MAP1142 – ANALIZA MATEMATYCZNA 1.1A

Zadania z listy oznaczone gwiazdką ($*$) są nieco trudniejsze albo mają charakter teoretyczny. Jednak nie wychodzą one poza ramy programu kursu. Odpowiedzi do zadań z listy można zweryfikować za pomocą programów komputerowych. Istnieje wiele programów do obliczeń numerycznych i symbolicznych. Programy te można wykorzystać np. do rysowania wykresów funkcji, obliczania granic ciągów i funkcji, wyznaczania całek i pochodnych, rozwiązywania równań algebraicznych i różniczkowych, badań statystycznych. Polecamy stronę internetową **Wolfram Alpha** oraz darmowe programy: **Maxima**, **Microsoft Mathematics**, **Octave**, **pakiet R**, **Sage**, **Scilab**, a także programy płatne: **Derive**, **Mathematica**, **Matlab**, **Maple**, **Scientific WorkPalce**.

Uzdolnionych studentów zachęcamy do udziału w egzaminach na ocenę celującą z algebry i analizy. Zadania z tych egzaminów można znaleźć na stronie internetowej
http://www.im.pwr.wroc.pl/kursy-ogolnouczelniane/oceny-celujace.html

Opracowanie: dr Marian Gewert, doc. Zbigniew Skoczylas
Wrocław, wrzesień 2012

Listy zadań

Lista 1

1.1. Czy podane wypowiedzi są zdaniami w logice? Jeśli są, to podać ich wartość logiczną:
a) „Amsterdam jest stolicą Holandii”; **b)** „liczba 123888 jest podzielna przez 8”; **c)** „$a^2 + b^2 = c^2$”;
d) „trójkąt o bokach 3, 4, 5 jest ostrokątny”; **e)** „$2^5 \geqslant 32$”; **f)** „$\Delta = b^2 - 4ac$”.

1.2. Napisać zaprzeczenia zdań:
a) „jem śniadanie i słucham radia”; **b)** „kwadrat nie jest pięciokątem”;
c) „stolicą Polski jest Gniezno lub Wrocław”; **d)** „jeśli jutro będzie ciepło, to pójdę na basen”;
e) „liczba jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 3”.

1.3. Ocenić prawdziwość zdań złożonych:
a) „nieprawda, że funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca na $\mathbb{R}$”;
b) „$(-1)^{44} = -1$ lub 2008 jest liczbą parzystą”;
c) „funkcja $g(x) = \sin x$ jest okresowa, a funkcja $f(x) = 3^x$ nieparzysta”;
d) „jeżeli Piotr jest synem Tadeusza, to Tadeusz jest starszy od Piotra”;
e) „liczba 13579 jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma $1+3+5+7+9$ jest podzielna przez 9”.

1.4. Czy podane funkcje zdaniowe są prawami logicznymi:
a) $\neg(p \vee q) \Longrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)]$; **b)** $p \Longrightarrow [(q \wedge \neg q) \Longrightarrow r]$; **c)** $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow [(\neg p) \vee q]$; **d)** $[p \wedge (\neg q)] \vee [(\neg p) \wedge q]$?

1.5. Zbiory określone za pomocą formy zdaniowej zapisać w prostszej postaci:
a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\}$; **b)** $\{n \in \mathbb{N} : \text{ liczba } n^2 - n \text{ jest parzysta}\}$;
c) $\{x \in \mathbb{R} : (x < 3) \vee (x \geqslant 5)\}$; **d)** $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ jest podzielne przez } 5\}$;
e) $\{x \in \mathbb{R} : (x > 0) \Longrightarrow (x^2 > 0)\}$; **f)** $\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{N} \ \wedge \ x < y < z \ \wedge \ xyz = 16\}$.

1.6. Podać przykłady warunków, które spełniają tylko elementy zbiorów:
a) $[-1, 7]$; **b)** {trójkąt równoboczny, kwadrat}; **c)** $\{2, 4, 6, \ldots\}$;
d) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots\right\}$; **e)** $\{1\} \cup [2, 3]$; **f)** $\{-1, 1, -3, 3, -5, 5, -15, 15\}$.

1.7. Zbadać, czy podane formy zdaniowe z kwantyfikatorami są prawdziwe:

a) $\bigvee_{x\in\mathbb{R}} \sin x = \frac{1}{2}$; **b)** $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x^2+4x+3>0$; **c)** $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigvee_{y\in\mathbb{R}} x^2-y^2=0$;

d) $\bigvee_{y\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} xy=0$; **e)** $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigwedge_{y\in\mathbb{R}} (y\leqslant x)\vee(y>x)$; **f)** $\bigwedge_{y\in\mathbb{R}} \bigvee_{x\in\mathbb{R}}! \, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\wedge \operatorname{tg} x = y$.

