ALGEBRA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ
Wszystkie warianty kursu

Zadania z listy oznaczone gwiazdką $(*)$ są nieco trudniejsze albo mają charakter teoretyczny. Jednak nie wychodzą one poza program kursu. Odpowiedzi do zadań z listy można zweryfikować za pomocą programów komputerowych. Istnieje wiele programów do obliczeń numerycznych i symbolicznych. Programy te można wykorzystać np. do rysowania wykresów funkcji, obliczania granic ciągów i funkcji, wyznaczania całek i pochodnych, rozwiązywania równań algebraicznych i różniczkowych, badań statystycznych. Polecamy stronę internetową **Wolfram Alpha** oraz darmowe programy: **Maxima**, **Microsoft Mathematics**, **Octave**, **R**, **Sage**, **Scilab**, a także programy płatne: **Derive**, **Mathematica**, **Matlab**, **Maple**, **Scientific WorkPalce**.

Uzdolnionych studentów zachęcamy do udziału w egzaminach na ocenę celującą z algebry i analizy. Zadania z tych egzaminów można znaleźć na stronie internetowej
http://www.im.pwr.wroc.pl/kursy-ogolnouczelniane/oceny-celujace.html

Opracowanie: dr Marian Gewert, doc. Zbigniew Skoczylas

Lista zadań

Wyrażenia algebraiczne. Indukcja matematyczna

Studenci wydziałów W2 oraz W4 opracowują ten materiał samodzielnie.

1. Podać przykłady liczb rzeczywistych x, y, u, v oraz liczb naturalnych n, m, dla których **nie zachodzą** podane równości:

   a) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$; **b)** $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$; **c)** $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$;
   d) $\operatorname{tg} 2x = 2 \operatorname{tg} x$; **e)** $\frac{x}{y} + \frac{u}{v} = \frac{x+u}{y+v}$; **f)** $(n+m)! = n! + m!$.

2. Obliczyć lub uprościć wyrażenia:

   a) $\frac{3^5 \cdot 3^4}{3^8}$; **b)** $\frac{12^5}{4^4 \cdot 3^6}$; **c)** $\frac{\left(a^2b^3\right)^4}{\left(a^4b^2\right)^3}$; **d)** $\frac{x^{-2}y^4z^{-3}}{x^3y^{-5}z^3}$; **e)** $\sqrt{y\sqrt[3]{x^2\sqrt[5]{x^{15}y^{17}}}}$; **f)** $\frac{0.001^3 \cdot 10^{24}}{100^7}$.

3. Obliczyć:

   a) $\sqrt{7\frac{1}{9}}$; **b)** $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$; **c)** $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

4. Podane wyrażenia zapisać w postaci potęgi 2:

   a) $4^2 \cdot 8^3$; **b)** 2^{3^4}; **c)** $4\sqrt[5]{8}$; **d)** $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$; **e)** $\frac{\sqrt[4]{2}}{16}$; **f)** $\sqrt[3]{\frac{32}{\sqrt{2}}}$.

5. Wyłączyć czynnik spod znaku pierwiastka:

   a) $\sqrt{72}$; **b)** $\sqrt[3]{\frac{250}{81}}$; **c)** $\sqrt[4]{162}$; **d)** $\sqrt{3x^4}$; **e)** $\sqrt[3]{16a^9}$; **f)** $\sqrt[4]{\frac{4a^4}{b^8}}$.

6. Wykonać wskazane działania:

   a) $(u+v)^2 - (u-v)^2$; **b)** $\left(\frac{x^2+y^2}{y} - 2x\right) : \left(x^2 - y^2\right)$;

   c) $\left[\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} - (a+b)\right] \cdot \left(\frac{a}{b} + 1\right)$; **d)** $\frac{a-c}{a^2+ac+c^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{a^2b-bc^2}$.

7. Podane ułamki uwolnić od niewymierności w mianowniku:

   a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; **b)** $\frac{6}{\sqrt[4]{2}}$; **c)** $\frac{11}{5-\sqrt{3}}$; **d)** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; **e)** $\frac{5}{\sqrt[3]{2}+1}$.

8. Wskazać większą z liczb wśród podanych par:

   a) $2^{13},\ 4^7$; **b)** $\sqrt{12}-\sqrt{11}, \sqrt{13}-\sqrt{12}$;

   c) $9^{20},\ 27^{13}$; **d)** $\sqrt[7]{3},\ \sqrt[8]{3}$; **e)** $2\sqrt{38},\ \sqrt{37}+\sqrt{39}$.

9. Uprościć wyrażenia:

   a) $\frac{x^3-8}{x^2-4}$; **b)** $\frac{a^3+27b^3}{a^5+243b^5}$; **c)** $\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^6+y^6}$; **d)** $\frac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}$; **e)** $\frac{(a-b)^5}{(b-a)^3}$.

10. *Uzasadnić, że podane liczby są niewymierne:

    a) $\sqrt{5}$; **b)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; **c)** $\log_2 3$ **d)** $\cos\frac{\pi}{12}$.

11. Za pomocą indukcji matematycznej uzasadnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą tożsamości:

    a) $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$;

    b) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$;

    c) $1+3+\ldots+3^{n-1}=\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)$;

    d) $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

12. Metodą indukcji matematycznej uzasadnić nierówności:

    a) $2^n>n^2$ dla $n\geqslant 5$;

    b) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$ dla $n\in\mathbb{N}$;

    c) $n!>2^n$ dla $n\geqslant 4$;

    d) $(1+x)^n\geqslant 1+nx$ dla $x\geqslant -1$ oraz $n\in\mathbb{N}$ (nierówność Bernoulliego);

    e) $n!<\left(\frac{n}{2}\right)^n$ dla $n\geqslant 6$.

13. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n liczba:

    a) n^5-n jest podzielna przez 5;

    b) 8^n+6 jest podzielna przez 7.

14. *Uzasadnić, że n prostych może podzielić płaszczyznę na maksymalnie $\frac{n(n+1)}{2}+1$ obszarów. Na ile obszarów płaszczyznę można podzielić n okręgami?

15. Zastosować wzór dwumianowy Newtona do wyrażeń:

    a) $(2x+y)^4$; **b)** $\left(c-\sqrt{2}\right)^7$; **c)** $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^5$; **d)** $(\sqrt{u}+\sqrt[4]{v})^8$.

16. *Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona obliczyć sumy:

    a) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$; **b)** $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$; **c)** $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$.

17. **a)** W rozwinięciu dwumianowym wyrażenia $\left(a^3+\frac{1}{a^2}\right)^{15}$ znaleźć współczynnik stojący przy a^5;

    b) W rozwinięciu dwumianowym wyrażenia $\left(\sqrt[4]{x^5}-\frac{3}{x^3}\right)^7$ znaleźć współczynnik stojący przy $\sqrt[4]{x}$.

Geometria analityczna na płaszczyźnie

Studenci wydziałów W2 oraz W4 opracowują ten materiał samodzielnie.

18. Niech $\vec{a} = (-2, 4)$, $\vec{b} = (1, 4)$. Wyznaczyć wektor $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$.

19. Trójkąt jest rozpięty na wektorach $\vec{a}, \vec{b}$. Wyrazić środkowe tego trójkąta przez wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$.

20. Niech $\vec{r}_A, \vec{r}_B$ będą wektorami wodzącymi odpowiednio punktów A, B oraz niech punkt P dzieli odcinek AB w stosunku $2 : 3$. Znaleźć wektor wodzący punktu P.

21. *Za pomocą rachunku wektorowego pokazać, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku.

22. Wyznaczyć cosinus kąta, jaki tworzą wektory:

    a) $\vec{u} = (1, -2)$, $\vec{v} = (3, 5)$;

    b) $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (-1, -7)$.

23. Równoległobok jest rozpięty na wektorach $\vec{a} = (-3, 4)$, $\vec{b} = (1, 2)$. Wyznaczyć kąt ostry między przekątnymi równoległoboku.

24. Długości wektorów $\vec{a}, \vec{b}$ wynoszą odpowiednio $3, 5$. Znamy iloczyn skalarny $\vec{a} \circ \vec{b} = -2$. Obliczyć $\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \circ \left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right)$.

25. Pokazać, że czworokąt o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (5, 2)$, $C = (3, 7)$, $D = (-2, 5)$ jest kwadratem.

26. Wyznaczyć równanie prostej, która przechodzi przez punkt $P = (-1, 3)$ i tworzy kąt 120^o z dodatnią częścią osi Ox.

27. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkty $P_1 = (2, 3)$, $P_2 = (-3, 7)$.

28. Znaleźć przecięcia prostej
$$l : \begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = -6 + t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R},$$
z osiami układu współrzędnych. Czy punkt $P = (4, 7)$ należy do prostej?

29. Znaleźć punkt wspólny prostych:
$$k : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 3 + t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}, \quad l : \begin{cases} x = 2t, \\ y = 3 - t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R},$$

30. Znaleźć równanie prostej, która przechodzi przez punkt $P = (-1, 2)$ i jest

    a) równoległa do prostej $3x - y + 2 = 0$;

    b) prostopadła do prostej $x + y = 0$.

31. Dla jakiej wartości parametru m, odległość punktów $P = (1, 0)$ i $Q = (m + 3, -2)$ jest równa 4?

32. Wyznaczyć odległość punktu $P_0 = (-4, 1)$ od prostej l o równaniu $3x + 4y + 12 = 0$.

33. Znaleźć odległość prostych równoległych l_1, l_2 o równaniach odpowiednio $x - 2y = 0$, $-3x + 6y - 15 = 0$.

34. Obliczyć wysokość trójkąta o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (-1, 3)$, $C = (2, 5)$ opuszczoną z wierzchołka C.

35. *Znaleźć równania dwusiecznych kątów wyznaczonych przez proste o równaniach $3x + 4y - 2 = 0$, $4x - 3y + 5 = 0$.

Krzywe stożkowe

Studenci wydziałów W2 oraz W4 opracowują ten materiał samodzielnie.

36. Napisać równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek o końcach $A = (-1, 3)$, $B = (5, 7)$.

37. Wyznaczyć współrzędne środka i promień okręgu $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 2 = 0$.

38. Znaleźć równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (8, 0)$, $C = (0, 6)$.

39. Znaleźć równanie okręgu, który przechodzi przez punkty $P = (3, 4)$, $Q = (5, 2)$ i ma środek na osi Ox.

40. Wyznaczyć równanie okręgu, który jest styczny do obu osi układu współrzędnych oraz przechodzi przez punkt $A = (5, 8)$. Ile rozwiązań ma zadanie?

41. Znaleźć równanie stycznej okręgu $x^2 + y^2 = 25$:

    a) w punkcie $(-3, 4)$;

    b) przechodzącej przez punkt $(-5, 10)$;

    c) równoległej do prostej $x - y - 4 = 0$;

    d) prostopadłej do prostej $x + 2y = 0$.

