Równania różniczkowe zwyczajne A

Listy zadań

Lista pierwsza

1.1. **a)** Z pewnej substancji radioaktywnej po upływie 4 lat zostało 20 gram, a po upływie dalszych 4 lat tylko 4 gramy. Wyznaczyć masę substancji w chwili początkowej.

b) Polon-210 ma okres połowicznego zaniku równy 140 dni. Znaleźć masę tego pierwiastka po 100 dniach, jeżeli jego masa początkowa wynosiła 200 g.

c) Okres połowicznego zaniku pewnego pierwiastka promieniotwórczego jest równy 100 lat. Ile procent masy początkowej tego pierwiastka pozostanie po i) 10, ii) 50, iii) 200 latach?

1.2. Sprawdzić, że podane funkcje są rozwiązaniami wskazanych równań różniczkowych na zadanych przedziałach:

a) $y(t) = \dfrac{\sin t}{t}, \;\; ty' + y = \cos t, \; (0, \infty)$; **b)** $y(t) = t^2, \;\; ty' + y = 3t^2, \;\; \boldsymbol{R}$;

c) $y(t) = \dfrac{1}{1+t^2}, \;\; y' + 2ty^2 = 0, \;\; \boldsymbol{R}$; **d)** $y(t) = -\sqrt{4-t^2}, \;\; yy' = -t, \;\; (-2, 2)$.

1.3. Sprawdzić, że dla każdego $C \in \boldsymbol{R}$ podane funkcje są rozwiązaniami wskazanych równań różniczkowych, a następnie znaleźć rozwiązania spełniające zadane warunki początkowe:

a) $y(t) = t + C, \;\; y' = 1, \;\; y(0) = 0$; **b)** $y(t) = Ce^t, \;\; y' = y, \;\; y(1) = -1$;

c) $y(t) = Ce^{-2t} + \dfrac{1}{3}e^t, \;\; y' + 2y = e^t, \;\; y(0) = 1$; **d)** $y(t) = t + C\sqrt{t^2+1}, \;\; y' = \dfrac{ty+1}{t^2+1}, \;\; y(0) = 0$.

1.4. Scałkować podane równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

a) $yy' + 4t = 0$; **b)** $dy = 2ty^2 dt$; **c)** $t\left(y^2 - 1\right) dt + y\left(t^2 - 1\right) dy = 0$;

d) $2\sqrt{t}y' = \sqrt{1-y^2}$; **e)** $y' = 1 + t + y + ty$; **f)** $y' + 4y = y\left(e^{-t} + 4\right)$.

1.5. Dokonać analizy rozwiązań równania różniczkowego $y't = ky$ w zależności od rzeczywistego parametru k. Naszkicować krzywe całkowe tego równania.

Lista druga

1.6. Wyznaczyć rozwiązanie równania różniczkowego $\left(1+t^2\right) y' = 1 + y^2$ z zadanymi warunkami początkowymi:

a) $y(1) = -1$; **b)** $y(1) = 1$.

Podać przedziały, na których są one określone.

1.7. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych:

a) $y' \sin t = y \ln y, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$; **b)** $t\sqrt{1-y^2}dt + y\sqrt{1-t^2}dy = 0, \quad y(0) = 1$;

c) $t(y+1)y' = y, \quad y(e) = 1$; **d)** $y \cos t dt - \left(1+y^2\right) dy = 0, \quad y(0) = 1$;

e) $y' = y^2\left(1+t^2\right), \quad y(0) = -2$; **f)** $e^y\left(y' - 1\right) = 1, \quad y(0) = 0$.

1.8. Scałkować podane równania różniczkowe jednorodne:

a) $ty' = \sqrt{t^2 - y^2} + y$; **b)** $(t-y)dt + tdy = 0$; **c)** $ty' = y\left(\ln y - \ln t\right)$;

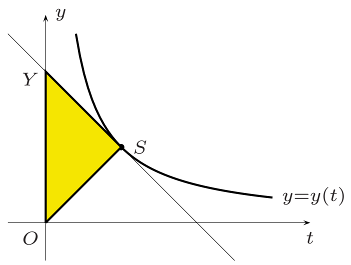
d) $ty' - y = t \operatorname{tg} \dfrac{y}{t}$; **e)** $\left(t^2 - y^2\right) dt + tydy = 0$; **f)** $t^2 y' = ty + y^2$.

1.9. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe dla równań rózniczkowych jednorodnych oraz wyznaczyć przedziały, na których są one określone:

a) $\left(t^2+y^2\right)dt-2tydy=0,\ y(1)=\sqrt{2};$ **b)** $ty'=t+\dfrac{1}{2}y,\ y(1)=0;$

c) $y'=\dfrac{4y^2-t^2}{2ty},\ y(1)=1;$ **d)** $\left(y^3-t^3\right)dt-ty^2dy=0,\ y(1)=3.$

1.10. Znaleźć krzywe, dla których trójkąt OSY (rysunek) utworzony przez oś Oy, styczną i wektor wodzący punktu styczności jest równoramienny (o podstawie OY).



Lista trzecia

1.11. Rozwiązać podane równania różniczkowe liniowe niejednorodne:

a) $y'+y=\sin t;$ **b)** $y'+2ty=e^{-t^2};$ **c)** $ty'-2y=t^3\cos t;$

d) $ty'-2y=4t^4;$ **e)** $ty+e^t-ty'=0;$ **f)** $(2t+1)y'=4t+2y.$

1.12. **a)** Załóżmy, że $\psi(t)$ jest rozwiązaniem równania róźniczkowego liniowego niejednorodnego (LN) $y'+p(t)y=q(t)$, a funkcja $\varphi(t)\not\equiv 0$ rozwiązaniem części jednorodnej tego równania (LJ) $y'+p(t)y=0$, gdzie funkcje $p(t)$, $q(t)$ są ciągłe na przedziale (a,b). Pokazać, że każde rozwiązanie $y(t)$ równania niejednorodnego można przedstawić w postaci $y(t)=C\varphi(t)+\psi(t)$, gdzie C jest odpowiednio dobraną stałą. rzeczywistą.

b) Załóżmy, że funkcje $\eta(t)$, $\psi(t)$ są róźnymi ($\eta(t)\not\equiv\psi(t)$) rozwiązaniami równania róźniczkowego liniowego niejednorodnego (LN). Pokazać, że każde rozwiązanie $y(t)$ równania niejednorodnego ma postać $y(t)=C\left(\eta(t)-\psi(t)\right)+\eta(t)$, gdzie C jest odpowiednio dobraną stałą.