1.8. Dla podanych par zbiorów A, $B\subset\mathbb{R}$ wyznaczyć $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, A^c, B^c, $A\triangle B$:

a) $A=(0,5)$, $B=[0,7]$; **b)** $A=(-\infty,3)$, $B=[-1,\infty)$;

c) $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3,4\}$; **d)** $A=\mathbb{N}$, $B=\{2n:\ n\in\mathbb{N}\}$.

Wskazać te pary A, B, dla których $A\subset B$.

1.9. Wyznaczyć wszystkie podzbiory zbioru $\{\bigcirc,\ \triangle,\ \square\}$.

1.10*. Która z relacji $A\subset B$, czy $B\subset A$ zachodzi, gdy:

a) $A\cup B=A$; **b)** $A\cup B\subset A$; **c)** $A\setminus B=A$; **d)** $B\subset A\cap B$?

Lista 2

2.1. Określić i narysować dziedziny funkcji:

a) $f(x)=\frac{x}{x^2-2x-3}$; **b)** $f(x)=\frac{x-2}{x^2+4}$; **c)** $f(x)=\sqrt{16-x^2}$;

d) $f(x)=\sqrt{-(x+3)^4}$; **e)** $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$; **f)** $f(x)=\frac{x-4}{x^2-8x+16}$.

2.2. Określić funkcje złożone $f\circ f$, $f\circ g$, $g\circ f$, $g\circ g$ oraz podać ich dziedziny, jeżeli:

a) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x^2$; **b)** $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^4$;

c) $f(x)=\frac{1}{x+1}$, $g(x)=\frac{1}{x+2}$; **d)** $f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x+1}$.

2.3*. Uzasadnić, że złożenie funkcji:

a) rosnących jest funkcją rosnącą;

b) rosnącej i malejącej jest funkcją malejącą;

c) malejących jest funkcją rosnącą.

2.4. Znaleźć funkcje f i g takie, że $h=f\circ g$, jeżeli:

a) $h(x)=x^2$; **b)** $h(x)=x^4+2x^2-2$; **c)** $h(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-1}$;

d) $h(x)=\frac{|x|+1}{|x|-1}$; **e)** $h(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$; **f)** $h(x)=2^{x^2}$.

*Czy funkcje f i g są wyznaczone jednoznacznie?

2.5. Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

a) $f(x)=2x-3$, $\mathbb{R}$; **b)** $f(x)=\frac{1}{x}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; **c)** $f(x)=x^4$, $[0,\infty)$;

d) $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$, $(2,\infty)$; **e)** $f(x)=\sqrt{x}-3$, $[0,\infty)$; **f*)** $f(x)=x-\sqrt{x}$, $\left[\frac{1}{4},\infty\right)$.

2.6. Korzystajac z wykresu funkcji $y=\sqrt{x}$ naszkicować wykresy funkcji:

a) $y=\sqrt{x-2}$; **b)** $y=2\sqrt{x}$; **c)** $y=\sqrt{2-x}$;

d) $y=2-\sqrt{x}$; **e)** $y=1+\sqrt{x}$; **f)** $y=1-\sqrt{x+1}$.

2.7. Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; **b)** $f(x) = 3 - \sqrt[3]{x+2}$; **c*)** $f(x) = x^6 \operatorname{sgn} x$;

d*) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x < 0, \\ 2+x & \text{dla } x \geqslant 0; \end{cases}$ **e)** $f(x) = 2^{x-1}$; **f)** $f(x) = 4^{\frac{1}{x}}$;

g) $f(x) = \log(x+2)$; **h)** $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} 2x$; **i)** $f(x) = \log_2^3(x+1)$.

Lista 3

3.1. Korzystając z wykresu funkcji $y = \sin x$ naszkicować wykresy funkcji:

a) $y = \sin 2x$; **b)** $y = \sin \dfrac{x}{3}$; **c)** $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

d) $y = 1 + \sin x$; **e)** $y = \dfrac{1}{2}\sin x - 1$; **f)** $y = \sin 2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

3.2. Naszkicować wykresy funkcji:

a) $y = \sin x - \left|\dfrac{1}{2}\sin x\right|$; **b)** $y = 1 + \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; **c)** $y = \operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x|$; **d)** $y = |\operatorname{tg} x| \operatorname{ctg} x$.

3.3. Korzystając ze wzorów redukcyjnych zapisać podane wyrażenia w postaci funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$:

a) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; **b)** $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} + \alpha\right)$; **c)** $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$; **d)** $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

3.4. Uzasadnić tożsamości trygonometryczne:

a) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$; **b)** $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha$; **c)** $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$;

d) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; **e)** $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; **f)** $\dfrac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha = \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha$.

Dla jakich kątów α są one prawdziwe?

3.5*. Obliczyć wartości wyrażeń:

a) $\operatorname{tg}\left(\arccos\dfrac{1}{2}\right)$; **b)** $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$; **c)** $\sin\left(\arcsin\dfrac{3}{5} + \arcsin\dfrac{8}{17}\right)$; **d*)** $\sin(\operatorname{arc\,tg} 1 + \operatorname{arc\,tg} 2)$.