42. Wyznaczyć osie, współrzędne ognisk oraz mimośród elipsy

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

43. Punkty $F_1 = (-5, 0)$, $F_2 = (5, 0)$ są ogniskami elipsy. Znaleźć równanie tej elipsy, jeżeli widomo, że jednym z jej wierzchołków jest punkt $W = (0, -3)$

44. Naszkicować elipsę o równaniu $4x^2 - 8x + 9y^2 + 36y + 4 = 0$.

45. Wyznaczyć osie, współrzędne ognisk oraz równania asymptot hiperboli

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

46. Narysować hiperbolę wraz z asymptotami:

$$\begin{aligned} \textbf{a)}\ \frac{(y+5)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} &= 1; \\ \textbf{b)}\ 4x^2 - 25y^2 + 8x &= 0. \end{aligned}$$

47. Wyznaczyć współrzędne ogniska, wierzchołka oraz podać równanie kierownicy paraboli o równaniu: **a)** $y^2 = 12x$; **b)** $y = x^2 + 6x$.

48. Napisać równanie paraboli, której:

    a) kierownicą jest prosta $y = -2$, a punkt $W = (-1, 6)$ - wierzchołkiem;

    b) kierownicą jest prosta $x = 1$, a punkt $W = (5, 1)$ - wierzchołkiem.

49. *Jakie krzywe przedstawiają równania:

    a) $x^2 - y^2 + 4 = 0$; **b)** $(x - y)^2 = 1$; **c)** $x^2 + y^2 = 2xy$?

Macierze

50. Dla podanych par macierzy A, B wykonać (jeśli to jest możliwe) wskazane działania $3A-\frac{1}{2}B$, A^T, AB, BA, A^2:

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -6\\ -8 & 2\end{bmatrix}$;

b) $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -4 & 0\end{bmatrix}$;

c) $A=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 3\\ 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 5\end{bmatrix}$;

d) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ -3 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 4 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$.

51. Rozwiązać równanie macierzowe

$$3\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}-X\right)=X+\begin{bmatrix}4 & 3\\ 0 & 6\\ -1 & 2\end{bmatrix}.$$

52. Znaleźć niewiadome x, y, z spełniające równanie

$$2\begin{bmatrix}x+2 & y+3\\ 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ y & z\end{bmatrix}^T.$$

53. Podać przykłady macierzy kwadratowych A, B, które spełniają podane warunki:

a) $AB\neq BA$; **b)** $AB=\mathbf{0}$, ale $A\neq\mathbf{0}, B\neq\mathbf{0}$; **c)** $A^2=\mathbf{0}$, ale $A\neq\mathbf{0}$.

54. *Uzasadnić, że iloczyn:

a) macierzy diagonalnych tego samego stopnia jest macierzą diagonalną;

b) iloczyn macierzy trójkątnych dolnych tego samego stopnia jest macierzą trójkątną dolną.

55. *Pokazać, że każdą macierz kwadratową można przedstawić jednoznacznie jako sumę macierzy symetrycznej $\left(A^T=A\right)$ i antysymetrycznej $\left(A^T=-A\right)$. Napisać to przedstawienie dla macierzy

$$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 4 & -2\\ -3 & 5 & 2 & 8\\ 2 & 4 & -3 & -4\\ 6 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

56. *Macierze kwadratowe A, B są przemienne, tzn. spełniają równość $AB=BA$. Pokazać, tożsamości:

a) $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$; b) $(BA)^2=A^2B^2$; c) $A^2B^3=B^3A^2$.

57. Dla podanych macierzy A obliczyć A^n dla kilka początkowych liczb naturalnych n, następnie wysunąć hipotezę o postaci tych potęg i uzasadnić ją za pomocą indukcji matematycznej:

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$; **b)** $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$; **c*)** $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

58. *W zbiorze macierzy rzeczywistych znaleźć wszystkie rozwiązania podanych równań:

a) $X^2=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}$; **b)** $X^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ **c)** $X^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

Wyznaczniki

59. Napisać rozwinięcia Laplace'a podanych wyznaczników wg wskazanych kolumn lub wierszy (nie obliczać wyznaczników w otrzymanych rozwinięciach):

a) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & \mathbf{3} \\ -3 & 1 & \mathbf{0} \\ 2 & 5 & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$, trzecia kolumna; **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{vmatrix}$, czwarty wiersz.

60. Obliczyć podane wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

61. Korzystając z własności wyznaczników uzasadnić, że podane macierze są osobliwe:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -2 \\ 7 & 5 & 2 & -5 \\ 5 & 7 & 4 & -4 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

62. Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy kwadratowej A stopnia n spełniającej podane warunki:

a) $A^3 = 4A$ dla $n = 3, 4$; b) $A^T = -A^2$ dla $n = 3, 4$?

63. Obliczyć wyznaczniki podanych macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{2} & 3 & \mathbf{4} & 5 \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & 3 & \mathbf{4} & 5 \\ 3 & 3 & 3 & \mathbf{4} & 5 \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{5} \end{bmatrix}$.

Macierz odwrotna i układy równań liniowych

64. Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej wyznaczyć macierze odwrotne do podanych:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$; **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

65. Korzystając z metody dołączonej macierzy jednostkowej znaleźć macierze odwrotne do podanych:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$; **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -12 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$; **c)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

66. Znaleźć rozwiązania podanych równań macierzowych:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$;

c) $X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

67. Korzystając ze wzorów Cramera wyznaczyć wskazaną niewiadomą z podanych układów równań liniowych:

a) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$, niewiadoma y;

b) $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$, niewiadoma x;

c) $\begin{cases} 2x + 3y + 11z + 5t = 2 \\ x + y + 5z + 2t = 1 \\ 2x + y + 3z + 2t = -3 \\ x + y + 3z + 4t = -3 \end{cases}$, niewiadoma z.

68. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać podane układy równań:

a) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x - 2y - 5z + t = 3 \\ 2x - 3y + z + 5t = -3 \\ x + 2y - 4t = -3 \\ x - y - 4z + 9t = 22 \end{cases}$.