1.13. Wyznaczyć rozwiązania podanych zagadnień początkowych dla równań liniowych niejednorodnych oraz podać przedziały, na których są one określone:

a) $y'-y=1,\ y(3)=3;$ **b)** $y'=(y+1)\sin t,\ y\left(t_0\right)=y_0;$

c) $ty'+y=t+1,\ y(1)=0;$ **d)** $y'\sin t\cos t=y+\sin^3 t,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0.$

1.14. Dla równania liniowego niejednorodnego $y'+py=q(t)$, gdzie $p\in\boldsymbol{R}$ wyznaczyć rozwiązanie $\varphi(t)$ w podanej postaci, jeżeli:

a) $p=4,\ q(t)=t^2-1,\ \varphi(t)=At^2+Bt+C;$

b) $p=1,\ q(t)=t^4,\ \varphi(t)=At^4+Bt^3+Ct^2+Dt+E;$

c) $p=-3,\ q(t)=4t^2e^{-t},\ \varphi(t)=\left(At^2+Bt+C\right)e^{-t};$

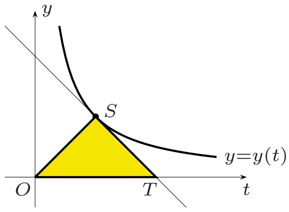
d) $p=-1,\ q(t)=te^t,\ \varphi(t)=(At+B)te^t;$

e) $p=2,\ q(t)=\cos 3t,\ \varphi(t)=A\sin 3t+B\cos 3t;$

f) $p=-2,\ q(t)=2\sin\dfrac{t}{2}-\cos\dfrac{t}{2},\ \varphi(t)=A\sin\dfrac{t}{2}+B\cos\dfrac{t}{2}.$

1.15. Znaleźć rozwiązanie równania róźniczkowego liniowego niejednorodnego $t^2y'+y=\left(t^2+1\right)e^t$ spełniające warunek $\lim\limits_{t\to-\infty}y(t)=1.$

* **1.16.** Znaleźć równanie krzywej przechodzącej przez punkt (1,1), dla której pole trójkąta OST (rysunek) utworzonego przez oś Ot, styczną i wektor wodzący punktu styczności jest stałe i równa się 1.



1.17. Rozwiązać podane równania różniczkowe Bernoulliego:

a) $y' + 2ty = 2ty^2$; **b)** $3ty^2y' - 2y^3 = t^3$; **c)** $t\left(y' + y^2\right) = y$;

d) $y' - 2y = \sqrt{y}\sin t$; **e)** $y' + \dfrac{y}{t} = ty\sqrt{y}$, $t > 0$; **f)** $y' = y\left(y^2e^t - 1\right)$.

1.18. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych Bernoulliego oraz wyznaczyć przedziały, na których są one określone:

a) $t^2y' + 2ty = y^3$, $t > 0$ $y(1) = -1$; **b)** $ty' + y = y^2\ln t$, $y(1) = 1$;

c) $y' - 2y = 2\sqrt{y}e^t\ln t$, $y(1) = 0$; **d)** $2y'\ln t + \dfrac{y}{t} = \dfrac{1}{y}$, $y(e) = \sqrt{e}$.

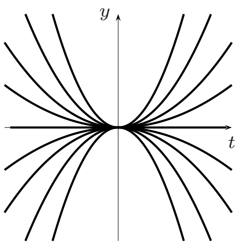
Lista czwarta

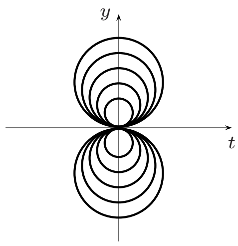
* **1.23.** Wyznaczyć równania różniczkowe rodzin krzywych określonych podanymi równaniami:

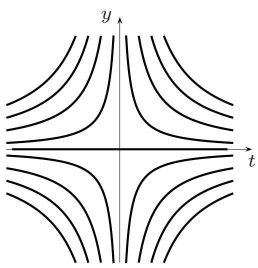
a) $y = Ct^3$; **b)** $t^2 + 4y^2 = C$; **c)** $y - Ct = C - 1$; **d)** $y^2 = 2Ct - 2t^2$.

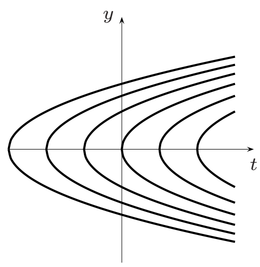
* **1.24.** Znaleźć równania rodzin krzywych ortogonalnych do podanych rodzin krzywych:

a) $y = Ct^2$; **b)** $t^2 + y^2 = 2Cy$; **c)** $y = \dfrac{C}{t}$; **d)** $y^2 = t + C$.









1.25. a) Basen o pojemności 10 000 litrów zawiera 1000 litrów czystej wody. Do basenu wlewa się woda o skażeniu 50% z prędkością 20 litrów na minutę. Przez otwór spustowy ciecz wylewa się z prędkością 10 litrów na minutę. Wyznaczyć skażenie wody w chwili napełnienia zbiornika.

b) W hali o objętości 200 m^3 powietrze zawiera 0.15 % dwutlenku węgla. Wentylator podaje w ciągu minuty 20 m^3 powietrza zawierającego 0.04 % CO_2. Po jakim czasie stężenie dwutlenku węgla w hali zmniejszy się dwukrotnie?

c) Zbiornik o pojemności 250 litrów napełniony jest 4 % wodnym roztworem alkoholu. Po włączeniu pomp ($t = 0$) do zbiornika wlewa się 20 % wodny roztwór alkoholu z prędkością 5 l/min, a powstała mieszanina wylewa się dwa razy szybciej. Po ilu minutach ilość alkoholu w zbiorniku będzie największa?