3.6*. Funkcje odwrotne do podanych zapisać przy pomocy funkcji cyklometrycznych:

a) $f(x) = \sin x,\ x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$; **b)** $f(x) = \cos x,\ x \in [\pi, 2\pi]$;

c) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$; **d)** $f(x) = \operatorname{ctg} x,\ x \in (\pi, 2\pi)$.

Naszkicować wykresy otrzymanych funkcji odwrotnych.

Lista 4

4.1. Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:

a) $a_n = \dfrac{2+\cos n}{3 - 2\sin n}$; **b)** $a_n = \sqrt[n]{2^n + 1}$; **c)** $a_n = \dfrac{4^n - 1}{2^n + 3}$;

d) $a_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}$; **e)** $a_n = \dfrac{1}{4^1+1} + \dfrac{1}{4^2+2} + \ldots + \dfrac{1}{4^n+n}$; **f)** $a_n = 2^n - 3^n$.

4.2. Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:

a) $a_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$; **b)** $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$; **c)** $a_n = \dfrac{n!}{10^n}$;

d) $a_n = \dfrac{1}{n^2-6n+10}$; **e)** $a_n = \dfrac{4^n}{2^n+3^n}$; **f)** $a_n = \sqrt{n^2+1}-n$.

4.3. Korzystając z definicji granicy właściwej lub niewłaściwej ciągu uzasadnić równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-n}{n+4} = -1$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n^2} = 0$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(2^n-5\right) = \infty$.

4.4. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{n+4}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n^2+1}$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2n^2+1}{n-3n^3}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n^{20}+2\right)^3}{\left(n^3+1\right)^{20}}$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{2+4+\ldots+2n}$; **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n-4^n}{5^n-3^n}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n^2+1\right)n!+1}{(2n+1)(n+1)!}$; **h)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2+2n}\right)$; **i)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+6\sqrt{n}+1}-\sqrt{n}\right)$.

4.5. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+(-1)^n}{3n+2}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor n\pi \rfloor}{n}$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3+\sin n}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n2^n+1}$; **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2+n}\right)$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor}{\lfloor n\sqrt{3} \rfloor}$; **h)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n+2^n}{5^n+4^n}}$; **i)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+2]{3^n+4^{n+1}}$.

4.6. Korzystając z definicji liczby e oraz z twierdzenia o granicy podciągu obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n-2}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n+2}{5n+1}\right)^{15n}$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^{n}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+4}{n+3}\right)^{5-2n}$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2}$; **f*)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\dfrac{3n+2}{5n+2}\right)^n \cdot \left(\dfrac{5n+3}{3n+1}\right)^n\right]$.

Lista 5

5.1*. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach znaleźć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n+5}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(4^n+(-3)^n\right)$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin n-2)\, n^2$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(5-\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^5-10n^6+1\right)$; **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

5.2. Korzystając z twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^4-3n^3-2n^2-1\right)$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+2^n-3^n\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)^n$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-(n+1)!}{n!+2}$; **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3}-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)^n$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} n}{\operatorname{arc\,ctg} n}$; **h*)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n\left[\ln(n+1)-\ln n\right]}$; **i)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} 2^n}{2^n}$.

5.3. Korzystając z definicji Heinego granicy właściwej lub niewłaściwej funkcji uzasadnić równości:

a) $\lim\limits_{x\to 3}(x-2)^5 = 1$; **b)** $\lim\limits_{x\to\pi^+} \lfloor x \rfloor = 4$; **c)** $\lim\limits_{x\to\, 2^+} \dfrac{1}{x-2} = \infty$.

5.4. Wskazując odpowiednie dwa ciągi uzasadnić, że podane granice nie istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2}{x-3}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 2} \lfloor x^2 \rfloor$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\sqrt{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \cos\dfrac{1}{x^2}$; **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sgn} x}{\operatorname{sgn}(x+1)}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 5} (x-\lfloor x \rfloor)$.

5.5. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{x^2-x+1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^4-1}$; **e)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^6-1}{1-x^2}$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+4}{x(x-5)}$.

Lista 6

6.1. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji obliczyć granice (cd.):

g) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$; **h)** $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$; **i)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$;

j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$; **k)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}$; **l)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x+1}{3^x+2}$;

m) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg}^2 x+5}$; **n)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$; **o)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\cos x}\right)$.

6.2. Zbadać, obliczając granice jednostronne, czy istnieją granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sgn} x$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x^3}}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$;

d) $\lim\limits_{x\to -1} \operatorname{sgn}\left[x\left(1-x^2\right)\right]$; **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$.

6.3. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnić równości:

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x^2} = 0$; **a)** $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x} = 0$; **d)** $\lim\limits_{x\to 2} \lfloor x \rfloor \sin(x\pi) = 0$;

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2^{-x}+\sin x}{2^{-x}+\cos x} = 1$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\sin x}{x^2} = 0$; **g)** $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x+\sin^2 x} = 0$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\lfloor 3e^x \rfloor+2}{\lfloor 2e^x \rfloor+1} = \dfrac{3}{2}$; **i)** $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 0$; **j*)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\sin x\right] = 0$.