69. **a)** Znaleźć równanie prostej, która przechodzi przez punkty $(1,4), (2,-3)$.

b) Znaleźć trójmian kwadratowy, który przechodzi przez punkty $(-1,2), (0,-1), (2,4)$.

c) Wyznaczyć współczynniki a, b, c funkcji $y = a2^x + b3^x + c4^x$, która w punktach $-1, 0, 1$ przyjmuje odpowiednio wartości $\frac{3}{4}, 1, 1$.

d) Funkcja $y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$ spełnia równanie różniczkowe $y'' - 6y' + 13y = 25\sin 2x$. Wyznaczyć współczynniki A, B.

70. **a)** Dla jakich wartości parametru m, podany układ jednorodny ma niezerowe rozwiązanie

$$\begin{cases} mx + y + 2z = 0 \\ 2x - y + mz = 0 \\ mx + y + 4z = 0 \end{cases} ?$$

b) Dla jakich wartości parametrów a, b, c, d, podany układ równań liniowych jest sprzeczny

$$\begin{cases} x + y = a \\ z + t = b \\ x + z = c \\ y + t = d \end{cases} ?$$

c) Znaleźć wszystkie wartości parametru p, dla których podany układ równań liniowych ma tylko jedno rozwiązanie

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 2x - py + z = 3 \\ 2x + y - pz = 5 \end{cases}.$$

71. **a*)** Rozwiązać układ równań $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \frac{1}{x} & - & \frac{2}{y} & + & \frac{3}{z} & = & 1 \\ \frac{3}{x} & + & \frac{4}{y} & + & \frac{6}{z} & = & 7 \\ \frac{1}{x} & - & \frac{8}{y} & - & \frac{3}{z} & = & -4 \end{array}\right.$.

b*) Znaleźć dodatnie rozwiązania układu równań $\left\{\begin{array}{rcl} xy^2z^3 & = & 2 \\ x^2y^3z^4 & = & 4 \\ x^2yz & = & 2 \end{array}\right.$.

Geometria analityczna w $\mathbb{R}^3$

72. **a)** Dla jakich wartości parametrów p, q wektory $\vec{\boldsymbol{a}} = (1-p, 3, -1)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (-2, 4-q, 2)$ są równoległe?

b) Dla jakich wartości parametru s wektory $\vec{\boldsymbol{p}} = (s, 2, 1-s)$, $\vec{\boldsymbol{q}} = (s, 1, -2)$ są prostopadłe?

73. Obliczyć iloczyn skalarny i wektorowy wektorów $\vec{\boldsymbol{a}} = (1, -2, 5)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (2, -3, -1)$.

74. Znaleźć wersor, który jest prostopadły do wektorów $\vec{\boldsymbol{u}} = (1, 1, 0)$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (0, 1, 1)$.

75. Wyznaczyć cosinus kąta między wektorami $\vec{\boldsymbol{p}} = (0, 3, 4)$, $\vec{\boldsymbol{q}} = (2, 1, -2)$.

76. **a)** Obliczyć pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{\boldsymbol{u}} = (-1, 2, 5)$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (0, 3, 2)$.

b) Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (0, 0, 1)$, $B = (3, 0, 0)$, $C = (0, -5, 0)$.

c) Obliczyć wysokość

77. **a)** Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach: $\vec{\boldsymbol{a}} = (1, 2, 3)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (0, 4, 1)$, $\vec{\boldsymbol{c}} = (-1, 0, 2)$.

b) Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach: $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (0, 4, 1)$, $D = (2, 2, 2)$.

78. Znaleźć równania normalne i parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez punkty:

$P = (1, -1, 0)$, $Q = (2, 5, 7)$, $R = (0, 0, 1)$.

79. **a)** Płaszczyznę $\pi : x + 2y - z - 3 = 0$ zapisać w postaci parametrycznej.

b) Płaszczyznę $\pi : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 + s + t, \\ y & = & -2 - s - 2t, \\ z & = & 3 + 3s - t \end{array}\right.$ przekształcić do postaci normalnej.

80. Znaleźć równanie parametryczne i krawędziowe prostej:

a) przechodzącej przez punkty $A = (-3, 4, 1)$, $B = (0, 2, 1)$.

b) przechodzącej przez punkt $P = (3, -1, 2)$ i przecinającej prostopadle oś Oy.

81. **a)** Prostą $l : \left\{\begin{array}{rcl} x + y - 3 & = & 0 \\ -y + z - 1 & = & 0 \end{array}\right.$ zapisać w postaci parametrycznej.

b) Prostą $l : x = 3,\ y = 2 - 2t,\ z = t$ zapisać w postaci krawędziowej.

82. Wyznaczyć punkt przecięcia:

a) prostej $l : x = t,\ y = 1 - 2t,\ z = -3 + 2t$ oraz płaszczyzny $\pi : 3x - y - 2z - 5 = 0$;

b) płaszczyzn $\pi_1 : x + 2y - z - 5 = 0$, $\pi_2 : x + 2y + 2 = 0$, $\pi_3 : x + y + z = 0$;

c) prostych $l_1 : x = 1 - t,\ y = 1,\ z = -3 + 2t$, $l_2 : x = s,\ y = 3 - 2s,\ z = 2 - 5s$.