1.26. a) Kultura licząca 500 bakterii rozwija się według wykładniczego prawa wzrostu tak, że po trzech godzinach osiąga stan 8000 bakterii. Po jakim czasie populacja będzie liczyła milion bakterii?

b) Populacja pewnego gatunku ryb rozwijająca się według wykładniczego prawa wzrostu podwoiła liczbę swoich osobników w ciągu 10 lat. Po ilu latach liczba ryb potroi się?

c) Populacja pewnego gatunku biologicznego, której rozwój opisany jest równaniem logistycznym liczyła na początku 5 tys. osobników. Po 10 dniach ich liczba wzrosła do 8 tys. osobników, by po dostatecznie długim czasie ustabilizować się na poziomie 15 tys. osobników. Wyznaczyć czas, po którym populacja podwoiła liczbę swoich osobników.

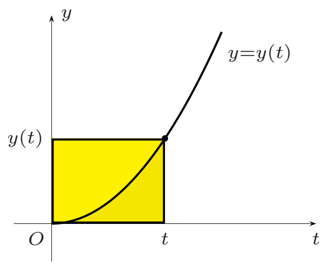
1.27. **a)** Termometr z pokoju, w którym wskazywał 20°C, wystawiono na zewnątrz, gdzie panował 5°C chłód. Po jednej minucie na termometrze było już 12°C. Po jakim czasie termometr będzie wskazywał temperaturę tylko o 10 % wyższą niż faktyczna?

b) Ciało, którego temperatura wynosi 220°C umieszczono w pomieszczeniu o temperaturze 60°C. Po 10 minutach jego temperatura obniżyła się do 140°C. W tym momencie włączono klimatyzatory, które obniżają temperaturę otoczenia z szybkością 1°C na minutę. Jaka będzie temperatura T ciała po t minutach od chwili uruchomienia klimatyzatorów?

1.28. **a)** W obwodzie elektrycznym połączono szeregowo opornik o oporności $R = 10\,[\Omega]$, cewkę o indukcyjności $L = 2$ [H] oraz źródło napięcia stałego $E(t) = 12$ [V]. Wyznaczyć graniczne natężenie prądu w obwodzie, gdy $t \to \infty$. Naszkicować funkcję $I(t)$ [A], jeżeli $I(0) = 0.2$ [A].

b) W obwodzie elektrycznym połączono szeregowo opornik o oporze $R = 5\,[\Omega]$, cewkę o indukcyjności $L = 2.5$ [H] oraz zewnętrzną siłę elektromotoryczną $E(t) = 10 \sin t$ [V]. Wyznaczyć natężenie prądu $I(t)$ [A] w obwodzie, jeżeli $I(0) = 0$.

1.29. Krzywa $y = y(t)$ przechodzi przez początek układu współrzędnych i leży w górnej półpłaszczyźnie. Każdy prostokąt ograniczony osiami układu współrzędnych i prostymi poprowadzonymi z dowolnego punktu $(t, y(t))$ krzywej prostopadłymi do nich krzywa $y(t)$ dzieli na dwie części. Pole zawarte pod krzywą $y(t)$ jest dwa razy mniejsze niż pole nad krzywą. Wyznaczyć równanie tej krzywej.



Lista piąta

1.30. Wyznaczyć rozwiązania podanych równanań rzędu drugiego:

a) $t^2y'' - (y')^2 = 0$; **b)** $ty'' - y' = t^2e^t$; **c)** $2ty'y'' = (y')^2 - 1$; **d)** $y''t = 2y' + 4t^5$.

1.31. Rozwiązać (scałkować) podane równania różniczkowe:

a) $y^3y'' + 1 = 0$; **b)** $2yy'' - 3\,(y')^2 = 4y^2$; **c)** $(y-1)y'' = 2\,(y')^2$; **d*)** $y'' + \dfrac{(y')^2}{y} = ye^{-y}\,(y')^3$.

1.32. Rozwiązać podane równania różniczkowe z zadanymi warunkami początkowymi:

a) $y'' = \dfrac{y'}{t} + \dfrac{t^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$; **b)** $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

c) $2y'' = 3y^2$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = 1$; **d)** $ty'' = 2\,(t + y')$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$.

1.33. Znaleźć krzywą $y = y(t)$, która przechodzi przez punkt $(0, 1)$ i jest w nim styczna do prostej $t + y = 1$ oraz spełnia równanie różniczkowe $yy'' + (y')^2 = 1$.

1.34. **a)** Wyznaczyć równanie ruchu spadającego swobodnie ciała o masie m z uwzględnieniem oporu powietrza, który jest wprost proporcjonalny do kwadratu prędkości spadania, ze współczynnikiem proporcjonalności $k > 0$. Przyjąć, że ciało spada z wysokości s_0 przy zerowej prędkości początkowej.

b) Cząsteczka o masie m porusza się po linii prostej. Niech $x(t)$ oznacza odległość tej cząsteczki w chwili t od ustalonego centrum na prostej. W punkcie x cząsteczka jest przyciągana przez centrum z siłą kx^{-3}, gdzie $k > 0$. Wyznaczyć równanie ruchu cząsteczki oraz znaleźć jego rozwiązanie, jeżeli rozpoczęła ona ruch w odległości x_0 od centrum z zerową prędkością początkową. Obliczyć czas, po którym cząsteczka osiągnie centrum.

Lista szósta

2.1. Korzystając z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności dla równań różniczkowych liniowych wyznaczyć przedziały, na których podane zagadnienia początkowe mają jednoznaczne rozwiązania:

a) $\left(t^2-2\right)y''+(2t-1)y'+y=\ln t, \quad y\left(1\right)=1,\ y'(1)=0;$

b) $(t-3)y''+ty'+(\ln|t|)y=0, \quad y(1)=0,\ y'(1)=-1.$

2.2. Sprawdzić, że funkcje $\varphi(t)=e^{-t}$, $\psi(t)=e^{3t}$ oraz ich dowolna kombinacja liniowa są rozwiązaniami równania $y''-2y'-3y=0$.

2.3. Dany jest układ fundamentalny $(y_1(t),y_2(t))$ równania liniowego jednorodnego postaci $y''+p(t)y'+q(t)y=0$. Dla jakich parametrów α, $\beta\in\boldsymbol{R}$, para funkcji $(u_1(t),u_2(t))$ określonych wzorami

$$u_1(t)=\alpha y_1(t)+y_2(t)$$
$$u_2(t)=y_1(t)+\beta y_2(t)$$

jest również układem fundamentalnym tego równania?