6.4*. Korzystając z twierdzenia o dwóch funkcjach uzasadnić równości:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\lfloor x^2+1 \rfloor}{\lfloor x \rfloor} = \infty$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2+\sin\dfrac{1}{x}}{x^2} = \infty$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(3-\cos\dfrac{1}{x}\right)\operatorname{ctg} x = -\infty$.

6.5. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{3}}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}}{\operatorname{tg}\dfrac{2}{x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\operatorname{arc\,tg} x}$; **e)** $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$; **f*)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 5x}{\cos 3x}$; **h)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$; **i)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{x}$;

j*) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln\left(1+2^x\right)}{3^x}$; **k)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2^x-1}{4^{\sqrt{x}}-1}$; **l)** $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{2x-1}$; **m)** $\lim\limits_{x\to 0} \left[1+\operatorname{tg}(2x)\right]^{\operatorname{ctg} x}$; **o)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[6]{1-x}}{x}$.

6.6. Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne funkcji:

a) $f(x)=\dfrac{x^3+x^2}{x^2-4}$; **b)** $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$; **c)** $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x+1}$;

d) $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$; **e)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; **f)** $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$;

g) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-\pi}$; **h)** $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x^3}$; **i)** $f(x)=x-\operatorname{arc\,tg} x$.

Lista 7

7.1. Narysować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1,\ f(2)=0,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=e,\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$, funkcja f jest parzysta;

c) prosta $y=x+1$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $-\infty$, prosta $y=x-1$ asymptotą ukośną w ∞, a prosta $x=0$ jest jej asymptotą pionową obustronną;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=3,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=5$;

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-4,\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=4$;

g) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$, funkcja f jest okresowa i ma okres $T=3$;

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4,\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$, funkcja f jest nieparzysta.

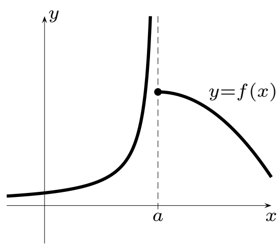
Na rysunkach wskazać fragmenty wykresów spełniające poszczególne warunki.

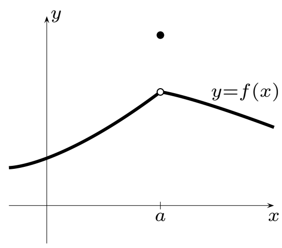
7.2. Dobrać parametry $a, b\in\mathbb{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe na $\mathbb{R}$:

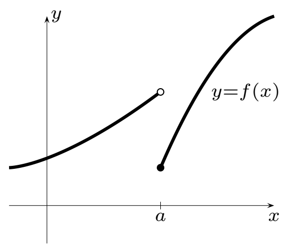
a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x}+1 & \text{dla } x<-1,\\ b-2x & \text{dla } x\geqslant -1;\end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{dla } |x|\geqslant\dfrac{\pi}{2},\\ ax+b & \text{dla } |x|<\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$ **c)** $f(x)=\begin{cases}ax^2+1 & \text{dla } x<-1,\\ 2x & \text{dla } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x^3+bx & \text{dla } x>0;\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & \text{dla } |x|<2,\\ x\sqrt{x^2-4} & \text{dla } |x|\geqslant 2;\end{cases}$ **e)** $f(x)=\begin{cases}bx & \text{dla } x<\pi,\\ \dfrac{\sin x}{ax} & \text{dla } x\geqslant\pi.\end{cases}$ **f)** $f(x)=\begin{cases}a\sin x+b\cos x & \text{dla } |x|>\dfrac{\pi}{4},\\ 1+\operatorname{tg} x & \text{dla } |x|\leqslant\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

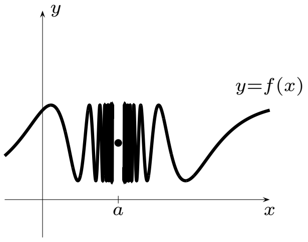
7.3. Określić rodzaje nieciągłości funkcji w punkcie a (jeżeli istnieją) dla funkcji o podanych wykresach:

a)


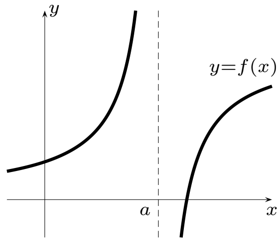
b)


c)


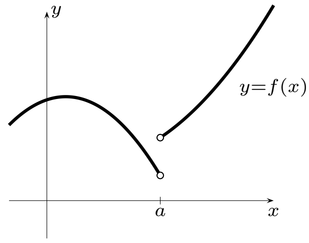
d)



e)



f)