83. Obliczyć odległość:

a) punktu $P=(0,1,-2)$ od płaszczyzny $\pi: 3x-4y+12z-1=0$;

b) płaszczyzn równoległych $\pi_1: x-2y+2z-3=0$, $\pi_2: -2x+4y-4z+18=0$;

c) punktu $P=(2,-5,1)$ od prostej $l: x=t,\ y=1-2t,\ z=-3+2t$;

d) prostych równoległych

$$l_1: \begin{cases} x+y+z-3 &= 0 \\ x-2y-z-1 &= 0 \end{cases},\quad l_2: \begin{cases} x+y+z-3 &= 0 \\ x-2y-z+4 &= 0 \end{cases};$$

e) prostych skośnych $l_1: x=1-t,\ y=1,\ z=-3+2t,\quad l_2: x=s,\ y=3-2s,\ z=1-5s$.

84. Wyznaczyć rzut prostopadły punktu $P=(1,-2,0)$ na:

a) płaszczyznę $\pi: x+y+3z-5=0$;

b) prostą $l: x=1-t,\ y=2t,\ z=3t$.

85. Obliczyć kąt między:

a) płaszczyznami $\pi_1: x-y+3z=0$, $\pi_2: -2x+y-z+5=0$;

b) prostą $l: \begin{cases} x+y+z-3 &= 0 \\ x-2y-z-1 &= 0 \end{cases}$ i płaszczyzną $\pi: x+y=0$;

c) prostymi $l_1: x=-t,\ y=1+2t,\ z=-3,\quad l_2: x=0,\ y=-2s,\ z=2+s$.

Liczby zespolone

86. Obliczyć:

a) $(2-5i)+\left(3+i\sqrt{2}\right)$; **b)** $(7+6i)-(8-3i)$; **c)** $(4-i)\cdot(3+4i)$;

d) $\frac{1+i}{6-5i}$; **e)** i^{11}; **f)** $\overline{(-1+2i)}$; **g)** $\overline{(-3i)}$; **h)** $(3+4i)^2$; **i)** $\overline{\left[(2+i)^3\right]}$.

87. Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron podanych równań znaleźć ich rozwiązania:

a) $\overline{z}=(2-i)z$; **b)** $z^2+4=0$; **c)** $(1+3i)\,z+(2-5i)\,\overline{z}=2i-3$; **d*)** $z^3=1$.

88. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki:

a) $\mathrm{Re}\,(z+1)=\mathrm{Im}\,(2z-4i)$; **b)** $\mathrm{Re}\,(z^2)=0$; **c)** $\mathrm{Im}\,(z^2)\leqslant 8$; **d)** $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)>\mathrm{Im}\,(iz)$.

89. Uzasadnić tożsamości:

a) $|\overline{z}|=|z|$; **b)** $z\cdot\overline{z}=|z|^2$; **c)** $|z^n|=|z|^n$, gdzie $z\in\mathbb{C}$ oraz $n\in\mathbb{N}$.

90. Obliczyć moduły podanych liczb zespolonych:

a) -3; **b)** $5-12i$; **c)** $\sqrt{11}+i\sqrt{5}$; **d)** $\frac{3+4i}{4-3i}$; **e)** $(1+2i)\cdot(i-3)$; **f)** $(1+2i)^8$;

g) $(\sin 4\alpha - i\cos 4\alpha)$, gdzie $\alpha\in\mathbb{R}$; **h)** $(\mathrm{ctg}\,\alpha+i)$, gdzie $\alpha\neq n\pi,\ n\in\mathbb{N}$.

91. Korzystając z interpretacji geometrycznej modułu różnicy liczb zespolonych wyznaczyć i narysować zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki:

a) $|z-2+3i|<4$; **b)** $|z+5i|\geqslant 3$; **c)** $|z-1|=|1+5i-z|$, **d)** $|z+3i|<|z-1-4i|$;

e) $|iz+5-2i|<|1+i|$; **f)** $\left|\frac{z-3i}{z}\right|>1$; **g)** $\left|\frac{z^2+4}{z-2i}\right|\leqslant 1$; **h)** $|z^2+2iz-1|<9$.

92. Wyznaczyć argumenty główne podanych liczb zespolonych (w razie potrzeby wykorzystać kalkulator):

a) 55; **b)** $-\pi$; **c)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; **d)** $\frac{1}{3}i$; **e)** $3+3\sqrt{3}i$; **f)** $-2+2i$; **g)** $1+3i$; **h)** $2-2\sqrt{3}i$.

93. Podane liczby zespolone przedstawić w postaci trygonometrycznej:

a) -2; **b)** $10+10i$; **c)** $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; **d)** πi; **e)** $\sqrt{7}-\ i\sqrt{7}$; **f)** $-3-i\sqrt{27}$.

94. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki:

a) $\arg(z)=\pi$; **b)** $\frac{\pi}{6}<\arg(z-i)\leqslant\frac{\pi}{3}$; **c)** $\frac{\pi}{2}<\arg(iz)<\pi$;

d) $\arg(-z)=\frac{\pi}{4}$; **e)** $0<\arg(\overline{z})\leqslant\frac{2\pi}{3}$; **f)** $\frac{3\pi}{4}\leqslant\arg\left(\frac{1}{z}\right)\leqslant\frac{3\pi}{2}$.

95. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć:

a) $(1-i)^{11}$; **b)** $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{8}$; **c)** $\left(2i-\sqrt{12}\right)^{9}$; **d)** $\left(-\sqrt[5]{2}-i\sqrt[5]{2}\right)^{10}$.

96. Wyznaczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej elementy podanych pierwiastków:

a) $\sqrt[4]{-16}$; **b)** $\sqrt[3]{-8i}$; **c)** $\sqrt[3]{-2-2i}$; **d)** $\sqrt[6]{1}$.

97. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać podane równania:

a) $z^2-2z+10=0$; **b)** $z^2+3iz+4=0$; **c)** $z^4+5z^2+4=0$;

d) $z^2+(1-3i)z-2-i=0$; **e)** $z^6=(1-i)^6$; **f)** $(z-i)^4=(z+1)^4$.