2.4. Sprawdzić, że podane funkcje tworzą na zadanych przedziałach układy fundamentalne wskazanych równań różniczkowych. Znaleźć rozwiązania tych równań z zadanymi warunkami początkowymi:

a) $y_1(t)=e^{-t},\ y_2(t)=e^{2t},\ \ (-\infty,\infty),\ \ y''-y'-2y=0,\ \ y(0)=-1,\ y'(0)=-5;$

b) $y_1(t)=\ln t,\ y_2(t)=t,\ \ (0,e),\ \ t^2(1-\ln t)y''+ty'-y=0,\ \ y(1)=2,\ y'(1)=1;$

c) $y_1(t)=t,\ y_2(t)=e^t,\ \ (-\infty,1),\ \ (t-1)y''-ty'+y=0,\ \ y(0)=0,\ y'(0)=1;$

d) $y_1(t)=t,\ y_2(t)=t^2,\ \ (0,\infty),\ \ t^2y''-2ty'+2y=0,\ \ y(1)=3,\ y'(1)=1.$

2.5. Wyznaczyć równania różniczkowe liniowe jednorodne postaci $y''+p(t)y'+q(t)y=0$, których układy fundamentalne składają się z podanych funkcji:

a) $y_1(t)=\operatorname{sh}t$, $y_2=\operatorname{ch}t$, gdzie $t\in\boldsymbol{R}$;

b) $y_1(t)=t$, $y_2(t)=t^2$, gdzie $t\in(0,\infty)$;

c) $y_1(t)=t^{-7}$, $y_2(t)=t$, gdzie $t\in(0,\infty)$.

2.6. Do każdego z podanych równań różniczkowych wskazano jedno jego rozwiązanie. Wykorzystując metodę obniżania rzędu równania znaleźć rozwiązania ogólne tych równań różniczkowych:

a) $y''-5y'+6y=0,\ \ \varphi(t)=e^{3t};$ **b)** $y''+4y=0,\ \ \varphi(t)=\cos 2t;$

c) $t^2y''-ty'-3y=0,\ \ \varphi(t)=\dfrac{1}{t};$ **d)** $(t-1)y''-(t+1)y'+2y=0,\ \ \varphi(t)=e^t;$

e) $ty''-2y'+(2-t)y=0,\ \ \varphi(t)=e^t;$ **f)** $t^2y''+\dfrac{y}{4}=0,\ \ \varphi(t)=\sqrt{t}.$

2.7. Wyznaczyć te wartości parametru $m\in\boldsymbol{R}$, dla których wskazana funkcja będzie rozwiązaniem podanego równania, a nastepnie scałkować te równania:

a) $\varphi(t)=e^{mt}$, $(2t+1)y''+2(2t-1)y'-8y=0;$ **b)** $\varphi(t)=t^m$, $t^2y''-3ty'+4y=0.$

*** 2.8.** Do każdego z podanych równań wskazano jedno jego rozwiązanie. Korzystając ze wzoru Liouville'a wyznaczyć układy fundamentalne tych równań:

a) $t^3y''+ty'-y=0,\ \ y_1(t)=t;$ **b)** $ty''+2y'+ty=0,\ \ y_1(t)=\dfrac{\sin t}{t}.$

Lista siódma

2.9. Napisać równania charakterystyczne podanych równań różniczkowych:

a) $y''-2y'+y=0;$ **b)** $y''-3y=0;$ **c)** $4y''+y'=0;$ **d)** $2y''-3y'+4y=0.$

2.10. Wyznaczyć równania różniczkowe liniowe jednorodne o stałych współczynnikach postaci $y''+py'+qy=0$, jeżeli podane są pierwiastki ich wielomianów charakterystycznych:

a) $\lambda_1 = 1+\sqrt{3}i$; **b)** $\lambda_1=\lambda_2=-2$; **c)** $\lambda_1=2,\ \lambda_2=3$; **d)** $\lambda_1=i$.

2.11. Wyznaczyć równania różniczkowe liniowe jednorodne o stałych współczynnikach postaci $y''+py'+qy=0$, jeżeli podane funkcje wchodzą w skład ich układów fundamentalnych:

a) $\cos 2t$; **b)** te^{-t}; **c)** e^{2t}, $e^{\alpha t}$, gdzie $\alpha \neq 2$;

d) $e^{-t}\sin t$; **e)** t; **f)** 1, e^t.

2.12. Rozwiązać podane równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach:

a) $6y''-5y'+y=0$; **b)** $y''-y'-2y=0$; **c)** $4y''-4y+y=0$;

d) $y''+y'+\dfrac{y}{4}=0$; **e)** $y''-4y'+5y=0$; **f)** $y''-2y'+5y=0$;

g) $y''+6y'+18y=0$; **h)** $7y''+4y'-3y=0$; **i)** $y''-6y'+9y=0$.

2.13. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

a) $y''+y'-6y=0,\ \ y\big(0\big)=1, y'(0)=0$; **b)** $y''+9y=0,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1, y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1$;

c) $y''-2y'+y=0,\ \ y\big(1\big)=2, y'\left(1\right)=3$; **d)** $y''-7y'+12y=0,\ \ y\big(0\big)=3, y'\left(0\right)=-2$.

2.14. Punkt materialny o masie m porusza się po prostej łączącej dwa centra i jest przyciągany przez nie z siłą wprost proporcjonalną do jego odległości od każdego z nich. Współczynnik proporcjonalności jest równy $k>0$, a odległość między centrami wynosi $2b$. Znaleźć równanie ruchu i rozwiązać je wiedząc, że w chwili początkowej $(t_0=0)$ punkt znajdował się w odległości x_0 od środka linii łączącej oba centra i miał zerową prędkość.

2.15. W obwodzie elektrycznym połączono szeregowo cewkę o indukcyjności L [H] oraz kondensator o pojemności C [F]. Wyznaczyć natężenie prądu I [A] w tym obwodzie jako funkcję czasu.

Lista ósma

* **2.16.** Wyznaczyć te wartości parametru $\alpha \in \boldsymbol{R}$, dla których zagadnienie brzegowe

$$y''+\alpha y=0,\ y(0)=y(2\pi),\ y'(0)=y'(2\pi)$$

ma niezerowe rozwiązanie.