7.4. Wyznaczyć punkty nieciągłości podanych funkcji i określić ich rodzaj:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2+x+2} & \text{dla } x \neq 1,\, 2 \\ 0 & \text{dla } x = 1, \\ 1 & \text{dla } x = 2; \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{dla } x \in (0,1) \cup (1,\infty), \\ 3 & \text{dla } x = 1; \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|+x}{x^2} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$ **e)** $f(x) = \operatorname{sgn} \Big[x(x-1)\Big];$ **f)** $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos \dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$

7.5. Uzasadnić, że podane równania mają jednoznaczne rozwiązania we wskazanych przedziałach:

a) $x^3 + 6x - 2 = 0,\ [0,1];$ **b)** $x \sin x = 7,\ \left[2\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right];$ **c)** $1 = \dfrac{\sin x}{2} + x,\ \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right];$

d) $x^{100} + x - 1 = 0,\ \left[\dfrac{1}{2}, 1\right];$ **e)** $3^x + x = 3,\ [0,1];$ **f)** $x2^x = 1,\ [0,1].$

Wyznaczyć rozwiązania równania **a)** 0.125.

Lista 8

8.1*. Korzystając z twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów uzasadnić, że podane zagadnienia ekstremalne mają rozwiązania:

a) wśród stożków wpisanych w kulę o promieniu r istnieje ten, który ma największą objętość;

b) wśród trójkątów prostokątnych wpisanych w koło o promieniu r istnieje ten, który ma największy obwód;

c) wśród prostokątów wpisanych w trójkąt równoboczny o boku a istnieje ten, który ma największe pole (założyć, że dwa wierzchołki prostokąta należą do ustalonego boku trójkąta).

8.2. Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = |x-1|$, $x_0 = 1$; **b)** $f(x) = 2x - |x|$, $x_0 = 0$; **c)** $f(x) = |x-\pi|^3 \sin x$, $x_0 = \pi$;

d*) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leqslant 2, \\ 2^x & \text{dla } x > 2, \end{cases}$ $x_0 = 2;$ **e*)** $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{dla } x > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ $x_0 = \dfrac{\pi}{2};$ **f*)** $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0.$

Naszkicować wykresy funkcji **a)**, **b)**, **d)** i **e)**.

8.3. Korzystając z definicji obliczyć pochodne funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 3x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$; **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$;

c) $f(x) = \sqrt{x}$, gdzie $x > 0$; **d)** $f(x) = \operatorname{tg} x$, gdzie $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

8.4. Badając pochodne jednostronne rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \left|x^2 - x\right|,\quad x_0 = 1;$ **b)** $f(x) = \sin x \cdot \operatorname{sgn}(x),\quad x_0 = 0;$

c) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg} x & \text{dla } -\frac{\pi}{2}<x\leqslant 0,\\ \sin x & \text{dla } 0<x<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ $x_0=0$; **d)** $f(x)=\begin{cases}\frac{x(x-1)}{2} & \text{dla } x<1,\\ \sqrt{x}-1 & \text{dla } x\geqslant 1,\end{cases}$ $x_0=1$.

Naszkicować wykresy tych funkcji.

Lista 9

9.1. Zbadać z definicji, czy podane funkcje mają pochodne niewłaściwe w punkcie $x_0=0$:

a) $f(x)=3-\sqrt[5]{x}$; **b)** $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt[3]{x}$;

c) $f(x)=\sqrt{|\sin x|}$; **d*)** $f(x)=\sqrt{|x|+\sqrt{|x|}}$.

9.2. Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodne funkcji:

a) $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$; **b)** $y=3\cos x+\operatorname{tg} x$; **c)** $y=\dfrac{e^{x+1}}{\sin x}$;

d) $y=\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)e^x$; **e)** $y=\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)$; **f)** $y=e^x\operatorname{arc\,tg} x$;

g) $y=\ln\left(\sin^2 x+1\right)$; **h)** $y=\sqrt[3]{\arcsin\left(x^2\right)}$; **i)** $y=e^{e^x}$;

j) $y=\dfrac{2^{\sin^2 x}}{3^{\cos^2 x}}$; **k*)** $y=x^{\operatorname{tg} x}$; **l*)** $y=\sqrt[x]{x}$.

9.3*. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć $f^{-1}(y_0)$, jeżeli:

a) $f(x)=x+\ln x,\ \ y_0=e+1$; **b)** $f(x)=\cos x-3x,\ \ y_0=1$;

c) $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}+\sqrt[7]{x},\ \ y_0=3$; **d)** $f(x)=x^3+3^x,\ \ y_0=4$.

9.4. Obliczyć f', f'', f''' funkcji:

a) $f(x)=4x^7-5x^3+2x$; **b)** $f(x)=x^3-\dfrac{2}{x}$; **c)** $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$;

d) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$; **e)** $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$; **f)** $f(x)=x^3\ln x$.