Wielomiany

98. Dla podanych par wielomianów rzeczywistych lub zespolonych obliczyć $3P-Q$, $P\cdot Q$, P^2:

a) $P(x)=x^2-3x+2$, $Q(x)=x^4-1$;

b) $P(z)=z^2-1+4i$, $Q(z)=z^3+(1-i)z^2+5$.

99. Obliczyć iloraz wielomianu P przez Q oraz podać resztę z tego dzielenia, jeżeli:

a) $P(x)=x^4-3x^3-2x^2+11x-15$, $Q(x)=x^3-2x+5$;

b) $P(x)=x^4+x+16$, $Q(x)=x^2-3x+4$;

c) $P(z)=z^3+iz+1$, $Q(z)=z^2-i$.

100. Znaleźć wszystkie pierwiastki całkowite podanych wielomianów:

a) x^3+3x^2-4; **b)** $x^4-2x^3+x^2-8x-12$; **c)** x^4-x^2-2.

101. Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne podanych wielomianów:

a) $6x^3-5x^2-2x+1$; **b)** $3x^3-2x^2+3x-2$; **c)** $6x^4+7x^2+2$.

102. Wyznaczyć pierwiastki rzeczywiste lub zespolone wraz z krotnościami podanych wielomianów:

a) $(x-1)(x+2)^3$; **b)** $(2x+6)^2(1-4x)^5$, **c)** $(z^2-1)(z^2+1)^3(z^2+9)^4$.

103. Nie wykonując dzieleń wyznaczyć reszty z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q, jeżeli:

a) $P(x)=x^8+3x^5+x^2+4$, $Q(x)=x^2-1$;

b) $P(x)=x^{2007}+3x+2008$, $Q(x)=x^2+1$;

c) $P(x)=x^{99}-2x^{98}+4x^{97}$, $Q(x)=x^4-16$

d*) $P(x)=x^{2003}+x^{1001}-1$, $Q(x)=x^4+1$;

e*) $P(x)=x^{444}+x^{111}+x-1, Q(x)=(x^2+1)^2$.

104. Pokazać, że jeżeli liczba zespolona z_1 jest pierwiastkiem wielomianu rzeczywistego P, to liczba $\overline{z_1}$ także jest pierwiastkiem wielomianu P. Korzystając z tego faktu znaleźć pozostałe pierwiastki zespolone wielomianu $P(x)=x^4-4x^3+12x^2-16x+15$ wiedząc, że jednym z nich jest $x_1=1+2i$.

105. Podane wielomiany rozłożyć na nierozkładalne czynniki rzeczywiste:

a) $x^3 - 27$; b) $x^4 + 16$; c) $x^4 + x^2 + 4$; d*) $x^6 + 1$.

106. Podane funkcje wymierne rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:

a) $\frac{2x+5}{x^2-x-2}$; **b)** $-\frac{x+9}{x(x+3)^2}$; **c)** $\frac{3x^2+4x+3}{x^3-x^2+4x-4}$; **d)** $\frac{x^3-2x^2-7x+6}{x^4+10x^2+9}$.

Przestrzeń liniowa

Tylko dla studentów wydziałów W2 oraz W4.

107. Niech $\vec{a} = (1, -1, -2, 3)$, $\vec{b} = (5, 4, 2, 0)$ będą wektorami w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$.

Wyznaczyć wektory $\vec{x}$ oraz $\vec{y}$, jeżeli:

a) $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$;

b) $\vec{a} - \vec{x} = \vec{b} + 2\vec{x}$;

c) $\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} = \vec{a}, \\ 3\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{b}. \end{cases}$

108. Sprawdzić, czy podane zbiory są podprzestrzeniami odpowiednich przestrzeni $\mathbb{R}^n$:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geqslant 0\}$, $\mathbb{R}^2$;

b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$, $\mathbb{R}^3$;

c) $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 2x_2 = 3x_3 = 4x_4\}$, $\mathbb{R}^4$;

d) $D = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 0,\ x_2 = x_3,\ x_5 = 0\}$, $\mathbb{R}^5$;

e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0,\ y - 3z = 0,\ z - 4x = 0\}$, $\mathbb{R}^3$.

109. We wskazanej przestrzeni liniowej zbadać liniową niezależność podanych układów wektorów:

a) $\mathbb{R}^3$, $\vec{a}_1 = (2, 3, 0)$, $\vec{a}_2 = (-1, 0, -1)$, $\vec{a}_3 = (0, 1, 4)$;

b) $\mathbb{R}^3$, $\vec{b}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{b}_2 = (3, 2, 1)$, $\vec{b}_3 = (1, 1, 1)$;

c) $\mathbb{R}^4$, $\vec{c}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{c}_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $\vec{c}_3 = (1, -1, 1, 0)$, $\vec{c}_4 = (-1, 1, -1, 1)$;

d) $\mathbb{R}^5$, $\vec{d}_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$, $\vec{d}_2 = (5, 4, 3, 2, 1)$, $\vec{d}_3 = (1, 0, 1, 0, 1)$;

e) $\mathbb{R}^n$, $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 2, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 3, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\vec{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, n)$.

110. **a)** Pokazać, że jeżeli wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$, to wektory $2\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - 5\vec{c}$ także są liniowo niezależne. Czy wektory $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$ są liniowo niezależne?

b) Wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ są liniowo **zależne** w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$. Czy wektory $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{w} - \vec{v}$ także są liniowo **zależne**?

c) Wektory $\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ są także liniowo niezależne.

