Dzień dobry,

nasz temat to: Całka nieoznaczona.

Zacznijmy od rozważenia pewnego szczególnego zadania, które wprowadzi nas w zagadnienie.

Mamy daną funkcję f. Np. niech $f(x) = x^2$. Nasze zadanie polega na znalezieniu funkcji pierwotnej F, tzn. takiej że $F'(x) = f(x)$.

Wiemy, że pochodna obniża o jeden potęgę funkcji potęgowej. Wyraża to wzór: $(x^a)' = ax^{a-1}$.

Stąd F powinna wyglądać jakoś tak: x^3.

Sprawdźmy: $(x^3)' = 3x^2$. Co prawda nie trafiliśmy od razu ale jesteśmy blisko.

Trzeba coś zrobić z trójką przed x^3. To jasne. Musimy wziąć $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Teraz faktycznie $F'(x) = (\frac{1}{3}x^3)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$.

Zgadliśmy :)

To co przed chwilą zrobiliśmy nazywa się całkowaniem funkcji f.

W matematyce zapisuje się to przy pomocy szczególnych symboli:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Litera C oznacza stałą. Tzw. stałą całkowania.

Skąd ona się bierze? Zauważmy, że nie tylko $\frac{1}{3}x^3$ jest funkcją pierwotną funkcji x^2, ale także np. $\frac{1}{3}x^3 + 7$, czy $\frac{1}{3}x^3 - 4$. Jest tak gdyż pochodna ze stałej jest równa zero.

Ogólnie każda funkcja postaci $\frac{1}{3}x^3 + C$, gdzie C jest dowolną liczbą rzeczywistą jest funkcją pierwotną funkcji x^2.

Analogicznie łatwo zgadniemy, że:

1. $$\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \quad \text{dla } a \neq -1$$

2. $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

3. $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

4. $$\int e^x \, dx = e^x + C$$

5. $$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

6. $$\int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

   Ta łatwość zgadywania wynika z tego, że znamy już wzory na pochodne.

   Okaże się że tylko niektóre całki możemy uzyskać korzystając jedynie z naszej wiedzy o pochodnych.

   Przykład pierwszy z brzegu: $\int \ln x \, dx$. Ta całka jest już dość trudna do zgadnięcia.

   Dlatego będziemy musieli poznać pewne metody i posiąść umiejętność ich stosowania by radzić sobie z jak największą klasą całek.

   Wcześniej jednak uzupełnimy naszą listę o jeszcze dwa wzory:

7. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$$

8.
$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$$

Zadanie 62. Obliczyć całki nieoznaczone.

a)

$$\int (x^3 + \frac{4}{x} - 3\sqrt{x})\, dx = \int (x^3 + 4\cdot\frac{1}{x} - 3\cdot x^{\frac{1}{2}})\, dx = \frac{1}{4}x^4 + 4\ln x - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + 4\ln x - 2\cdot x\sqrt{x} + C$$

Uwaga. Mimo, że wzór 8. sugeruje by w rozwiązaniu pojawiła się wartość bezwzględna, dokładnie $\ln|x|$, w naszym przykładzie możemy napisać prościej: $\ln x$, gdyż ze względu na dziedzinę całkowanej funkcji i tak zmienna x może być tylko dodatnia.

b)

$$\int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}\, dx = \int 1 - \sqrt{x}\, dx = x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

W końcówce rozwiązania przykładu b) korzystamy z obliczonej w przykładzie poprzednim całki funkcji $\sqrt{x}$.

c)

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2(x^2+1) - (x^2+1) + 1}{x^2+1}\, dx = \int x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + \operatorname{arc\,tg} x + C$$

d)

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\, dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}\, dx = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x}\, dx =$$

$$\int \cos x + \sin x\, dx = \sin x - \cos x + C$$

e)

$$\int \frac{x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx =$$

$$\int x^{3-\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \int x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{1}{6}} - x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - 2\sqrt{x} + C$$

f)

$$\int e^{-x}\cdot 3^{2x}\, dx = \int \frac{9^x}{e^x}\, dx = \int \left(\frac{9}{e}\right)^x dx \overset{*}{=} \frac{\left(\frac{9}{e}\right)^x}{\ln\frac{9}{e}} + C \overset{\star}{=} \frac{\left(\frac{9}{e}\right)^x}{\ln 9 - 1} + C$$

$*$ korzystamy ze wzoru 5.
$\star$ korzystamy z własności logarytmu: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

* * *

Tę część naszej nauki zacznę od wzoru, który w pierwszej chwili może wydać się nieco osobliwy. Jest jednak często przydatny.

