Analiza Matematyczna 2.2 A (MAT 1425)   2017/2018

Opracowanie: dr Marian Gewert, doc. Zbigniew Skoczylas

Lista zdań obejmuje cały materiał kursu i jest podzielona na 15 jednostek – ćwiczeń o numerach od 1 do 15. Na zajęciach należy rozwiązać jeden lub dwa podpunkty z każdego zadania. Pozostałe podpunkty przeznaczone są do samodzielnej pracy studentów. Trudniejsze zadania oznaczone są gwiazdką.

Uzdolnionych studentów zachęcamy do przygotowania się w czasie semestru i następnie udziału w egzaminie na ocenę celującą z analizy matematycznej 2. Zadania z egzaminów z ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej http://wmat.pwr.edu.pl/studenci/kursy-ogolnouczelniane/egzaminy-na-ocene-celujaca oraz w książce [5].

Ćwiczenia pierwsze

---

1. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-x}$; (b) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$; (c) $\displaystyle\int_{2\pi}^\infty x\cos x\,dx$; (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{e^{-x}+1}}$; (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+6x+25}$; (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xe^{2x}\,dx$.

2. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$; (b) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{dx}{\left(\sqrt{x}+3\right)^2}$; (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x(x+1)\,dx}{x^4+x+1}$; (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(2^x+1)\;dx}{3^x+1}$; (e) $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{(x+\sin x)\,dx}{x^3}$; (f) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{(3+\cos x)\;dx}{\sqrt{x}+2}$.

3. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\,dx}{x\,(x+1)}$; (b) $\displaystyle\int_5^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^5-3}}$; (c) $\displaystyle\int_2^\infty \left(e^{1/x}-1\right)\,dx$; (d) $\displaystyle\int_1^\infty \sin^2\frac{1}{x}\,dx$; (e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2\,dx}{x^3-\sin x}$.

4. (a) Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y=\dfrac{1}{x^2+9}$ oraz osią Ox.

(b) Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi Ox obszaru $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant e^{-x}\right\}$.

(c) Uzasadnić, że pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x\geqslant 1)$ wokół osi Ox ma skończoną wartość.

5. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$; (b) $\displaystyle\int_0^e \frac{\ln x\,dx}{x}$; (c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{dx}{\sin x}$; (d) $\displaystyle\int_3^5 \frac{2^x\,dx}{\sqrt{2^x-8}}$; (e) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x(x+1)}$.

6. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{x\sqrt{x}}$; (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x\,dx}{x^3}$; (c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$; (d*) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^4}}$.

7. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\left(x^3+1\right)\,dx}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}$; (b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^3 x\,dx}{x^4}$; (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(e^x-1)\;dx}{\sqrt{x^3}}$; (d*) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$; (e*) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2-\sqrt{x}}$.

8. Wyznaczyć wartości główne całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3\cos x\,dx}{x^2+4}$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x\,dx}{e^x+1}$; (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-|x+5|}\,dx$; (d) $\displaystyle\int_{-4}^9 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$; (e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x^2}\,dx$.

Ćwiczenia drugie

9. Znaleźć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

10. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{e^{2n}+1}$.

11. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+2}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+e^n}{e^n+4^n}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n}{n3^n+2^n}$.

12. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{\sqrt{2n^6-1}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4+1}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-1}{3^n-1}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}4^n\ln\left(1+3^{-n}\right)$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi/n)}{\sin(\pi/n^2)}$; (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!+1}{(n+2)!}$.

13. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2016^n}{(2n)!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{n^4+1}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\pi^n n!}$; (e*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

14. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^{2n}}{(3n^2+1)^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n+5^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n+1}\right)^n$.

15. Wykazać zbieżność odpowiedniego szeregu i następnie na podstawie warunku koniecznego zbieżności szeregów uzasadnić podane równości:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2016}}{3^n}=0$; (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$; (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=\infty$; (d*) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(3n)!(4n)!}{(5n)!(2n)!}=0$.

16. Korzystając z twierdzenia Leibniza uzasadnić zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^n+4^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$.

Ćwiczenia trzecie

17. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n+1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2n}{3n+5}\right)^n$; (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$.

18. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{ne^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(4x-12)^n$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+6)^n}{3^n-2^n}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(x+1)^{2n}}{n+3}$.

19. Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i określić przedziały ich zbieżności:

(a) $\frac{5}{1-2x}$; (b) $\sin\frac{x}{2}$; (c) x^2e^{-x}; (d) $\frac{x^3}{16+x^2}$; (e) $\cosh x$; (f) $\sin^2 x$.

20. Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych obliczyć pochodne:

(a) $f^{(50)}(0)$, $f(x)=x^2\cos x$; (b) $f^{(2015)}(0)$, $f(x)=xe^{-x}$;

(c) $f^{(11)}(0)$, $f(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$; (d) $f^{(10)}(0)$, $f(x)=x\sin^2\frac{x}{2}$.

21. Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych wyznaczyć szeregi Maclaurina funkcji:

(a) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$; (b) $f(x)=xe^{-x^2}$; (c) $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$; (d) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$.

22. Wykorzystując twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych pokazać, że dla każdego $x\in(-1,1)$ prawdziwe są równości:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^3}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$.

23. Obliczyć sumy szeregów liczbowych:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}$; (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{5^n}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)4^n}$.

Wskazówka. Wykorzystać równości z poprzedniego zadania.

Ćwiczenia czwarte

---

24. Na przedziale $[-\pi,\pi]$ wyznaczyć szereg Fouriera funkcji $f(x)=\begin{cases}1 & \text{dla } \pi/2<|x|\leqslant\pi,\\ 0 & \text{dla } |x|\leqslant\pi/2\end{cases}$ i starannie naszkicować wykres jego sumy.

25. (a) Wyznaczyć sinusowy szereg Fouriera funkcji $f(x)=1-x$ określonej na przedziale $(0,1)$ i starannie naszkicować wykres jego sumy na przedziale $[-1,1]$.

(b) Wyznaczyć cosinusowy szereg Fouriera funkcji $f(x)=\sin x$ określonej na przedziale $[0,\pi]$ i starannie naszkicować wykres jego sumy na przedziale $[-\pi,\pi]$.

26. (a) Wyznaczyć szereg Fouriera funkcji okresowej, o okresie 2π takiej, że $f(x)=|x|$ dla $-\pi<x<\pi$. Korzystając z otrzymanego rozwinięcia uzasadnić, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

(b) Wyznaczyć szereg Fouriera funkcji okresowej, o okresie 2π takiej, że $f(x)=x^2$ dla $-\pi<x<\pi$. Korzystając z otrzymanego rozwinięcia uzasadnić, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

Ćwiczenia piąte

---

27. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x,y)=\ln(y-\sin x)$; (b) $f(x,y)=\sqrt{\frac{y-2}{x+1}}$; (c) $f(x,y)=\frac{x^2y}{\sqrt{x^2-y}}$; (d) $f(x,y)=\ln\frac{x^2+y^2-9}{16-x^2-y^2}$;

(e) $g(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{2-z}$; (f) $g(x,y,z)=\arccos\left(x^2+y^2+z^2-9\right)$.

28. Naszkicować wykresy funkcji:

(a) $f(x,y) = 1 - 2\sqrt{x^2+y^2}$; (b) $f(x,y) = \sqrt{3+2x-x^2-y^2}$; (c) $f(x,y) = x^2+2x+y^2-6y+3$;

(d) $f(x,y) = \cos x$; (e) $f(x,y) = 1 - y^2$; (f*) $f(x,y) = \sqrt{y^2-x^2}$.

*** 29.** Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^4-y^4\right)}{x^2+y^2}$; (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$; (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2\cos\dfrac{1}{x^4+y^4}$.

30. Korzystając z definicji obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu f_x, f_y funkcji f we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$, $(0,1)$; (b) $f(x,y) = \sqrt{x^6+y^4}$, $(0,0)$.

31. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f i g:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^3}{xy^2}$; (b) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1-xy}{x+y}$; (c) $f(x,y) = e^{\cos\frac{x}{y}}$;

(d) $f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$; (e) $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)$; (f) $g(x,y,z) = x^2 + \dfrac{xz}{y} + yz^3$;

(g) $g(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$; (h) $g(x,y,z) = \cos(x\sin(y\cos z))$; (i) $g(x,y,z) = \sqrt{x^2+\sqrt{y^2+\sqrt{z^2+1}}}$.

Ćwiczenia szóste

*** 32.** Sprawdzić, że funkcja f spełnia równania:

(a) $f(x,y) = \ln\left(x^2+xy+y^2\right)$, $\quad xf_x + yf_y = 2$; (b) $f(x,y) = \sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$, $\quad xf_x + yf_y = \dfrac{f}{2}$.

33. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funcji f i g:

(a) $f(x,y) = \cos\left(x^2+y^2\right)$; (b) $f(x,y) = ye^{xy}$; (c) $f(x,y) = x^2 + \dfrac{y^3}{x}$;

(d) $f(x,y) = y\ln\dfrac{x}{y}$; (e) $g(x,y,z) = \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+z^2}}$; (f) $g(x,y,z) = \ln\left(x+y^2+z^3+1\right)$.

Zauważyć, że odpowiednie pochodne cząstkowe mieszane są równe.

34. Sprawdzić, że podane funkcje spełniają warunek $f_{xx} + f_{yy} = 0$ (równanie Laplace'a):

(a) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$; (b) $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$; (c) $f(x,y) = \cos x\cosh y$.

35. Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

(a) $z = x^2\sqrt{y+1}$, $\quad (1,3,z_0)$; (b) $z = e^{x+2y}$, $\quad (2,-1,z_0)$; (c) $z = \dfrac{\arcsin x}{\arccos y}$, $\quad \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, z_0\right)$;

(d) $z = (2+x-3y)^4$, punkt wspólny wykresu i osi Oz; (e) $z = e^{x+y} - e^{4-y}$, punkt wspólny wykresu i osi Ox.

36. (a) Na wykresie funkcji $z = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$ wskazać punkty, w których płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny $x+y-z=5$.

(b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = x^2+y^2$, która jest prostopadła do prostej $x=t$, $y=t$, $z=2t$, $t\in\mathbb{R}$.

Ćwiczenia siódme

---

37. (a) Wysokość i promień podstawy walca zmierzono z dokładnością ± 1 mm. Otrzymano $h = 350$ mm oraz $r = 145$ mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość V tego walca?

(b) Krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 12$ m. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu d, jeżeli długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2 cm.

(c) Oszacować błąd względny δ_V objętości prostopadłościamu V, jeżeli pomiaru jego boków x, y, z dokonano z dokładnością odpowiednio Δ_x, Δ_y, Δ_z.

*** 38.** Sprawdzić, że podane funkcje spełniają wskazane równania:

(a) $z = f\left(x^2 + y^2\right), \quad yz_x - xz_y = 0;$ (b) $z = xf\left(\sin(x-y)\right), \quad z_x + z_y = \dfrac{z}{x};$

(c) $z = x^n f\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad xz_x + yz_y = nz\ (n \in \mathbb{N});$ (d*) $z = \dfrac{x}{y}g(x) + h\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad xyz_{xy} + y^2 z_{yy} + xz_x + 2yz_y = 0.$

39. Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \ (x_0,y_0) = (0,0), \ \boldsymbol{v} = \left(\sqrt{3}/2,\ 1/2\right);$

(b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}, \ (x_0,y_0) = (1,0), \ \boldsymbol{v} = \left(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\right).$

40. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2, \ (x_0,y_0) = (-3,4), \ \boldsymbol{v} = (12/13,\ 5/13);$

(b) $f(x,y) = x - \dfrac{y}{x^2} + y, \ (x_0,y_0) = (1,1), \ \boldsymbol{v} = (3/5,\ -4/5);$

(c) $g(x,y,z) = e^{x^2y-z}, \ (x_0,y_0,z_0) = (-1,1,-1), \ \boldsymbol{v} = (2/3, -2/3, 1/3)\,.$

41. (a) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = y - x^2 + 2\ln(xy)$ w punkcie $(-1/2,\ -1)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ tworzącego kąt α z dodatnią częścią osi Ox. Dla jakiego kąta α pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość największą?