111. Pokazać, że układ wektorów w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$, który zawiera:

a) wektor zerowy,

b) dwa jednakowe wektory,

c) wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ oraz $\vec{a} - \vec{b}$,

jest liniowo zależny.

112. Podać interpretację geometryczną podanych zbiorów we wskazanej przestrzeni:

a) $\text{lin}\{(-1, 3)\}$ w $\mathbb{R}^2$;

b) $\text{lin}\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ w $\mathbb{R}^3$;

c) $\text{lin}\{(1, -1, 2), (4, 1, -1), (2, 3, -5)\}$ w $\mathbb{R}^3$;

d*) $\text{lin}\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$ w $\mathbb{R}^4$;

e*) $\text{lin}\big\{(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, -1, 0, \ldots, 1), (0, 0, 1, \ldots, 0), \ldots, \big(0, 0, 0, \ldots, (-1)^{n+1}\big)\big\}$ w $\mathbb{R}^n$.

113. *Czy w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zachodzi równość

$$\text{lin}\{(1, 2, 3, -5), (2, -3, -4, 6), (1, -4, 1, 1)\} = \text{lin}\{(0, 0, 3, 4), (2, 5, 0, 0), (-1, 1, -1, 1)\} \ ?$$

Baza i wymiar przestrzeni

Tylko dla studentów wydziałów W2 oraz W4.

114. Zbadać, czy podane układy wektorów są bazami wskazanych przestrzeni liniowych $\mathbb{R}^n$:

a) $\{(1, 2, 0), (-1, 0, 3), (0, -2, -3)\}, \quad \mathbb{R}^3$;

b) $\{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}, \quad \mathbb{R}^4$;

c) $\{(1, -1, 0, 2), (1, 0, 3, 0), (0, 1, 3, 0), (0, 0, 0, 1)\}, \quad \mathbb{R}^4$;

d) $\{(1, 1, 0, 0, 0), (0, 2, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 3, 0), (0, 0, 0, 4, 4)\}, \quad \mathbb{R}^5$;

e) $\{(0, 1, 0, -1, 0), (-1, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, -1), (1, -1, 1, -1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)\}, \quad \mathbb{R}^5$.

115. Podane układy wektorów uzupełnić do baz wskazanych przestrzeni:

a) $\{(1, 2, 4), (2, 0, 1)\}, \quad \mathbb{R}^3$;

b) $\{(1, 2, 3, 4), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0)\}, \quad \mathbb{R}^4$;

c) $\{(0, 1, 0, 2), (4, 1, 1, 3)\}, \quad \mathbb{R}^4$;

d) $\{(1, -1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 3, -3), (0, -2, 2, 0, 0)\}, \quad \mathbb{R}^5$;

e) $\{(1, 0, 0, 0, -1), (0, 0, 0, 0, 4), (0, -1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1)\}, \quad \mathbb{R}^5$.

116. Pokazać, że jeżeli wektory $\vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2, \vec{\boldsymbol{b}}_3, \vec{\boldsymbol{b}}_4$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^4$, to wektory

$$\vec{\boldsymbol{u}}_1 = \vec{\boldsymbol{b}}_1 + \vec{\boldsymbol{b}}_2,\ \vec{\boldsymbol{u}}_2 = \vec{\boldsymbol{b}}_1 + \vec{\boldsymbol{b}}_3,\ \vec{\boldsymbol{u}}_3 = \vec{\boldsymbol{b}}_1 + \vec{\boldsymbol{b}}_4,\ \vec{\boldsymbol{u}}_4 = \vec{\boldsymbol{b}}_3 + \vec{\boldsymbol{b}}_4$$

także tworzą bazę tej przestrzeni.

117. Znaleźć bazy i wymiary podanych podprzestrzeni:

a) $A = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} : 3x + 2y - z = 0\big\}$;

b) $B = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^{\mathbf{4}} : x = 2y = -t\big\}$;

c) $C = \big\{(u, v, x, y, z) \in \mathbb{R}^{\mathbf{5}} : u + v = 0,\ x + y + x = 0\big\}$;

d) $D = \big\{(u, v, w, x, y, z) \in \mathbb{R}^{\mathbf{6}} : u + v = 0,\ x + y + z = 0,\ x - u + y - v + z = 0\big\}$.

118. Wyznaczyć współrzędne podanych wektorów we wskazanych bazach:

a) $\vec{\boldsymbol{a}} = (2, 3),\ \mathcal{B} = \{(-1, 1), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$;

b) $\vec{\boldsymbol{b}} = (1, 2, 3),\ \mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$;

c) $\vec{\boldsymbol{c}} = (1, 0, 2, 0),\ \mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 2, 3, 4)\} \subset \mathbb{R}^4$;

d) $\vec{\boldsymbol{d}} = (5, 4, 3, 2, 1)$,

$\mathcal{B} = \{(1,1,1,1,1), (-1,-1,-1,-1,0), (1,1,1,0,0), (-1,-1,0,0,0), (1,0,0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^5$.

Przekształcenia liniowe

Tylko dla studentów wydziałów W2 oraz W4.

119. Zbadać, czy podane przekształcenia są liniowe:

a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, \quad F(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2;$

b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = (|x+y|, |x-y|);$

c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) = (-x, 5x+y, y-2z);$

d) $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^4, \quad F(x) = (0, x, 0, -3x);$

e) $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 x_2,\ x_3 x_4);$

f) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5, \quad F(u,v,w) = (u, -4v, u+2v, w, u-3w).$

120. Korzystając z interpretacji geometrycznej przekształceń liniowych znaleźć ich jądra i obrazy:

a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, obrót o kąt $\alpha = \frac{\pi}{3}$ wokół początku układu.

b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rzut prostokątny na prostą $x + y = 0$.

c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, symetria względem płaszczyzny $y = z$.

d) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, obrót wokół osi Oy o kąt $\frac{\pi}{2}$.

