„Kwiatki” z sesji zimowej 2018/19

1. Reguła de L'Hospitala jest dobra na wszystko:
$$\int \frac{x+1}{x^2+4}dx \overset{H}{=} \int \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\ln|x| + C.$$

2. Oryginalna metoda całkowania przez części:
$$\begin{aligned}\int \ln(x-2)\,dx &= \left[\begin{array}{c|c} f(x) = \ln & g'(x) = x-2 \\ \hline f'(x) = 1/x & g(x) = x^2/2 - 2x \end{array}\right] \\ &= \ln\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) - \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)dx = \ldots\end{aligned}$$

3. Jeden z studentów, aby przyspieszyć obliczenia całki $\int \frac{1}{x^2-x}dx$ skorzystał ze „znanego wzoru” $\frac{a-b}{p-q} = \frac{a}{p} - \frac{b}{q}$. Poniżej jego przekształcenia
$$\int \frac{1}{x^2-x}dx = \int \frac{2-1}{x^2-x}dx = \int \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx \ \ldots \text{ dalej poszło już łatwo.}$$

4. Pomysłowe rozwiązanie zadania: obliczyć masę cienkiej płytki w kształcie trójkąta o wierzchołkach $A = (0,0)\,, B = (0,3)\,, C = (4,3)\,,$ jeżeli gęstość masy w punkcie (x,y) płytki ma postać $\sigma(x,y) = xy$.

   Rozwiązanie. Masę płytki obliczymy ze wzoru
$$M = \int_0^0 dx \int_0^3 dy \int_4^3 xydz.$$
   Łatwo domyślić się dlaczego student wybrał takie granice całkowania.

5. Sprytne obliczenie całki:
$$\int \operatorname{arcctg} x\,dx = \operatorname{arc}\int \operatorname{ctg} x\,dx = \operatorname{arc}\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \operatorname{arc}\left(\ln|\sin x| + C\right).$$

6. Szybkie wyznaczenie granicy: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos\left(x^3\right)}{\ln\cos\left(x^5\right)} = \frac{\ln\cos\left(0^3\right)}{\ln\cos\left(0^5\right)} = \frac{\ln\cos 0}{\ln\cos 0} = 1.$

Błędy studentów zebrał[1]

Zbigniew Skoczylas

[1]Dziękuję dr. Jerzemu Cisło i dr. Marianowi Gewertowi za informacje o błędach. Jeden „kwiatek” otrzymałem od znajomego matematyka z innej uczelni.