(b) Wyznaczyć wersory $\boldsymbol{v}$, w kierunku których funkcja $f(x,y) = \sqrt{e^x}\left(x + y^2\right)$ w punkcie $(0,2)$ ma pochodną kierunkową równą 0.

42. Obliczyć gradienty podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y) = x^3 + xy^2 + 2,\ (1,-2);$ (b) $f(x,y) = \ln(x + \ln y),\ (e,1);$ (c) $f(x,y) = (1+xy)^y,\ (0,0);$

(d) $g(x,y,z) = x\sqrt{y} - e^z \ln y,\ (1,0,0);$ (e) $g(x,y,z) = \dfrac{x}{y + \sin z},\ (0,1,\pi);$ (f) $g(x,y,z) = \sqrt{x + \sqrt{y + \sqrt{z}}},\ (1,1,1).$

Ćwiczenia ósme

---

43. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y;$ (b) $f(x,y) = xe^{-y} + \dfrac{1}{x} + e^y;$ (c) $f(x,y) = xy^2(12 - x - y)\ (x,y > 0);$

(d) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y;$ (e) $f(x,y) = e^3 + y^3 - 3xy;$ (f) $f(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y\ (x,y > 0);$

(g) $f(x,y) = xy + \ln y + x^2;$ (h) $f(x,y) = e^{x-2y} + e^{y-x} + e^{6+y};$ (i) $f(x,y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y).$

44. Wyznaczyć ekstrema podanych funkcji, których argumenty spełniają wskazane warunki:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ 3x + 2y = 6;$ (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 8x + 10,\ x - y^2 + 1 = 0;$

(c) $f(x,y) = x^2y + \ln x,\ 8x + 3y = 0;$ (d) $f(x,y) = 2x + 3y,\ x^2 + y^2 = 1.$

45. Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych zbiorach lub w ich dziedzinach naturalnych:

(a) $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy, \ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant 4\right\};$

(b) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{x - y^2};$ (c) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - (x^2 + y^2)};$

(d) $f(x,y) = x^2 - y^2, \ D$ – trójkąt o wierzchołkach $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$;

(e) $f(x,y) = x^4 + y^4, \ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9\right\};$

(f*) $f(x,y) = (x+y)e^{-x-2y}, \ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\right\}.$

46. (a) W trójkącie o wierzchołkach $A = (-1, 5)$, $B = (1, 4)$, $C = (2, -3)$ znaleźć punkt $M = (x_0, y_0)$, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

(b) Jakie powinny być długość a, szerokość b i wysokość h prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności V, aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?

(c) Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:

$$k: \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ z + 1 = 0, \end{cases} \qquad l: \begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$$

(d) Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216\,\mathrm{m}^3$. Do budowy ścian magazynu używane są płyty w cenie $30\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$, do budowy podłogi w cenie $40\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$, a sufitu w cenie $20\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$. Znaleźć długość a, szerokość b i wysokość c magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.

(f) Firma produkuje drzwi wewnętrzne i zewnętrzne. Następnie sprzedaje je odpowiednio po 500 zł i 2000 zł za sztukę. Koszt wyprodukowania x sztuk drzwi wewnętrznych i y zewnetrznych wynosi

$$K(x, y) = x^2 - xy + y^2 \text{ [zł]}.$$

Ile sztuk drzwi każdego rodzaju powinna wyprodukować firma, aby osiągnąć największy zysk?

(g) Na paraboli $y = x^2/2$ wyznaczyć punkt, którego odległość od punktu $P = (4, 1)$ jest najmniejsza.