2.17. Sprawdzić, że podane funkcje są rozwiązaniami wskazanych równań różniczkowych liniowych niejednorodnych. Wyznaczyć rozwiązania ogólne tych równań lub zagadnień początkowych:

a) $y''+10y'+25y=4e^{-5t},\ \ \varphi(t)=2t^2e^{-5t}$;

b) $y''+4y=\sin 2t,\ \ \varphi(t)=-\dfrac{1}{4}t\cos 2t$;

c) $y''-y'-2y=4t-2e^t,\ \ \varphi\big(t\big)=1-2t+e^t,\ \ y(0)=0,\ y'(0)=1$;

d) $y''+y'-2y=t^2e^{4t},\ \ \varphi(t)=\dfrac{1}{18}\left(t^2-t+\dfrac{7}{18}\right)e^{4t},\ \ y(0)=\dfrac{655}{324},\ y'(0)=-\dfrac{157}{162}$.

2.18. Sprawdzić, że funkcja $\varphi(t)=2+\dfrac{1}{5}e^t(\sin t+\cos t)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$y''+3y'+2y=4+2e^t\cos t.$$

Znaleźć rozwiązanie, które spełnia warunek $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t)=2$.

2.19. Zakładając, że podane funkcje są rozwiązaniami równania liniowego niejednorodnego $y''+p(t)y'+q(t)y=h(t)$, wyznaczyć rozwiązanie ogólne tego równania lub rozwiązać zagadnienie początkowe:

a) $\varphi(t)=5te^{-2t}\sin t,\ \ \psi(t)=(\cos t+5t\sin t)\,e^{-2t},\ \ \eta(t)=(1+5t)e^{-2t}\sin t$;

b) $\varphi(t)=t\cos t+t^2\sin t,\ \ \psi(t)=(1+t)\cos t+t^2\sin t,\ \ \eta(t)=t\cos t+\big(1+t^2\big)\sin t,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=0$.

2.20. Podane funkcje są rozwiązaniami wskazanych równań liniowych niejednorodnych. Wyznaczyć rozwiązania ogólne tych równań:

a) $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t} + \dfrac{1}{t}$, $\psi(t) = \dfrac{1}{t}$, $y'' + \dfrac{2}{t}y' + y = \dfrac{1}{t}$;

b) $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = \sin e^t + t$, $y'' - y' + ye^{2t} = te^{2t} - 1$.

Lista dziewiąta

2.21. Wyznaczyć rozwiązania ogólne podanych równań liniowych niejednorodnych, jeżeli znane są układy fundamentalne odpowiadający im równań jednorodnych:

a) $y'' - 7y' + 10y = e^{3t}$, $y_1(t) = e^{2t}$, $y_2(t) = e^{5t}$;

b) $\left(3t + 2t^2\right) y'' - 6\,(1 + t)\, y' + 6y = 6$, $y_1(t) = t^3$, $y_2(t) = t + 1$;

c) $(t - 1)\, y'' - ty' + y = (t - 1)^2 e^t$, $y_1(t) = t$, $y_2(t) = e^t$;

d) $(t + 1)\, y'' - (2 + t)y' = e^t$, $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = te^t$.

2.22. Korzystając z metody uzmienniania stałych rozwiązać podane równania różniczkowe:

a) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$;
b) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2t}$;
c) $y'' - y = \dfrac{4t^2 + 1}{t\sqrt{t}}$;

d) $y'' - 2y' \operatorname{tg} t = 1$;
e) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^t}$;
f) $y'' + 3y' + 2y = \cos\left(e^t\right)$.

2.23. Korzystając z metody przewidywania podać postacie rozwiązań podanych równań różniczkowych:

a) $4y'' - 4y = t^3 - 24t$;
b) $y'' - 7y' = (t - 1)^2$;
c) $y'' - 8y' + 16y = (1 - t)e^{4t}$;

d) $y'' + 3y' = 3$;
e) $y'' + 25y = \cos 5t$;
f) $y'' + y = \sin t - \cos t$.

2.24. Korzystając z metody współczynników nieoznaczonych (metoda przewidywania) rozwiązać podane równania różniczkowe liniowe niejednorodne:

a) $y'' + 2y' + y = -2$;
b) $y'' - 4y' + 4y = t^2$;
c) $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2t}$;

d) $y'' + 3y' = 3te^{-3t}$;
e) $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - t)e^{-2t}$;
f) $y'' + 4y' - 4y = 8\sin 2t$.

2.25. Korzystając z twierdzenia o składaniu rozwiązań i metody współczynników nieoznaczonych (metoda przewidywania) rozwiązać podane równania różniczkowe:

a) $y'' - y' - 2y = e^t + e^{-2t}$;
b) $y'' - y = t + \sin t$;

c) $y'' - 4y' = 2\cos^2 4t$;
d) $y'' - y' - 2y = 4t - 2e^t$.

2.26. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

a) $y'' + y = 2(1 - t)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$;
b) $y'' - 6y' + 9y = 9t^2 - 12t + 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

c) $y'' + 6y' + 9y = 10\sin t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
d) $y'' + y' = e^{-t}$, $y\left(0\right) = 1$, $y'(0) = -1$.

2.27. W obwodzie elektrycznym połączono szeregowo opornik o oporności $R = 10\,[\Omega]$, cewkę o indukcyjności $L = 2.5$ [H] i kondensator o pojemności $C = 0.08$ [F] oraz zewnętrzną siłę elektromotoryczną $E(t) = 100\cos 5t$ [V]. Wyznaczyć natężenie prądu $I(t)$ [A], jeżeli $I(0) = 0$ i $Q(0) = 0$, gdzie $Q(t)$ oznacza ilość ładunku na kondensatorze C w chwili t.

Lista dziesiąta

3.1. a) Dwa stulitrowe zbiorniki Z_1 i Z_2, z których pierwszy zawiera 10 % wodny roztwór soli, a drugi czystą wodę, połączono dwiema rurkami umożliwiającymi przepływ cieczy między nimi. Przy czym pierwszą rurą roztwór przepływa w jedną stronę, a drugą odwrotnie. Przepływy te odbywają się z prędkością 2 litrów na minutę. Określić ilości soli $z_1(t)$ i $z_2(t)$ odpowiednio w zbiornikach Z_1 i Z_2. Przyjąć, że proces rozpuszczania soli w obu zbiornikach jest natychmiastowy.

b) Trzy pełne zbiorniki Z_1, Z_2 i Z_3 o pojemnościach odpowiednio 20, 40 i 50 litrów połączono dwiema rurkami. Rurki te umożliwiają przepływ cieczy ze zbiornika Z_1 do Z_2 oraz ze zbiornika Z_2 do Z_3 z prędkością 10 l/min. Zbiornik Z_1 zawiera 75 % wodny roztwór soli, a dwa pozostałe czystą wodę. Wyznaczyć ilości soli $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$ odpowiednio w zbiornikach Z_1, Z_2, Z_3. Przyjąć, że pierwszy zbiornik zasilany jest czystą wodą z prędkością 10 l/min, a z tą samą prędkością z ostatniego wypływa roztwór. Przyjąć również, że proces rozpuszczania soli w zbiornikach jest natychmiastowy.

