach musika znajduje się przynajmniej jeden król do pary do którejś z dam - a więc król kier, król pik lub król trefl. Jakie jest prawdopodobieństwo takiego zdarzenia?

Gracz nr 1 zdecydował się wejść do licytacji i wygrał ją. Zabrał dla siebie karty musika, a w nich były: walet kier, król pik i król trefl. W tym momencie ma trzy sensowne strategie:

- strategia 1: zadeklarować "110", co daje pewny zysk 110 punktów,
- strategia 2: zadeklarować "130", co oznacza zysk 130 punktów lub stratę 130 punktów,
- strategia 3: zadeklarować "160", co oznacza zysk 160 punktów lub stratę 160 punktów.

Strategia 2 przyniesie stratę jeżeli któryś z pozostałych graczy będzie miał w swoich kartach pozostałe 2 piki (czyli 10 i 9) oraz króla i damę karo. W przeciwnym wypadku strategia ta przyniesie zysk.

Strategia 3 przyniesie stratę jeżeli któryś z pozostałych graczy będzie miał w swoich kartach pozostałe 2 piki (czyli 10 i 9). W przeciwnym wypadku strategia ta przyniesie zysk.

b) Wykazać, że szansa na zysk przy strategii 2 wynosi około 93%, a przy strategii 3 około 54%.

c) Skonstruować zmienne losowe, która opisują zysk/stratę gracza 1 przy zastosowaniu każdej z trzech strategii.

d) Która ze strategii będzie dla gracza korzystniejsza w dłuższym terminie? Odpowiedź uzasadnić.

6. W brydża grają przeciwko sobie dwie pary graczy przy użyciu standardowej talii kart (13 kart w każdym z 4 kolorów). Gracze stanowiący parę siedzą naprzeciwko siebie, oznaczeni są stronami świata (N,S,W,E) i każdy gracz trzyma 13 kart. W czasie licytacji pary deklarują ilość lew do wzięcia, a potem przystępują do rozgrywki. Jeśli para weźmie zapowiedzianą ilość lew zdobywa punkty, jeśli weźmie ich mniej to traci punkty.

Para WE dostała następujące karty (A-as, K-król, D-dama, W-walet):

Piki: AK3	N	E	Piki: D65
Kiery: AD3	W	S	Kiery: K65
Kara: 5			Kara: 8762
Trefle: AKW1053			Trefle: 984

Z takimi kartami ilość lew, które można wziąć zależy od rozkładu trefli u graczy N i S. Para WE

weźmie 12 lew i straci jedną jeżeli wystąpi któryś z poniższych układów:

- trefle podzielą się 2-2 czyli każdy z graczy N i S będzie miał ich dokładnie dwa,
- trefle podzielą się 3-1 i pojedynczym treflem będzie dama,
- wszystkie cztery trefle będą u gracza S.

W pozostałych przypadkach para WE weźmie 11 lew i straci dwie.

a) Obliczyć prawdopodobieństwa powyższych układów i wykazać, że szansa na wzięcie 12 lew wynosi w przybliżeniu 58%.

Para WE może przyjąć w licytacji jedną z dwóch rozsądnych strategii:

- zadeklarować 11 lew co oznacza zysk 600 punktów w przypadku wzięcia 11 lew oraz zysk 620 punktów w przypadku wzięcia 12 lew,
- zadeklarować 12 lew co oznacza zysk 1370 punktów w przypadku wzięcia 12 lew oraz stratę 100 punktów w przypadku wzięcia tylko 11 lew.

b) Dla każdej z tych strategii skonstruować zmienną losową opisującą zysk/stratę pary WE.

c) Która ze strategii będzie korzystniejsza w dłuższym horyzoncie czasowym? Odpowiedź uzasadnić.

7. W brydża grają przeciwko sobie dwie pary graczy przy użyciu standardowej talii kart (13 kart w każdym z 4 kolorów). Gracze stanowiący parę siedzą naprzeciwko siebie, oznaczeni są stronami świata (N,S,W,E) i każdy gracz trzyma 13 kart. W czasie licytacji pary deklarują ilość lew do wzięcia, a potem przystępują do rozgrywki. Jeśli para weźmie zapowiedzianą ilość lew zdobywa punkty, jeśli weźmie ich mniej to traci punkty.