Ćwiczenia dziewiąte

---

47. Obliczyć całki podwójne po wskazanych prostokątach:

(a) $\displaystyle\iint_R \left(x + xy - x^2 - 2y\right) dxdy$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$; (b) $\displaystyle\iint_R \frac{x\,dxdy}{y^2}$, $R = [1, 2] \times [2, 4]$;

(c) $\displaystyle\iint_R \frac{dxdy}{(x + y + 1)^3}$, $R = [0, 2] \times [0, 1]$; (d) $\displaystyle\iint_R (x \sin(xy))\, dxdy$, $R = [0, 1] \times [\pi, 2\pi]$;

(e) $\displaystyle\iint_R e^{2x-y}\, dxdy$, $R = [0, 1] \times [-1, 0]$; (f) $\displaystyle\iint_R \frac{(x + y)\, dxdy}{e^x}$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

48. Całkę podwójną $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D ograniczony jest krzywymi:

(a) $y = x^2$, $y = x + 2$; (b) $x^2 + y^2 = 4$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$ $(x, y \geqslant 0)$;

(c) $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 51 = 0$; (d) $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 3$ $(x < 0)$.

49. Obliczyć całki iterowane:

(a) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_x^{x^2} \frac{y}{x^2}\, dy$; (b) $\displaystyle\int_1^4 dx \int_x^{2x} x^2 \sqrt{y - x}\, dy$; (c) $\displaystyle\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(x^3 + y^3\right) dy$; (d) $\displaystyle\int_0^3 dy \int_0^y \sqrt{y^2 + 16}\, dx$.

Narysować obszary całkowania.

50. Narysować obszar całkowania, a następnie zmienić kolejność całkowania w całkach:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^{|x|} f(x, y)\, dy$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x, y)\, dy$; (c) $\displaystyle\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x, y)\, dy$;

(d) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x, y)\, dx$; (e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\cos x}^{\sin x} f(x, y)\, dy$; (f) $\displaystyle\int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x, y)\, dy$.

51. Obliczyć całki po obszarach normalnych ograniczonych wskazanymi krzywymi:

(a) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy,\ \ D:\ y=x,\ y=2-x^2;$ (b) $\iint\limits_D x^2y\,dxdy,\ \ D:\ y=-2,\ y=\dfrac{1}{x},\ y=-\sqrt{-x};$

(c) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy,\ \ D:\ y=\sqrt{x},\ x=0,\ y=1;$ (d) $\iint\limits_D \left(xy+4x^2\right)\,dxdy,\ \ D:\ y=x+3,\ y=x^2+3x+3;$

(e) $\iint\limits_D x^2e^{xy}\,dxdy,\ \ D:\ y=x,\ y=1,\ x=0;$ (f) $\iint\limits_D \dfrac{x\,dxdy}{x^2+y^2},\ \ D:\ x=2,\ y=x,\ y=x/2;$

(g) $\iint\limits_D e^{x^2}\,dxdy,\ \ D:\ y=0,\ y=2x,\ x=\sqrt{\ln 3};$ (h) $\iint\limits_D (2x-3y+2)\,dxdy,\ \ D:\ y=0,\ y=\pi,\ x=-1,\ x=\sin y.$

*** 52.** Obliczyć całki podwójne po wskazanych obszarach:

(a) $\iint\limits_D \min(x,y)\,dxdy,\ D=[0,1]\times[0,2];$ (b) $\iint\limits_D \lfloor x+y\rfloor\,dxdy,\ D=[0,2]\times[0,2];$

(c) $\iint\limits_D |x-y|\,dxdy,\ D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant 3-2x\right\};$

(d) $\iint\limits_D \operatorname{sgn}\left(x^2-y^2+2\right)\,dxdy,\ D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leqslant 4\right\}.$

Uwaga. Symbol $\min(a,b)$ oznacza mniejszą spośród liczb a,b, a symbol $\lfloor u\rfloor$ – część całkowitą liczby u.

53. Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych obszarach:

(a) $f(x,y)=\sin x\cos y,\ D=[0,\pi]\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right];$ (b) $f(x,y)=2x-y,\ D:\ 0\leqslant y\leqslant\pi,\ 0\leqslant x\leqslant\sin y.$

Ćwiczenia dziesiąte

---

54. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

(a) $\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant 1,\ \dfrac{x}{\sqrt{3}}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}x;$ (b) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy,\ D:\ x\geqslant 0,\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2;$

(c) $\iint\limits_D y^2e^{x^2+y^2}\,dxdy,\ D:\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1;$ (d) $\iint\limits_D x^2\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant 2y;$

(e) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,dxdy,\ D:\ y\geqslant 0,\ y\leqslant x^2+y^2\leqslant x;$ (f) $\iint\limits_D y\,dxy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant 2x\ (y\leqslant 0);$

(g) $\iint\limits_D \sin\left(x^2+y^2\right)\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant\pi^2;$ (h) $\iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)\,dxdy,\ D:\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 9.$

Obszar D naszkicować we współrzędnych kartezjańskich.

55. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $y^2=4x,\ \ x+y=3,\ \ y=0\ (y\geqslant 0);$ (b) $x^2+y^2-2y=0,\ \ x^2+y^2-4y=0;$

(c) $x+y=4,\ \ x+y=8,\ \ x-3y=0,\ \ x-3y=5;$ (d) $x^2+y^2=2y,\ \ y=\sqrt{3}|x|.$

56. Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami:

(a) $z=\sqrt{25-\left(x^2+y^2\right)},\ z=x^2+y^2-13;$ (b) $x^2+y^2+z^2=4,\ \ z=1\ (z\geqslant 1);$

(c) $x^2+y^2-2y=0,\ \ z=x^2+y^2,\ \ z=0;$ (d) $z=5-x^2-y^2,\ \ z=1,\ \ z=4;$

(e*) $(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ \ z=xy,\ \ z=0;$ (f*) $2z=x^2+y^2,\ \ y+z=4.$

57. Obliczyć pola płatów:

(a) $z=x^2+y^2,\ \ x^2+y^2\leqslant 1;$ (b) $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x^2+y^2-Rx\leqslant 0,\ z\geqslant 0;$ (c) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ 1\leqslant z\leqslant 2;$

(d) część sfery $x^2+y^2+z^2=3$ leżąca wewnątrz paraboloidy $z=\left(x^2+y^2\right)/2.$

58. Znaleźć położenia środków masy obszarów jednorodnych:

(a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant 9\}$; (b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin^2 x\}$;

(c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ |y| \leqslant e^x\}$; (d) D — trójkąt równoramienny o podstawie a i wysokości h;

(e) D — trójkąt równoboczny o boku $2a$, do którego dołączono półkole o promieniu a;

(f) D — kwadrat o boku 1, z którego wycięto półkole o średnicy 1.

59. Obliczyć momenty bezwładności obszarów jednorodnych o masie M, względem wskazanych osi lub punktów:

(a) trójkąt równoboczny o boku a, podstawa; (b) odcinek paraboli o szerokości a i wysokości h, oś symetrii;

(c) kwadrat o boku a, przekątna; (a) ćwiartka koła o promieniu R, oś symetrii;

(e) koło o średnicy D, środek; (f) elipsa o półosiach a, b, oś symetrii.

Ćwiczenia jedenaste

60. Obliczyć podane całki potrójne po wskazanych prostopadłościanach:

(a) $\displaystyle\iiint\limits_U \frac{x\,dxdydz}{yz}$, $U = [1,2] \times [1,e] \times [1,e]$;

(b) $\displaystyle\iiint\limits_U (x+y+z)\,dxdydz$, $U = [1,2] \times [2,3] \times [3,4]$;

(c) $\displaystyle\iiint\limits_U \sin x \sin(x+y) \sin(x+y+z)\,dxdydz$, $U = [0,\pi] \times [0,\pi] \times [0,\pi]$;

(d) $\displaystyle\iiint\limits_U (x+y)e^{x+z}\,dxdydz$, $U = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

61. Całkę potrójną z funkcji $g(x,y,z)$ po obszarze U zamienić na całki iterowane, jeżeli U jest ograniczony powierzchniami o podanych równaniach:

(a) $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$, $z = 6$; (b) $x^2+y^2+z^2 = 25$, $z = 4$, $(z \geqslant 4)$; (c) $z = x^2+y^2$, $z = \sqrt{20-x^2-y^2}$.

*** 62.** Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania:

(a) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x,y,z)\,dz$; (b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} dy \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz$;

(c) $\displaystyle\int_0^3 dz \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} dx \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} f(x,y,z)\,dy$; (d) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{1} f(x,y,z)\,dz$.