3.2. Sprawdzić, że dla podanych układów równań różniczkowych wskazane ciągi funkcji są ich rozwiązaniami na zadanych przedziałach:

a) $\begin{cases} y_1' = -\dfrac{1}{y_2}, \\ y_2' = \dfrac{1}{y_1}, \end{cases}$, $\big(y_1(t), y_2(t)\big) = \left(e^{-\frac{t}{2}},\ 2e^{\frac{t}{2}}\right)$, $\boldsymbol{R}$;

b) $\begin{cases} y_1' = 1 - \dfrac{2y_1}{t}, \\ y_2' = y_1\left(1+\dfrac{2}{t}\right)+y_2-1, \end{cases}$ $\big(y_1(t), y_2(t)\big) = \left(\dfrac{t^3+3}{3t^2},\ 2e^t-\dfrac{t^3+3}{3t^2}\right)$, $(0,\infty)$;

c) $\begin{cases} y_1' = -\dfrac{y_1}{t} + y_2, \\ y_2' = -2\dfrac{y_1}{t^2} + \dfrac{y_2}{t}, \end{cases}$ $(y_1(t), y_2(t)) = \left(C_1 + C_2 t,\ 2C_2 + \dfrac{C_1}{t}\right)$, $(0,\infty)$.

3.3. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

a) $\begin{cases} x' = x\ln y, \\ y' = -y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = e^{-2}, \\ y(0) = e^2; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x' = \dfrac{5}{2}x - \dfrac{1}{2}y, \\ y' = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = -1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}y, \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 1; \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x' = x^3, \\ y' = \dfrac{1}{yx^2}, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ y(0) = -\sqrt{2}. \end{cases}$

3.4. Podane układy równań różniczkowych liniowych zapisać w postaci wektorowej: liniowych:

a) $\begin{cases} y_1' = ty_1 + t^2y_2 - \ln t, \\ y_2' = \dfrac{y_1}{t} + y_2; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 3y_2 + e^t, \\ y_2' = y_1 + e^{-t}; \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y_1' = y_2 + 3y_3 - 1, \\ y_2' = y_1 + 2y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + t. \end{cases}$.

3.5. Korzystając z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla układów równań różniczkowych liniowych wyznaczyć przedziały, na których podane zagadnienia początkowe mają jednoznaczne rozwiązania:

a) $\begin{cases} y_1' = \dfrac{y_1}{t} + y_2, \\ y_2' = y_1 - y_2 + \dfrac{1}{t-1}, \end{cases}$, $y_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$, $y_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$;

b) $\begin{cases} y_1'\sin t = y_1 - y_2 + \sin t, \\ y_2'\cos t = y_1 + y_2 + \cos t, \end{cases}$, $y_1\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$, $y_2\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{3}$.

3.6. Korzystając z metody eliminacji rozwiązać podane układy równań różniczkowych liniowych ze wskazanymi warunkami początkowymi:

a) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; **d*)** $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t^{-1} & t \\ -2t^{-3} & t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x(1) \\ y(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2+\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

3.7. Sprawdzić, czy podane funkcje wektorowe tworzą na zadanych przedziałach układy fundamentalne wskazanych układów równań różniczkowych liniowych:

a) $\vec{y}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}, \quad \vec{y}_2(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 4e^{-t} \end{bmatrix}, \quad \vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \vec{y}, \ \boldsymbol{R};$

b) $\vec{y}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}, \quad \vec{y}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}, \quad \vec{y}\,' = \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 \\ 1 & t^{-1} \end{bmatrix} \vec{y}, \ (0, \infty);$

c) $\vec{y}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t^{-1} \end{bmatrix}, \quad \vec{y}_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{y}\,' = \begin{bmatrix} -t^{-1} & -1 \\ -2t^{-2} & t^{-1} \end{bmatrix} \vec{y}, \ (-\infty, 0);$

d) $\vec{y}_1(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix}, \vec{y}_2(t) = \begin{bmatrix} e^{t} \\ -e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix}, \vec{y}_3(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{y}\,' = \begin{bmatrix} -8 & -11 & -2 \\ 6 & 9 & 2 \\ -6 & -6 & 1 \end{bmatrix} \vec{y}, \ \boldsymbol{R}.$

Lista jedenasta

3.8. Korzystając z poprzedniego zadania rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

a) $\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \vec{y}, \ \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$ **b)** $\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 1 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} \vec{y}, \ \vec{y}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$

c) $\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{t} & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{1}{t} \end{bmatrix} \vec{y}, \ \vec{y}(-1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix};$ **d)** $\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} -8 & -11 & -2 \\ 6 & 9 & 2 \\ -6 & -6 & 1 \end{bmatrix} \vec{y}, \ \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$

3.9. Substancja chemiczna A rozpada się na dwa składniki P i Q. Prędkość powstawania każdego z tych składników jest proporcjonalna do ilości substancji nierozłożonej. Znaleźć funkcje $p(t)$ i $q(t)$ określające odpowiednio ilości substancji P i Q w chwili t. Przy czym wiadomo, że w momencie rozpoczęcia procesu rozpadu było a jednostek substancji A, a po godzinie było $0.375a$ jednostek składnika P i $0.125a$ jednostek składnika Q.