9.
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln|f(x)| + C$$

A teraz przykłady wykorzystania wzoru 9.

a) $\int \operatorname{ctg} x\ dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\ dx = \ln|\sin x| + C$

b) $\int \operatorname{tg} x\ dx \ = \ \int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx \ = \ -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\ dx \ = \ -\ln|\cos x| + C$

c) $\int \frac{x+3}{x^2+1}\ dx \ = \ \int \frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+1}\ dx \ =$

$= \ \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\ dx + 3\int \frac{1}{x^2+1}\ dx \ = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\operatorname{arc\,tg} x + C$

Bardzo ważnym narzędziem jest wzór na całkowanie przez części. Z grubsza rzecz biorąc mówi on jak można spróbować obliczyć całkę iloczynu funkcji.

10.
$$\int f(x)g(x)\ dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\ dx,$$

gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f.

Zauważmy, że wzór 10. nie musi dać natychmiast rozwiązania. Zamienia on tylko całkę iloczynu funkcji na całkę iloczynu innych funkcji. Mimo to jest często bardzo pomocny.

Przykłady.

I. $\int x^4 \cdot \ln x\ dx \ = \ \frac{1}{5}x^5 \ln x - \int \frac{1}{5}x^5 \cdot \frac{1}{x}\ dx \ = \ \frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{5}\int x^4\ dx \ =$

$\frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}x^5 + C$

II. $\int x \cdot \cos x\ dx \ = \ x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x\ dx \ = \ x \cdot \sin x - (-\cos x) + C \ =$

$= \ x \cdot \sin x + \cos x + C$

Zastosowanie wzoru 10. należy w przykładzie II. rozumieć w ten sposób, że $f(x) = \cos x$, a $g(x) = x$.

III. W tym przykładzie wzoru na całkowanie przez części użyjemy dwukrotnie.

$\int x^2 e^x\ dx \ = \ x^2 e^x - \int 2xe^x\ dx \ = \ x^2 e^x - 2\int xe^x\ dx \ =$

$= \ x^2 e^x - 2(xe^x - \int 1 \cdot e^x)\ dx \ = \ x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C \ =$

$= \ x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$

IV. Teraz będziemy mieli do scałkowania funkcję $\ln x$.

Zapisujemy ją jako iloczyn $1 \cdot \ln x$ i rozpoczynamy całkowanie przez części. Zobaczmy jaki efekt da ten prosty trik.

$\int \ln x\ dx \ = \ \int 1 \cdot \ln x\ dx \ = \ x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\ dx \ =$

$= x \cdot \ln x - \int 1\ dx \ = x \cdot \ln x - x + C$

V. Ten przykład policzymy też przez części ale znów trochę inaczej:

$\int e^x \sin x\, dx \ = \ e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx =$ (jeszcze raz całkujemy przez części)

$= \ e^x \sin x - [e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\, dx] \ = \ e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx$

Porównajmy teraz to od czego wyszliśmy z tym co dostaliśmy, dwukrotnie całkując przez cześci:

$\int e^x \sin x\ dx \ = \ e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \sin x\ dx$

Całkę z prawej strony równości przenosimy na lewą:

$2 \int e^x \sin x\ dx \ = \ e^x \sin x - e^x \cos x + C$

Dzielimy stronami przez 2 i otrzymujemy:

$\int e^x \sin x\ dx \ = \ \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C$

Uwaga. C nie dzielimy i nie przedstawiamy w postaci $\frac{C}{2}$, gdyż C, w tym kontekście, nie jest konkretną liczbą lecz symbolizuje dowolną stałą rzeczywistą.

$* \ * \ *$

Teraz rozwiążę kilka zadań z zastosowania całkowania przez częsci z naszej listy.