63. Obliczyć całki potrójne z podanych funkcji po wskazanych obszarach:

(a) $g(x,y,z) = e^{x+y+z}$, $U : x \leqslant 0,\ -x \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant -x$;

(b) $g(x,y,z) = \dfrac{1}{(3x+2y+z+1)^4}$, $U : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1-x-y$;

(c) $g(x,y,z) = x^2+y^2$, $U : x^2+y^2 \leqslant 4,\ 1-x \leqslant z \leqslant 2-x$;

(d) $g(x,y,z) = x^2y^2$, $U : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$.

Ćwiczenia dwunaste

64. Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć całki po wskazanych obszarach:

(a) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 \, dxdydz,\ \ U: \ x^2+y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 1;$

(b) $\iiint\limits_U xyz \, dxdydz,\ \ U: \ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2};$

(c) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right) dxdydz,\ \ U: \ x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz;$

(d) $\iiint\limits_U (x+y+z) \, dxdydz,\ \ U: \ x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 2-x-y.$

65. Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć całki po wskazanych obszarach:

(a) $\iiint\limits_U \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ U: \ 4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9;$

(b) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right) dxdydz,\ U: \ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2};$

(c) $\iiint\limits_U z^2 \, dxdydz,\ U: \ x^2+y^2+(z-R)^2 \leqslant R^2 \ (R>0);$ (d) $\iiint\limits_U x^2 \, dxdydz;\ U: \ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4x.$

66. Obliczyć objętości obszarów U ograniczonych podanymi powierzchniami:

(a) $x^2+y^2=9, \quad x+y+z=1, \quad x+y+z=5;$ (b) $z=4-x^2, \quad z=y^2-5;$

(c) $z=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}, \quad z=0, \quad x^2+y^2=4;$ (d) $x^2+y^2+z^2=2, \quad y=1 \ (y \geqslant 1).$

67. Wyznaczyć położenia środków masy podanych obszarów jednorodnych:

(a) półkula o promieniu R; (b) stożek o promieniu podstawy R i wysokości H; (c) $U: \ x^2+y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2-x^2-y^2}$.

68. Obliczyć momenty bezwładności obszarów jednorodnych o masie M, względem wskazanych osi:

(a) walec o promieniu podstawy R i wysokości H, oś walca;

(b) stożek o promieniu podstawy R i wysokości H, oś stożka;

(c) kula o promieniu R, oś symetrii;

(d) odcinek paraboloidy o średnicy D i wysokości H, oś obrotu.

Ćwiczenia trzynaste

69. (a) Z pewnej substancji radioaktywnej po upływie 4 lat zostało 20 gram, a po upływie dalszych 4 lat tylko 4 gramy. Wyznaczyć masę substancji w chwili początkowej.

(b) Polon-210 ma okres połowicznego zaniku równy 140 dni. Znaleźć masę tego pierwiastka po 100 dniach, jeżeli jego masa początkowa wynosiła 200 g.

(c) Okres połowicznego zaniku pewnego pierwiastka promieniotwórczego jest równy 100 lat. Ile procent masy początkowej tego pierwiastka pozostanie po i) 10, ii) 50, iii) 200 latach?

70. Scałkować równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

(a) $yy'+4t=0;$ (b) $dy=2ty^2dt;$ (c) $t\left(y^2-1\right)dt+y\left(t^2-1\right)dy=0;$

(d) $2\sqrt{t}y'=\sqrt{1-y^2};$ (e) $y'=1+t+y+ty;$ (f) $y'+4y=y\left(e^{-t}+4\right).$

71. Rozwiązać zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych:

(a) $y' \sin t = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$; (b) $t\sqrt{1-y^2}dt + y\sqrt{1-t^2}dy = 0, \quad y(0) = 1$;

(c) $t(y+1)y' = y, \quad y(e) = 1$; (d) $y \cos t dt - \left(1+y^2\right) dy = 0, \quad y(0) = 1$;

(e) $y' = y^2\left(1+t^2\right), \quad y(0) = -2$; (f) $e^y\left(y'-1\right) = 1, \quad y(0) = 0$.