9.5. Napisać równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{2},\ (1,f(1))$; **b)** $f(x)=\ln\left(x^2+e\right),\ (0,f(0))$; **c)** $f(x)=e^{\operatorname{tg} x},\ \left(\dfrac{\pi}{4},f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$;

d) $f(x)=\sqrt{2^x+1},\ (3,f(3))$; **e)** $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2},\ \left(\sqrt{2},f\left(\sqrt{2}\right)\right)$; **f*)** $f(x)=\sqrt[x]{x},\ (e,f(e))$.

Lista 10

10.1.

a) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=x^4-2x+5$, która jest równoległa do prostej $y=2x+3$.

b) Znaleźć styczną do wykresu funkcji $f(x)=\sqrt{x}$, która tworzy kąt $\dfrac{\pi}{4}$ z dodatnią częścia osi Ox.

c) Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=x\ln x$, która jest prostopadła do prostej $2x+6y-1=0$.

d) Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=x\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$, w punkcie jego przecięcia z prostą $\pi x=4y$.

e) Wyznaczyć równanie prostej, która jest wspólną styczną wykresów funkcji $f(x)=x^2$ i $g(x)=(x-2)^2+4$.

10.2.

a) Obliczyć kąty, pod jakimi przecinają się wykresy funkcji:

i) $f(x)=x^2,\ g(x)=\sqrt[3]{x},\ x>0$; ii) $f(x)=4-x,\ g(x)=4-\dfrac{x^2}{2},\ x>0$;

iii) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=\sqrt{x},\ x>0$; iv) $f(x)=\operatorname{tg} x,\ g(x)=\operatorname{ctg} x,\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

b) Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, wykresy funkcji $y = e^{ax}$, $y = e^{-x}$ przetną się pod kątem prostym?

10.3. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości wyrażeń:

a) $\sqrt[3]{7.999}$; **b)** $\dfrac{1}{\sqrt{3.98}}$; **c)** $\ln \dfrac{2001}{2000}$;

d) $\ln 0.9993$; **e)** $e^{0.04}$; **f)** $\arccos 0.499$;

g) $\dfrac{1}{\frac{1}{2} + \sin \frac{33\pi}{200}}$; **h)** $\dfrac{2}{1 + e^{0.005}}$; **i*)** $\ln\left(0.2 + \sqrt{1 + 0.04}\right)$.

10.4.

a) Fragment terenu ma kształt trójkąta równoramiennego o boku $b = 200\,\mathrm{m}$. Kąt przy wierzchołku tego trójkata, zmierzony z dokładnością $0.01\,\mathrm{rad}$ wynosi $\frac{\pi}{3}$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole tego terenu?

b) Objętość kulki metalowej, wyznaczona z dokładnością $1\,\mathrm{cm}^3$, wynosi $36\pi\,\mathrm{cm}^3$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć średnicę tej kuli?

c) Do szybu puszczono swobodnie kamień i zmierzono czas jego spadania z dokładnością $0.1\,\mathrm{s}$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można wyznaczyć głębokość sztolni, jeżeli czas spadania kamienia wyniósł $4.1\,\mathrm{s}$? Przyjąć $g = 9.8\,\mathrm{m/s}^2$.

d) Średnica kuli zmierzona z dokładnością 0.1 mm wynosi 21.7 mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość tej kuli?

e) Przekątna sześcianu zmierzona z dokładnością 1 mm wynosi 14.3 cm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole powierzchni całkowitej tego sześcianu?

f) W biegu na 100 m czas mierzy się z dokładnością 0.01 s. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć średnią prędkość zawodniczki, jeśli uzyskała ona czas 12.50 s?

10.5*. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnić podane nierówności:

a) $|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y| \leqslant |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$; **b)** $\ln \dfrac{y}{x} < y - x$ dla $1 \leqslant x < y$;

c) $x \leqslant \arcsin x \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ dla $0 \leqslant x < 1$; **d)** $e^x > ex$ dla $x > 1$.

Lista 11

11.1. Napisać wzory Taylora z resztą Lagrange'a dla podanych funkcji f, punktów x_0 oraz n :

a) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$, $n = 4$; **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$, $n = 2$; **c)** $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \pi$, $n = 3$;

d) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$, $n = 5$; **e)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 2$, $n = 3$; **f)** $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$, $n = 4$.

11.2. Napisać wzory Maclaurina z n-tą resztą Lagrange'a dla funkcji:

a) $f(x) = \sin \dfrac{x}{3}$; **b)** $f(x) = \operatorname{ch} x$; **c)** $f(x) = \cos x$; **d)** $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

11.3. Oszacować dokładności podanych wzorów przybliżonych na wskazanych przedziałach:

a) $\operatorname{tg} x \approx x$, $|x| \leqslant \dfrac{\pi}{12}$; **b)** $\cos^2 x \approx 1 - x^2$, $|x| \leqslant 0.1$;

c) $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$, $|x| \leqslant 0.25$; **d)** $\ln(1 - x) \approx -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$, $|x| < 0.1$.