63 a) Najpierw chcę byśmy zauważyli, że $\int e^{2x}\ dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$, podobnie $\int \cos 5x\ dx \ = \ \frac{1}{5}\sin 5x + C$. Wzory te łatwo zgadnąć. Wystarczy licząc pochodną z e^{2x} zauważyć, że pojawia się czynnik 2 (jako pochodna wewnętrzna). Podobnie jest w przypadku drugiej całki.
Analogicznie mamy $\int e^{-3x}\ dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$.
Skoro to wiemy, możemy teraz całkować przez części nasz przykład:

$$\int xe^{-3x}\ dx = x\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\ dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \left(-\frac{1}{3}\right)\int e^{-3x}\ dx =$$

$$-\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\ dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) + C = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$$

63 c)

$$\int \sqrt{x} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} - \frac{2}{3}\int x\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{x+1}\ dx =$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} - \frac{1}{3}\int \frac{x}{x+1}\ dx$$

Ponieważ $\int \frac{x}{x+1}\ dx = \int \frac{(x+1)-1}{x+1}\ dx = \int 1 - \frac{1}{x+1}\ dx = x - \ln|x+1| + C$

możemy już napisać odpowiedź do naszego przykładu:

$$\underline{\int \sqrt{x} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\ln|x+1| + C}$$

63 d)

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\ dx = \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\ dx \overset{*}{=} x\cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\ dx \overset{\star}{=} x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$$

$*$ Przypomnijmy, że $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$\star$ to już liczyliśmy, całka z tangensa, strona nr 3, przykład b).

$* \ * \ *$

Są dwie główne metody całkowania. Całkowanie przez części i całkowanie przez podstawienie. Pierwszą już Państwo poznali. Teraz kolej na drugą.

Dla nas kluczowa jest tu nie teoria lecz to by posiąść umiejętność stosowania tej metody. Dlatego od razu przystąpię do zrobienia konkretnego przykładu i właśnie na przykładach nauczymy się całkować przez podstawienie.

Pierwszym przykładem jest całka

$$\int x\sqrt{x^2+2}\,dx$$

Może wydać się, że trzeba tu całkować przez części. Jednak gdy tego spróbujemy, od razu pojawią się przed nami piętrzące się trudności. Zastosujemy całkowanie przez podstawienie.

$$\int x\sqrt{x^2+2}\,dx \left|\begin{array}{c} x^2+2=t \\ 2xdx=1dt \\ xdx=\frac{1}{2}dt \end{array}\right| \overset{*}{=} \int \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C =$$

$$= \frac{1}{3}t\sqrt{t}+C \overset{\star}{=} \frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{x^2+2}+C$$

A teraz wyjaśnienia.

$*$ Tu właśnie podstawiamy. Za x^2+2 podstawiamy nową zmienną t. Okazuje się, że wówczas, pełniący dotychczas rolę ozdobnika napis dx "ożywa". Tzn. nie zamienia się "z automatu" na dt. W zamieszczonej tabelce mamy $x^2+2=t$, a poniżej $2xdx=1dt$. Co jest efektem zróżniczkowania lewej strony pierwszej równości względem zmiennej x, a prawej względem t.

Elementy naszej całki: x oraz dx, zamieniają się ostatecznie na $\frac{1}{2}dt$.

$\star$ A tutaj, po scałkowaniu funkcji zmiennej t wracamy do wyjściowej zmiennej x wg wzoru z tabelki. Musimy wykonać ten końcowy krok, gdyż naszym zadaniem było znalezienie funkcji pierwotnej do funkcji zmiennej x.

Oczywiście możemy dziwić się skąd w naszej tabelce wzięła się równość $2xdx=dt$.

Ma to teoretyczne uzasadnienie. Nie sądzę jednak by było teraz celowe koncentrowanie się na tej mało praktycznej kwestii.

Możemy myśleć tak: $t=x^2+2$, więc używając symboli stosowanych najczęściej przez fizyków, można zapisać pochodną wielkości t rozumianej jako funkcja zmiennej x w sposób nastepujacy $\frac{dt}{dx}=2x$. Co daje właśnie $dt=2xdx$, a następnie $\frac{1}{2}dt=xdx$.

Teraz rozwiażę dwa przykłady z naszej listy.