Para WE dostała następujące karty (A-as, K-król, D-dama, W-walet):

Piki:	AK3	N	Piki:	D65	
Kiery:	ADW3	W	E	Kiery:	K65
Kara:	AK5	S	Kara:	876	
Trefle:	AKD		Trefle:	10643	

Z takimi kartami ilość lew, które można wziąć zależy od rozkładu trefli u graczy N i S. Para WE weźmie wszystkie 13 lew jeżeli wystąpi któryś z poniższych układów:

- trefle podzielą się 3-3 czyli każdy z graczy N i S będzie miał ich dokładnie trzy,
- trefle podzielą się 4-2 i dodatkowo jednym z trefli w parze będzie walet, np. W9 u N i 8752 u S,
- trefle podzielą się 5-1 i pojedynczym treflem będzie walet, np. 98752 u N i W u S.
- któryś z graczy będzie miał cztery trefle z waletem i jednocześnie pięć kar, np. N będzie miał karty: piki 109, kiery 98 kara D10943 trefle W987, a S - pozostałe karty.

W pozostałych przypadkach para WE weźmie 12 lew i straci jedną.

a) Obliczyć prawdopodobieństwa powyższych układów i wykazać, że szansa na wzięcie 13 lew wynosi w przybliżeniu 58%.

Para WE może przyjąć w licytacji jedną z dwóch rozsądnych strategii:

- zadeklarować 12 lew co oznacza zysk 1440 punktów w przypadku wzięcia dokładnie 12 lew oraz zysk 1470 punktów w przypadku wzięcia wszystkich 13 lew,
- zadeklarować 13 lew co oznacza zysk 2220 punktów w przypadku wzięcia wszystkich 13 lew oraz stratę 100 punktów w przypadku wzięcia tylko 12 lew.

b) Dla każdej z tych strategii skonstruować zmienną losową opisującą zysk/stratę pary WE.

c) Która ze strategii będzie korzystniejsza w dłuższym horyzoncie czasowym? Odpowiedź uzasadnić.

8. W grze w pokera każdy z graczy dostaje po 5 kart ze standardowej talii kart (13 kart w każdym z 4 kolorów). Obliczyć prawdopodobieństwo, że przed obejrzeniem kart dany gracz dostanie

a) "kolor" - 5 dowolnych kart w tym samym kolorze,

b) "fulla" - 3 takie same karty i 2 takie same np 3 asy i 2 czwórki.

Po podniesieniu kart gracz otrzymał asa pik, asa kier, króla karo, 2 pik i 9 karo. Decyduje się wymienić 2 pik i 9 karo na dwie inne karty (czyli odrzuca te karty, a na ich miejsce otrzymuje 2 nowe karty z pozostałych 47). Jakie jest prawdopodobieństwo, że po wymianie gracz będzie miał fulla?

9. W grze w pokera każdy z graczy dostaje po 5 kart ze standardowej talii kart (13 kart w każdym z 4 kolorów). Obliczyć prawdopodobieństwo, że przed obejrzeniem kart dany gracz dostanie
- "karetę" - 4 karty tej samej wartości np. 4 asy,
 - "dwie pary" - 2 takie same karty i 2 inne takie same karty np 2 asy i 2 czwórki.

Po podniesieniu kart gracz otrzymał asa pik, asa kier, 6 karo, 3 pik i 8 karo. Decyduje się wymienić 6 karo, 3 pik i 8 karo (czyli na ich miejsce otrzymuje 3 nowe z pozostałych 47).

- Jakie jest prawdopodobieństwo, że po wymianie gracz będzie miał karetę?
10. W grze w pokera w kości gracz rzuca pięcioma symetrycznymi kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po wykonaniu rzutu gracz otrzyma
- pokera (wszystkie liczby takie same),
 - streeta (liczby tworzące ciąg arytmetyczny),
 - fulla (trójkę takich samych liczb i parę takich samych liczb ale nie pokera np. 66655).
11. W grze hazardowej "5x6" gracz rzuca jednocześnie pięcioma symetrycznymi kostkami do gry. Za każdą wyrzuconą szóstkę gracz wygrywa 10\$. Jeżeli jednak nie wyrzuci żadnej szóstki to traci 25\$.
- Zdefiniować zmienną losową opisującą wynik gracza po jednej partii tej gry.
 - Obliczyć prawdopodobieństwo, że w jednej partii gracz wygra przynajmniej 40\$. Podać dokładny wynik.
 - Czy gra jest sprawiedliwa? Odpowiedź uzasadnić.
 - Jakiego wyniku powinien oczekiwać gracz po rozegraniu 100 partii tej gry? Podać wynik z dokładnością do 1\$.