11.4. Stosując wzór Maclaurina obliczyć:

a) $\dfrac{1}{e}$ z dokładnością 10^{-3}; **b)** $\sqrt[3]{0.997}$ z dokładnością 10^{-3};

c) $\ln 1.1$ z dokładnością 10^{-4}; **d)** $\sin 0.1$ z dokładnością 10^{-5}.

11.5. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(2^x+1)}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln\sin\frac{\pi}{2}x}{\ln x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{arc\,tg} x}{x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4}$; **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty} x\operatorname{arc\,ctg} x$;

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$; **h)** $\lim\limits_{x\to \pi^-} (\pi-x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; **i)** $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right)$;

j) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$; **k)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x\right)^x$; **l)** $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$.

Lista 12

12.1. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji:

a) $f(x)=x^3-30x^2+225x$; **b)** $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}-x^2$; **c)** $f(x)=4x+\dfrac{1}{x}$;

d) $f(x)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$; **e)** $f(x)=x-3\sqrt[3]{x}$; **f)** $f(x)=xe^{-3x}$;

g) $f(x)=x\ln^2 x$; **h)** $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$; **i)** $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$.

12.2*. Uzasadnić tożsamości:

a) $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,ctg} x=\dfrac{\pi}{2}$ dla $x\in\mathbb{R}$; **b)** $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=2\operatorname{arc\,tg} x$ dla $x\in(-1,1)$;

c) $\operatorname{arc\,tg} x=\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1-x}{1+x}$ dla $x\in(-1,\infty)$; **d)** $\arcsin x=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x\in(-1,1)$.

12.3. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x)=x^3-4x^2$; **b)** $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; **c)** $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^4}$;

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$; **e)** $f(x)=x-\sqrt{x}$; **f)** $f(x)=\left|x^2-5x-6\right|$;

g) $f(x)=x\ln x$; **h)** $f(x)=\sqrt{3x-x^3}$; **i)** $f(x)=2\operatorname{arc\,tg} x-\ln\left(1+x^2\right)$.

12.4. Znaleźć wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

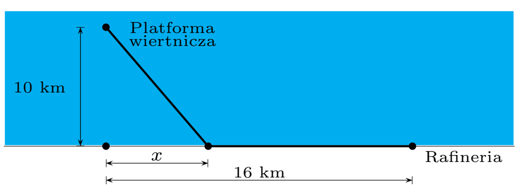
a) $u(x)=2x^3-15x^2+36x,\ [1,5]$; **b)** $v(x)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1-x}{1+x},\ [0,1]$;

c) $w(x)=(x-3)^2e^{|x|},\ [-1,4]$; **d)** $z(x)=1-\left|9-x^2\right|,\ [-5,1]$;

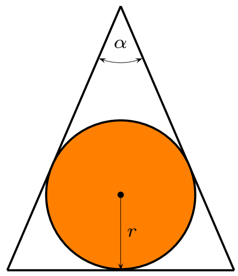
e) $g(x)=x-2\sqrt{x},\ [0,5]$; **f)** $h(x)=2\sin x+\sin 2x,\ \left[0,\dfrac{3}{2}\pi\right]$.

Lista 13

13.1. a) Platforma wiertnicza jest zakotwiczona na morzu 10 km od brzegu. Ropa z tej platformy będzie dostarczana rurociągiem do rafinerii położonej nad brzegiem morza, 16 km od punktu brzegu najbliższego platformie. Koszt ułożenia 1 km rurociągu na dnie morza wynosi 200 000 euro, a na lądzie – 100 000 euro. Do którego miejsca na brzegu należy doprowadzić rurociąg, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

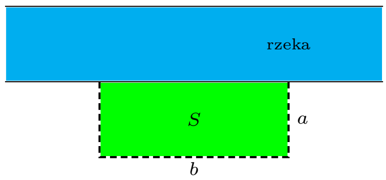


b) Jaka powinna być miara kąta α przy wierzchołku trójkata równoramiennego o danym polu, aby promień koła r wpisanego w ten trójkąt był największy?



c) Prostopadłościenny kontener ma mieć pojemność $22.50\,\mathrm{m}^3$ i kwadratową podłogę. Koszt $1\,\mathrm{m}^2$ blachy potrzebnej do wykonania jego podłogi i pokrywy wynosi 20 zł, a ścian bocznych – 30 zł. Jakie powinny być wymiary kontenera, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

d) Jakie powinny być wymiary a, b prostokątnego pola o powierzchni S, którego jednym naturalnym bokiem jest brzeg rzeki, aby na jego ogrodzenie zużyć jak najmniej siatki?



e) Odcinek o długości l podzielić na dwie części tak, aby suma pól kwadratów zbudowanych na tych częściach była najmniejsza.