64. c)

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx \left|\begin{array}{c} 1+\sin x=t \\ \cos x dx=dt \end{array}\right| = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = 2t^{\frac{1}{2}}+C = 2\sqrt{1+\sin x}+C$$

A teraz trudniejszy,

przykład 64. h)

$$\int \frac{1}{2+\sqrt{x}}\,dx \left|\begin{array}{c} 2+\sqrt{x}=t \Leftrightarrow \sqrt{x}=t-2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt \\ dx=2\sqrt{x}dt \\ dx=2(t-2)dt \end{array}\right| = \int \frac{1}{t}2(t-2)\,dt = 2\int \frac{t-2}{t}\,dt =$$

$$= 2\int 1-\frac{2}{t}\,dt = 2\int 1-2\frac{1}{t}\,dt = 2(t-2\ln t)+C = 2t-4\ln t+C =$$

$$= 2(2+\sqrt{x})-4\ln(2+\sqrt{x})+C = 4+2\sqrt{x}-4\ln(2+\sqrt{x})+C \overset{*}{=} 2\sqrt{x}-4\ln(2+\sqrt{x})+C$$

$*$ Opuściliśmy w formule wolno stojącą liczbę 4 by było prościej. Możemy to zrobić, gdyż C jest "dowolną stałą" tak samo jak $4 + C$.

$* \ * \ *$

Kontynuujemy opowiadanie o całkowaniu przez podstawienie.
Ponadto rozszerzymy nasze umiejętności całkowania funkcji trygonometrycznych.

Zacznę od całki

$$\int \cos^3 x \; dx$$

Podpowiem, że dobrze policzyć ją przez podstawienie. Może okazać się że taka podpowiedź to za mało. Jeśli podobnych całek nie liczyliśmy, nie od razu musimy zorientować się co podstawić za nową zmienną. Najbardziej narzucający się pomysł: $\cos x = t$ nic tu nie daje. Okazuje się, że w tym przykładzie dobrym podstawieniem jest: $\sin x = t$. Trudność może polegać na tym, że na poczatku, w przykładzie symbolu $\sin x$ w ogóle nie widać.

$$\int \cos^3 x \; dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \; dx \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int 1 - t^2 \; dt =$$

$$= t - \frac{1}{3} t^3 + C = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

Czy ten szczególny przykład może nas nauczyć czegoś więcej?
Tak. Okazuje się że w podobny sposób, korzystając z jedynki trygonometrycznej, możemy liczyć całki innych nieparzystych potęg funkcji $\cos x$ oraz $\sin x$.

Przykład:

$$\int \sin^7 x \; dx = \int (1 - \cos^2 x)^3 \sin x \; dx \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = -\int (1 - t^2)^3 \; dt =$$

$$= \int (t^2 - 1)^3 \; dt = \int t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1 \; dt = \frac{1}{7} t^7 - 3 \cdot \frac{1}{5} t^5 + 3 \cdot \frac{1}{3} t^3 - t + C =$$

$$= \frac{1}{7} \cos^7 x - \frac{3}{5} \cos^5 x + \cos^3 x - \cos x + C$$

A co z potęgami parzystymi?

Ograniczymy się do potęgi 2. Mamy więc całki

$$\int \sin^2 x \; dx \text{ oraz } \int \cos^2 x \; dx$$

Wychodząc od znanej tozsamości: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ dostaniemy wzór:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Stąd

$$\int \sin^2 x \; dx = \frac{1}{2} \int 1 - \cos 2x \; dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin 2x) + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Teraz przedstawiając $\cos^2 x$ jako $1 - \sin^2 x$ i korzystając z obliczonej już całki funkcji $\sin^2 x$ otrzymamy wynik różniący sie od poprzedniego tylko znakiem przy $\frac{1}{4} \sin 2x$:

$$\int \cos^2 x \; dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Gdy idzie o $\int \operatorname{tg}^2 x \; dx$ to okaże się tu ważne, żeby pamiętać odpowiedni wzór na pochodną:

$(\operatorname{tg} x)' \; = \; 1 + \operatorname{tg}^2 x.$

Dalej już wszystko pójdzie łatwo:

$$\int \operatorname{tg}^2 x \; dx = \int 1 + \operatorname{tg}^2 x - 1 \; dx = \operatorname{tg} x - x + C \; .$$

Podobnie radzimy sobie z $\int \operatorname{ctg}^2 x \; dx$.

$$* \; * \; *$$

Teraz zajmiemy się całkowaniem funkcji wymiernych. Będziemy często korzystać ze wzoru nr 9 który się pojawił na stronie 3 tego tekstu:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \; dx = \ln |f(x)| + C$$

Przykłady.