3.10. Przy pomocy metody Eulera wyznaczyć układy fundamentalne podanych układów równań różniczkowych $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix};$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix};$ **c)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix};$ **d)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

3.11. Korzystając z metody Eulera dla różnych rzeczywistych wartości własnych rozwiązać układ równań $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ lub zagadnienie początkowe $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$, jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix};$ **b)** $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$ **c)** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix};$ **d)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \ \vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$

3.12. Korzystając z metody Eulera dla różnych zespolonych wartości własnych rozwiązać układ równań $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ lub zagadnienie początkowe $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$, jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix};$ **b)** $A = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix};$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$ **d)** $A = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \ \vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

3.13. Korzystając z metody Eulera dla różnych rzeczywistych i zespolonych wartości własnych rozwiązać układ równań $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ lub zagadnienie początkowe $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$, jeżeli:

a) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; **b)** $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\vec{y}_0=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$; **c)** $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3.14. Metodą eliminacji wyznaczyć rozwiązania ogólne podanych niejednorodnych układów równań różniczkowych lub zagadnień początkowych:

a) $\begin{cases} x' = x - 2y + e^t, \\ y' = x + 4y + e^{2t}; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = x - 5\sin t; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = 4x - 5y + 4t - 1, \\ y' = x - 2y + t, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Lista dwunasta

3.15. W obwodzie elektrycznym połączono szeregowo cewkę o indukcyjności $L_1 = 1$ [H], opornik o oporności $R = 20\,[\Omega]$ oraz źródło napięcia stałego $E = 50$ [V] i równolegle do oporu R drugą cewkę o indukcyjności $L_2 = 0.5$ [H]. Wyznaczyć natężenia prądów $I_R(t)$ [A] i $I_L(t)$ [A], przy założeniu, że $I_R(0) = 0$ i $I_L(0) = 0$.

3.16. Dla każdego podanego układu niejednorodnego wskazano jedno jego rozwiązanie. Znaleźć rozwiązanie ogólne tego układu:

a) $\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\vec{y} + \begin{bmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \operatorname{tg} t \end{bmatrix}$, $\vec{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} t \\ 2 \end{bmatrix}$;

b) $\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\vec{y} + \begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ te^{2t} \end{bmatrix}$, $\vec{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}te^{2t} \\ -\frac{11}{4}e^{2t} \end{bmatrix}$.

3.17. Sprawdzić, że podane funkcje wektorowe tworzą na wskazanym przedziale układ fundamentalny układu jednorodnego $\vec{y}\,' = A(t)\vec{y}$. Następnie rozwiązać układ niejednorodny $\vec{y}\,' = A(t)\vec{y} + \vec{h}(t)$ z zadanym warunkiem początkowym jeżeli:

a) $\vec{y}_1(t) = \dfrac{1}{t^3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{y}_2(t) = \dfrac{1}{t^4}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(0,\infty)$,

$A(t) = \dfrac{1}{t}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$, $\vec{h}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$, $\vec{y}(1) = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix}$;

b) $\vec{y}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}e^{-2t}$, $\vec{y}_2(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{5t}$, $\boldsymbol{R}$,

$A(t) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\vec{h}(t) = -\begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix}te^{-2t}$, $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$;

c) $\vec{y}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}e^t$, $\vec{y}_2(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}e^t$, $\vec{y}_3(t) = \begin{bmatrix} 3t + 2t^2 \\ 2t \\ 1 \end{bmatrix}e^t$, $\boldsymbol{R}$,

$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{h}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}e^t$, $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3.18. Korzystając z metody uzmienniania stałych znaleźć rozwiązanie ogólne układu niejednorodnego równań różniczkowych liniowych $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{h}(t)$, jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $\vec{h}(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t + \cos t \end{bmatrix}$; **b)** $A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\vec{h}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{bmatrix}$.

3.19. Rozwiązać zagadnienie początkowe $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{h}(t)$, $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$, jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{h}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\vec{h}(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{h}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\vec{h}(t) = \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{2t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}$, $\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3.20. Rozwiązać podane układy równań różniczkowych oraz naszkicować ich portrety fazowe:

a) $\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = -y; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -\frac{y}{2}; \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2y; \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x' = \frac{x}{2}, \\ y' = \frac{y}{2}. \end{cases}$

Lista trzynasta

3.21. Wyznaczyć punkty równowagi podanych równań i układów autonomicznych:

a) $y' + y = 2$; **b)** $y' = y^3 - y^2 + y - 1$; **c)** $y' = \ln y$;

d) $\begin{cases} x' = x - x^3 - xy^2, \\ y' = 2y - y^5 - yx^4; \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 1, \\ y' = 2xy; \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x' = (2+x)(y-x), \\ y' = (4-x)(y+x). \end{cases}$

3.22. Wyznaczyć punkty równowagi podanych równań i układów. Korzystając z definicji zbadać ich stabilność. Dla punktów stabilnych zbadać ich asymptotyczną stabilność:

a) $y' + y + 1 = 0$; **b)** $y' = 2y - 1$;

c) $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x; \end{cases}$ **d*)** $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -2x - 3y; \end{cases}$ **e*)** $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -2x + 3y. \end{cases}$

3.23. Zbadać stabilność punktu równowagi $(0, 0)$ układu równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach $\boldsymbol{\vec{y}}' = A\boldsymbol{\vec{y}}$, jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$; **b)** $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

3.24. Zbadać stabilność punktu równowagi $(0, 0, 0)$ układu równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach $\boldsymbol{\vec{y}}' = A\boldsymbol{\vec{y}}$, jeżeli:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} -0.25 & 1 & 0 \\ -1 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}$.

3.25. Określić typy punktów równowagi układu liniowego $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$; **b)** $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$; **c)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$;

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$; **e)** $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$; **f)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$;

g) $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; **h)** $A = \begin{bmatrix} -0.75 & 0.5 \\ 0.125 & -0.75 \end{bmatrix}$; **i)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3.26. Wyznaczyć wszystkie punkty równowagi podanych autonomicznych układów równań różniczkowych i na podstawie pierwszego przybliżenia (linearyzacji) zbadać ich stabilność:

a) $\begin{cases} x' = 2x + 3y - 1, \\ y' = -x - 2y + 1; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x' = x + 2y - 2, \\ y' = -3x - 4y; \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x' = x^2 - 10x + 16, \\ y' = y + 1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = 1 - xy, \\ y' = y - x^2; \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x' = 4y^2 - 3x + 2, \\ y' = 4x^2 - 4; \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x' = x - y + x^2, \\ y' = y + y^2; \end{cases}$

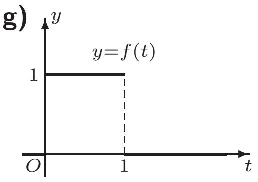
g) $\begin{cases} x' = x(x - y + 1), \\ y' = y(2x + y + 1); \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x' = x(x - 1), \\ y' = x - y; \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} x' = x - y^2, \\ y' = y(9x - 4). \end{cases}$