72. Rozwiązać równania różniczkowe liniowe niejednorodne:

(a) $y' + y = \sin t$; (b) $y' + 2ty = e^{-t^2}$; (c) $ty' - 2y = t^3 \cos t$;

(d) $ty' - 2y = 4t^4$; (e) $ty + e^t - ty' = 0$; (f) $(2t+1)y' = 4t + 2y$.

73. Wyznaczyć rozwiązania zagadnień początkowych dla równań liniowych niejednorodnych:

(a) $y' - y = 1, \; y(3) = 3$; (b) $y' = (y+1)\sin t, \; y(t_0) = y_0$;

(c) $ty' + y = t + 1, \; y(1) = 0$; (d) $y' \sin t \cos t = y + \sin^3 t, \; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Ćwiczenia czternaste

---

74. Napisać równania charakterystyczne liniowych równań różniczkowych o stałych współczynnikach:

(a) $y'' - 2y' + y = 0$; (b) $y'' - 3y = 0$; (c) $4y'' + y' = 0$;

(d) $2y'' - 3y' + 4y = 0$; (e) $y'' = 2y$; (f) $y'' = 4y'^6 - 2y$.

75. Wyznaczyć równania różniczkowe liniowe jednorodne o stałych współczynnikach postaci $y'' + py' + qy = 0$, jeżeli podane są pierwiastki ich wielomianów charakterystycznych:

(a) $\lambda_1 = 2, \; \lambda_2 = 3$; (b) $\lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = 0$; (c) $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$;

(d) $\lambda_1 = i$; (e) $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i$; (f) $\lambda_1 = 2 - i$.

76. Rozwiązać równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach:

(a) $6y'' - 5y' + y = 0$; (b) $y'' - y' - 2y = 0$; (c) $4y'' - 4y + y = 0$;

(d) $y'' + y' + \frac{y}{4} = 0$; (e) $y'' - 4y' + 5y = 0$; (f) $y'' - 2y' + 5y = 0$;

(g) $y'' + 6y' + 18y = 0$; (h) $7y'' + 4y' - 3y = 0$; (i) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

77. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

(a) $y'' + y' - 6y = 0, \; y(0) = 1, y'(0) = 0$; (b) $y'' + 9y = 0, \; y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$;

(c) $y'' - 2y' + y = 0, \; y(1) = 2, y'(1) = 3$; (d) $y'' - 7y' + 12y = 0, \; y(0) = 3, y'(0) = -2$.

Ćwiczenia piętnaste

---

78. Korzystając z metody uzmienniania stałych rozwiązać liniowe, niejednorodne równania różniczkowe:

(a) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$; (b) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2t}$; (c) $y'' - y = \frac{4t^2+1}{t\sqrt{t}}$;

(d) $y'' - 2y' \operatorname{tg} t = 1$; (e) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^t}$; (f) $y'' + 3y' + 2y = \cos\left(e^t\right)$.

79. Korzystając z metody współczynników nieoznaczonych (metoda przewidywania) rozwiązać równania różniczkowe liniowe niejednorodne:

(a) $y'' + 2y' + y = -2$; (b) $y'' - 4y' + 4y = t^2$; (c) $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2t}$;

(d) $y'' + 3y' = 3te^{-3t}$; (e) $y'' + 5y' + 6y = 10(1-t)e^{-2t}$; (f) $y'' + 4y' - 4y = 8\sin 2t$;

(g) $y'' + 9y = 3\sin 3t + 2\cos 3t$; (h) $y'' + \alpha^2 y = \cos \alpha t$, gdzie $\alpha \neq 0$.

80. Rozwiązać zagadnienia początkowe:

(a) $y'' + y = 2(1-t)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$; (b) $y'' - 6y' + 9y = 9t^2 - 12t + 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

(c) $y'' + 6y' + 9y = 10\sin t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$; (d) $y'' + y' = e^{-t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Źródła zadań

[1] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory*, Wrocław 2016.

[2] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania*, Wrocław 2016.

[3] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy*, Wrocław 2012.

[4] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania*, Wrocław 2016.

[5] Z.Skoczylas, *Algebra i analiza. Egzaminy na ocenę celującą*, Wrocław 2016.