121. Wyznaczyć jądra i obrazy podanych przekształceń liniowych:

a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, \quad F(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2;$

b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = (x+y, 2x+2y);$

c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) = (-x, 5x+y, y-2z);$

d) $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^4, \quad F(x) = (0, x, 0, -x).$

122. Znaleźć macierze podanych przekształceń liniowych $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ we wskazanych bazach $\mathcal{B}'$ oraz $\mathcal{B}''$ odpowiednio przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz $\mathbb{R}^m$:

a) $F(x,y) = (x, y, x-y)$, $\mathcal{B}' = \{(1,0), (1,1)\}$, $\mathcal{B}'' = \{(1,0,0), (0,-1,0), (-1,1,-1)\};$

b) $F(x,y) = (y, 0, x, 0)$, $\mathcal{B}' = \{(1,-1), (0,2)\}$, $\mathcal{B}'' = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\};$

c) $F(x,y,z) = x + y - 3z$, $\mathcal{B}' = \{(1,0,2), (0,-1,1), (0,0,1)\}$, $\mathcal{B}''$-standardowa;

d) $F(x,y,z,t) = (x+y+z+t, y-t, z-x)$, $\mathcal{B}'$-standardowa, $\mathcal{B}''$-standardowa.

123. **a)** Uzasadnić, że obrót na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ wokół początku układu współrzędnych o kat φ jest przekształceniem liniowym. Znaleźć macierz tego obrotu w bazach standardowych.

b) Pokazać, że symetria wzlędem osi Oz w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest przekształceniem liniowym. Znaleźć macierz tej symetrii w bazach standardowych.

Wartości i wektory własne macierzy

Tylko dla studentów wydziałów W2 oraz W4.

124. Korzystając z definicji wyznaczyć wektory i wartości własne podanych przekształceń liniowych:

a) symetria względm osi Ox w przestrzeni $\mathbb{R}^2$;

b) obrót wokół osi Oy o kąt $\frac{\pi}{6}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$;

c) symetria względem płaszczyny xOz w przestrzeni $\mathbb{R}^3$;

d) rzut prostokątny na oś Oz w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

125. Wyznaczyć wektory i wartości własne podanych macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; **b)** $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$;

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; **d)** $D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

126. Sprawdzić, że podane macierze spełniają swoje równania charakterystyczne:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$; **b)** $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Iloczyn skalarny. Normy wektorów i macierzy

Tylko dla studentów wydziałów W2 oraz W4.

127. Obliczyć iloczyny skalarne podanych par wektorów w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$:

a) $\vec{a} = (1,-2,5)$, $\vec{b} = (3,4,1)$ w $\mathbb{R}^3$;

b) $\vec{u} = (0,1,3,-2,5)$, $\vec{v} = (1,-2,3,4,1)$ w $\mathbb{R}^5$.

128. Obliczyć kąty między podanymi wektorami w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$:

a) $\vec{x} = (12,-5)$, $\vec{y} = (3,4)$ w $\mathbb{R}^2$;

b) $\vec{p} = (0,1,0,-2,0)$, $\vec{q} = (1,0,3,0,1)$ w $\mathbb{R}^4$.

129. Dla jakich wartości parametru p, wektory $\vec{a} = (p,1,p,1)$, $\vec{b} = (p,p,-1,-9)$ są prostopadłe w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$?

130. Sprawdzić, że podane układy wektorów tworzą bazy ortogonalne we wskazanych przestrzeniach euklidesowych $\mathbb{R}^n$:

a) $\vec{e}_1 = (1,-3,1)$, $\vec{e}_2 = (2,-1,-5)$, $\vec{e}_3 = (16,7,5)$, $\mathbb{R}^3$;

b) $\vec{e}_1 = (1,-2,2,-3)$, $\vec{e}_2 = (2,-3,2,4)$, $\vec{e}_3 = (2,2,1,0)$, $\vec{e}_4 = (5,-2,-6,-1)$, $\mathbb{R}^4$.

131. Wyznaczyć współrzędne podanych wektorów we wskazanych bazach ortogonalnych przestrzeni euklidesowych $\mathbb{R}^n$:

a) $\vec{a} = (0,1)$, $\mathcal{B} = \{(3,-4),(4,3)\} \subset \mathbb{R}^2$;

b) $\vec{b} = (2,5,-4)$, $\mathcal{B} = \{(1,-1,1),(0,1,1),(-2,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$;

c) $\vec{c} = (0,1,0,2)$, $\mathcal{B} = \{(1,0,0,0),(0,1,1,1),(0,1,0,-1),(0,-1,2,-1)\} \subset \mathbb{R}^4$;

132. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wprowadzamy następujące normy wektora $\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\|\vec{\boldsymbol{x}}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2} \text{ (norma euklidesowa)}, \quad \|\vec{\boldsymbol{x}}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i|\,, \quad \|\vec{\boldsymbol{x}}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,.$$

Obliczyć każdą z tych norm podanych wektorów:

a) $\vec{\boldsymbol{x}} = (-3, 4) \in \mathbb{R}^2$;

b) $\vec{\boldsymbol{x}} = (1, -1, 1, -1) \in \mathbb{R}^4$.

133. Wprowadzamy następujące normy macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ stopnia n :

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2} \text{ (norma Frobeniusa)}, \qquad \|A\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\,,$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,, \quad \|A\|_2 = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|\,, \quad \|A\|_3 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,.$$

Obliczyć każdą z tych norm podanych macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

*Które z powyższych norm macierzy są indukowane przez normy wektorów?