12. W grze hazardowej "Duże się liczy" gracz rzuca jednocześnie czterema symetrycznymi kostkami do gry. Zysk/strata zależą od ilości wyników większych od 4. Gdy wszystkie cztery wyniki są większe od 4 to gracz wygrywa 4\$, gdy dokładnie trzy - wygrywa 1\$, gdy dokładnie dwa to mamy remis i gracz nic nie wygrywa i nic nie traci. W pozostałych przypadkach gracz traci 1\$.
- Skonstruować zmienną losową opisującą wynik gracza po jednej partii tej gry.
 - Jakiego wyniku powinien oczekiwać gracz po rozegraniu 100 partii tej gry? Podać wynik z dokładnością do 1\$.

W celu zwiększenia dynamiki gry organizator wprowadza następującą modyfikację-tzw "opcję". W przypadku remisu (2 wyniki większe od 4, a dwa nie) gracz ma prawo wziąć dwie kostki z najgorszymi wynikami, rzucić nimi jeszcze raz i dołączyć do pozostałych dwóch. Stawki za wygraną pozostają bez zmian jednak tym razem remis oznacza stratę 2\$.

- Która ze strategii - skorzystać z "opcji" lub nie - jest korzystniejsza dla gracza w dłuższym terminie? Odpowiedź uzasadnić.
13. W grze "6 dla bohatera, 1 dla zera" gracz rzuca jednocześnie trzema symetrycznymi kostkami do gry. Wyrzucenie przynajmniej jednej jedynki kończy partię i oznacza stratę 1\$. W pozostałych przypadkach gracz otrzymuje 1\$ za każdą wyrzuconą szóstkę.
- Skonstruować zmienną losową opisującą wynik gracza po jednej partii tej gry.
 - Jaka powinna być wysokość wygranej za każdą wyrzuconą szóstkę by gra była sprawiedliwa? Podać wynik dokładny lub zaokrąglony do 0,1\$.
14. W grze hazardowej "Asy" gracz dostaje 3 karty ze standardowej talii kart (13 kart w każdym z 4 kolorów). Za każdego otrzymanego asa gracz wygrywa 1\$. Jeżeli jednak nie otrzyma żadnego asa to traci 1\$.
- Zdefiniować zmienną losową opisującą wynik gracza po jednej partii tej gry.

- b) Jakiego wyniku powinien oczekiwać gracz po rozegraniu 100 partii tej gry? Podać wynik z dokładnością do 1\$.
- c) Ile powinna wynosić strata w przypadku braku otrzymania asa aby gra była sprawiedliwa? Odpowiedź podać z dokładnością do 0,1\$.
15. W grze "Pik wygrywa kier przegrywa" gracz ciągnie jednocześnie 2 karty ze standardowej talii (13 kart w każdym z 4 kolorów). Wyciągnięcie przynajmniej jednego kiera kończy partię i oznacza stratę 1\$. W pozostałych przypadkach gracz otrzymuje po 1\$ za każdego wyciągniętego pika.
- a) Skonstruować zmienną losową opisującą wynik gracza po jednej partii tej gry.
- b) Jaka powinna być wysokość wygranej za każdego wyciągniętego pika by gra była sprawiedliwa? Podać wynik dokładny lub zaokrąglony do 0,1\$.
16. W grze "Tylko kiery" każdy z czterech graczy otrzymuje 6 kart z talii 24 kart (as, król, dama, walet, 10 i 9 w każdym z 4 kolorów). Gracz, który ma więcej kierów od każdego z pozostałych graczy wygrywa grę. W przeciwnym wypadku gra kończy się remisem.
- a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że po rozdaniu kart wybrany gracz będzie miał
- dokładnie 3 kiery,
 - więcej niż 3 kiery.
- Oczywiste jest, że jeżeli dany gracz ma w kartach więcej niż 3 kiery to na pewno wygra grę, a jeśli ma mniej niż 3 kiery to nie ma szans na jej wygranę.
- b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że jeżeli gracz ma dokładnie 3 kiery to wygra grę?
- c) Jakie jest zatem prawdopodobieństwo, że przed obejrzeniem kart dany gracz wygra grę?
17. W grze hazardowej "Tylko kiery" każdy z czterech graczy dostaje po 4 karty ze standardowej talii kart (13 kart w każdym z 4 kolorów). Obliczyć prawdopodobieństwo, że po otrzymaniu 4 kart dany gracz dostanie
- a) same kiery,
- b) dokładnie 3 kiery.
- Z obserwacji stylu gry Gracza 1 wynika, że jeżeli po otrzymaniu 4 kart ma same kiery to szansa na to, że wygra grę wynosi 99%, a gdy ma dokładnie 3 kiery to 80%. W pozostałych przypadkach szansa ta spada do 20%.
- c) Jakie jest prawdopodobieństwo, że Gracz 1 wygra grę?
- d) Gracz 1 wygrał grę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po otrzymaniu 4 kart miał dokładnie 3 kiery?