13.2. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia funkcji:

a) $f(x) = xe^{-x}$; **b)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+12}$; **c)** $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$; **e)** $f(x) = x - \dfrac{2}{3}x^3 - 4\ln|x|$; **f)** $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{8}\sin 2x$;

g) $f(x) = e^{\operatorname{arc\,tg} x}$; **h)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

13.3. Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji i następnie sporządzić ich wykresy:

a) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$; **b)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$; **c)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$;

d) $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{x^2}$; **e)** $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$; **f)** $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

Lista 14

14.1. Obliczyć podane całki nieoznaczone:

a) $\displaystyle\int \left(3\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^3} - 2x\sqrt{x}\right) dx$; **b)** $\displaystyle\int \frac{(1-x)\,dx}{1-\sqrt[3]{x}}$; **c)** $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$;

d) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos x - \sin x}$; **e)** $\displaystyle\int \frac{x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}}\,dx$; **f)** $\displaystyle\int \frac{2^x - 5^x}{10^x}\,dx$.

14.2. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć całki nieoznaczone:

a) $\displaystyle\int xe^{-3x}\,dx$; **b)** $\displaystyle\int x^2 2^x\,dx$; **c)** $\displaystyle\int \sqrt{x}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx$; **d)** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$;

e) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$; **f)** $\displaystyle\int \frac{\arccos x\,dx}{\sqrt{x+1}}$; **g)** $\displaystyle\int \ln(x+1)\,dx$; **h)** $\displaystyle\int \arccos x\,dx$;

i) $\displaystyle\int e^{2x}\sin x\,dx$; **j)** $\displaystyle\int \sin x\sin 3x\,dx$; **k)** $\displaystyle\int \sin 3x\cos x\,dx$; **l)** $\displaystyle\int \cos x\cos 5x\,dx$.

14.3. Stosując odpowiednie podstawienia obliczyć całki nieoznaczone:

a) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; **b)** $\int \frac{\sqrt{1+4x}}{x}\,dx$; **c)** $\int (x+1)\sin\left(x^2+2x+2\right)\,dx$; **d)** $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin x}}$;

e) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$; **f)** $\int (5-3x)^{10}\,dx$; **g)** $\int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}\,dx$; **h)** $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$;

i) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$; **j)** $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$; **k)** $\int \frac{5\sin x\,dx}{3-2\cos x}$; **l)** $\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

14.4*. Obliczyć całki nieoznaczone:

a) $\int (|x|+1)\,dx$; **b)** $\int \min\left\{x, x^2\right\}\,dx$; **c)** $\int \left|1-x^2\right|\,dx$; **d)** $\int e^{|x|}\,dx$.

Lista 15

15.1. Obliczyć podane całki z ułamków prostych pierwszego rodzaju:

a) $\int \frac{dx}{(x-3)^7}$; **b)** $\int \frac{dx}{x+5}$; **c)** $\int \frac{5\,dx}{(2-7x)^3}$; **d)** $\int \frac{8\,dx}{9x+20}$.

15.2. Obliczyć podane całki z ułamków prostych drugiego rodzaju:

a) $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$; **b)** $\int \frac{(6x+3)\,dx}{x^2+x+4}$; **c)** $\int \frac{(4x+2)\,dx}{x^2-10x+29}$;

d) $\int \frac{(x-1)\,dx}{9x^2+6x+2}$; **e*)** $\int \frac{dx}{\left(x^2-4x+5\right)^2}$; **f*)** $\int \frac{5\,dx}{\left(x^2+2\right)^3}$.

15.3. Obliczyć podane całki z funkcji wymiernych:

a) $\int \frac{(x+2)\,dx}{x(x-2)}$; **b)** $\int \frac{x^2\,dx}{x+1}$; **c)** $\int \frac{dx}{(x-1)x^2}$; **d)** $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$;

e) $\int \frac{(4x+1)\,dx}{2x^2+x+1}$; **f)** $\int \frac{(3x-1)\,dx}{x^2-x+1}$; **g)** $\int \frac{dx}{x^2+2x+8}$; **h)** $\int \frac{2\,dx}{x^2+6x+18}$;

i) $\int \frac{(5-4x)\,dx}{x^2-4x+20}$; **j)** $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+2x+5}$; **k)** $\int \frac{x(x+2)\,dx}{x^2+2x+2}$; **l)** $\int \frac{dx}{x\left(x^2+4\right)}$.

15.4. Obliczyć podane całki z funkcji trygonometrycznych:

a) $\int \sin^3 x\,dx$; **b)** $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$; **c)** $\int \cos^4 x\,dx$;

d) $\int \sin^3 x\cos^6 x\,dx$; **e)** $\int \cos^2 x\cos 2x\,dx$; **f*)** $\int \sin^2 2x\sin^2 x\,dx$.

15.5. Obliczyć podane całki z funkcji trygonometrycznych:

a) $\int \frac{dx}{\sin x+\operatorname{tg} x}$; **b)** $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x}\,dx$; **c)** $\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}$;

d) $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{1+\cos x}$; **e)** $\int \frac{dx}{1-\operatorname{tg} x}$; **f)** $\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\cos^3 x}$;

g) $\int \frac{dx}{\cos x}$; **h)** $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$; **i)** $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}$.