a)

$$\int \frac{1}{x-3} \; dx \; = \; \ln |x-3| + C$$

b)

$$\int \frac{1}{3-x} \; dx \; = \; \int \frac{-1}{x-3} \; dx \; = \; - \int \frac{1}{x-3} \; dx \; = \; - \ln |x-3| + C$$

c)

$$\int \frac{6x+3}{x^2+x-4} \; dx \; = \; \int \frac{3(2x+1)}{x^2+x-4} \; dx \; = \; 3 \int \frac{2x+1}{x^2+x-4} \; dx \; = \; 3 \ln |x^2+x-4| + C$$

d)

$$\int \frac{-4x+7}{x^2+x-2} \; dx = \int \frac{-4x+7}{(x-1)(x+2)} \; dx \overset{*}{=} \int \frac{1}{x-1} + \frac{-5}{x+2} \; dx =$$

$$= \int \frac{1}{x-1} - 5\frac{1}{x+2} \; dx \overset{\star}{=} \ln |x-1| - 5 \ln |x+2| + C$$

$*$ Zrobiliśmy tu to co ćwiczyli już Państwo na zajęciach z algebry: rozłożyliśmy funkcję wymierną na ułamki proste.

$\star$ A tutaj wykorzystaliśmy wzór 9.

Teraz kolejne, tym razem bardziej złożone przykłady.

1.

$$\int \frac{5x^3 - 8x^2 + x - 12}{x^4 - 3x^3} \; dx = \int \frac{5x^3 - 8x^2 + x - 12}{x^3(x-3)} \; dx =$$

$$\frac{5x^3-8x^2+x-12}{x^3(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-3} \quad | \cdot x^3(x-3)$$

$$5x^3 - 8x^2 + x - 12 = Ax^2(x-3) + B(x(x-3) + C(x-3) + Dx^3$$

$$5x^3 - 8x^2 + x - 12 = (A+D)x^3 + (-3A+B)x^2 + (-3B+C)x - 3C$$

$$-3C = -12 \to \underline{C=4} \to -3B + 4 = 1 \to \underline{B=1} \to \underline{A=3} \to \underline{D=2}$$

$$\text{Zatem } \; \frac{5x^3-8x^2+x-12}{x^4-3x^3} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{2}{x-3}$$

$$= \int \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{2}{x-3}\ dx = \int 3\frac{1}{x} + x^{-2} + 4x^{-3} + 2\frac{1}{x-3}\ dx =$$

$$= 3\ln|x| + (-1)x^{-1} + 4 \cdot \frac{1}{-2}x^{-2} + 2\ln|x-3| + C =$$

$$= 3\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + 2\ln|x-3| + C$$

2.

$$\int \frac{6x^2+4}{x^3-x^2-x-2}\ dx = \int \frac{6x^2+4}{(x-2)(x^2+x+1)}\ dx =$$

$$\left| \begin{array}{c} \frac{6x^2+4}{(x-2)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad | \cdot (x-2)(x^2+x+1) \\ 6x^2+4 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-2) \\ 6x^2+4 = (A+B)x^2 + (A-2B+C)x + A - 2C \\ \text{Otrzymujemy układ trzech równań :} \\ \text{I. } A+B=6\ ;\ \text{II. } A-2B+C=0\ ;\ \text{III. } A-2C=4 \\ \text{Dodajemy stronami } 4\cdot\text{I} + 2\cdot\text{II} + \text{III i mamy :} \\ 7A = 28 \rightarrow A = 4 \text{ stąd } B = 2 \text{ i } C = 0 \\ \text{Dostajemy zatem } \frac{6x^2+4}{x^3-x^2-x-2} = \frac{4}{x-2} + \frac{2x}{x^2+x+1} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{4}{x-2} + \frac{2x}{x^2+x+1}\ dx = 4\int \frac{1}{x-2}\ dx + \int \frac{2x}{x^2+x+1}\ dx =$$

$$= 4\ln|x-2| + \int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}\ dx = 4\ln|x-2| + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+x+1}\ dx \stackrel{*}{=}$$

$$\stackrel{*}{=} 4\ln|x-2| + \ln(x^2+x+1) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

* a) Wykorzystujemy tu kolejny raz wzór 9 (licznik $2x+1$ jest pochodną mianownika x^2+x+1).

Została już tylko ostatnia, trochę trudniejsza całka.

b)

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\ dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\ dx = \int \frac{1}{\frac{3}{4}[\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2 + 1]}\ dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})]^2 + 1}\ dx \left| \begin{array}{c} \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}) = t \\ \frac{2}{\sqrt{3}}dx = dt \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\ dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg} t + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$$