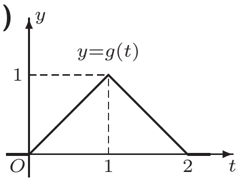
Lista czternasta

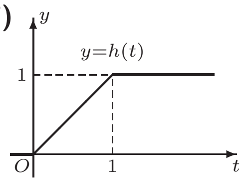
4.1. Korzystając z definicji obliczyć transformaty Laplace'a podanych funkcji:

a) $2t - 1$; **b)** $\sin 2t$; **c)** t^2;

d) te^{-t}; **e)** $e^{2t}\cos 2t$; **f)** $\operatorname{sh} t$;

g)


h)


i)


4.2. Wyznaczyć funkcje ciągłe, których transformaty Laplace'a mają postać:

a) $\dfrac{1}{s+2}$; **b)** $\dfrac{s}{s^2 + 4s + 5}$; **c)** $\dfrac{1}{s^2 - 4s + 3}$;

d) $\dfrac{s+2}{(s+1)(s-2)\left(s^2+4\right)}$; **e)** $\dfrac{s^2+1}{s^2\left(s^2-1\right)^2}$; **f)** $\dfrac{s+9}{s^2 + 6s + 13}$;

g) $\dfrac{2s+3}{s^3 + 4s^2 + 5s}$; **h)** $\dfrac{3s^2}{\left(s^3-1\right)^2}$; **i)** $\dfrac{e^{-s}}{s+1}$.

4.3. Metodą operatorową rozwiązać podane zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach:

a) $y' - y = 1, \quad y(0) = 1$; **b)** $y' - 2y = \sin t, \quad y(0) = 0$;

c) $y'' + y' = 0, \quad y(0) = 1, \, y'(0) = 1$; **d)** $y'' + 3y' = e^{-3t}, \quad y(0) = 0, \, y'(0) = -1$;

e) $y'' - 2y' + 2y = \sin t, \quad y(0) = 0, \, y'(0) = 1$; **f)** $y'' - 2y' + y = 1 + t, \quad y(0) = 0, \, y'(0) = 0$;

g) $y'' + 4y' + 4y = t^2, \quad y(0) = 0, \, y'(0) = 0$; **h)** $y'' + 4y' + 13y = te^{-t}, \quad y(0) = 0, \, y'(0) = 2$.

4.4. Metodą operatorową rozwiązać podane zagadnienia początkowe dla układów równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach:

a) $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = -x, \end{cases} \quad x(0) = 1, \; y(0) = -1$; **b)** $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \; y(0) = 1$;

c) $\begin{cases} x' = -2y + 3t, \\ y' = 2x + 4, \end{cases} \quad x(0) = 2, \; y(0) = 3$;

d) $\begin{cases} x' - y' = -\sin t, \\ x' + y' = \cos t, \end{cases} \quad x(0) = \dfrac{1}{2}, \; y(0) = -\dfrac{1}{2}$;

e) $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, \\ y' = -2x + y - 2z, \\ z' = 5x + 2y + 7z, \end{cases} \quad x(0) = 1, \; y(0) = 1, \; z(0) = 1$;

f) $\begin{cases} x' = -x + y + z + e^t, \\ y' = x - y + z + e^{3t}, \\ z' = x + y + z + 4, \end{cases} \quad x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ z(0) = 0.$

4.5. Wyznaczyć funkcje ciągłe, których transformaty Laplace'a mają postać:

a) $\dfrac{1}{s+2}$; **b)** $\dfrac{s}{s^2+4s+5}$; **c)** $\dfrac{1}{s^2-4s+3}$;

d) $\dfrac{s+2}{(s+1)(s-2)\left(s^2+4\right)}$; **e)** $\dfrac{s^2+1}{s^2\left(s^2-1\right)^2}$; **f)** $\dfrac{s+9}{s^2+6s+13}$;

g) $\dfrac{2s+3}{s^3+4s^2+5s}$; **h)** $\dfrac{3s^2}{\left(s^3-1\right)^2}$; **i)** $\dfrac{e^{-s}}{s+1}$.

4.6. Korzystając z podstawowych własności przekształcenia Laplace'a obliczyć transformaty podanych funkcji:

a) $\sin^4 t$; **b)** $\cos 4t \cos 2t$;

c) $t^2 \cos t$; **d)** $t \operatorname{sh} 3t$;

e) $te^t \cos t$; **f)** $e^{3t} \sin^2 t$;

g) $\mathbf{1}(t-2)\sin(t-2)$; **h)** $\mathbf{1}(t-1)e^{t-1}$;

i) $t^2\mathbf{1}(t-3)$; **j)** $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad 0 \leqslant t < 1, \\ 0 & \text{dla} \quad 1 \leqslant t < 2, \\ 1 & \text{dla} \quad 2 \leqslant t < 3, \\ 0 & \text{dla} \quad 3 \leqslant t < 4, \\ 1 & \text{dla} \quad 4 \leqslant t < 5, \\ 0 & \text{dla} \quad 5 \leqslant t < \infty. \end{cases}$

*** 4.7.** Obliczyć sploty podanych par funkcji

a) $f(t) = e^t,\ \ g(t) = e^{2t}$; **b)** $f(t) = \cos 3t,\ \ g(t) = \cos t$.

*** 4.8.** Korzystając ze wzoru Borela wyznaczyć funkcje, których transformaty dane są wzorami:

a) $\dfrac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}$; **b)** $\dfrac{s}{\left(s^2+1\right)^2}$; **c)** $\dfrac{1}{(s-1)^2(s+2)}$.

*** 4.9.** Niech $\varphi(t)$ będzie rozwiązaniem równania jednorodnego $y'' + py' + qy = 0,\ (q \neq 0)$ z warunkami początkowymi $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$. Pokazać, że jeżeli funkcja $h(t)$ jest oryginałem, to rozwiązanie $y(t)$ zagadnienia początkowego

$$y'' + py' + qy = h(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ (q \neq 0)$$

wyraża się wzorem $y(t) = -\dfrac{1}{q}\left(\varphi'(t) * h(t)\right)$. Przedstawić rozwiązania podanych zagadnień początkowych w postaci splotów:

a) $y'' + y' - 2y = \cos t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;

b) $y'' - 2y' + y = e^t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.