Lista zadań nr 2 z Matematyki II

dla studentów Wydziału Architektury, kierunku Gospodarka Przestrzenna

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji
   (a) $f(x,y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$,
   (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$,
   (c) $f(x,y) = \ln(4 - x^2 - y^2) + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$,
   (d) $f(x,y) = \sqrt{1 - e^{xy}} \ln(x^2 - y)$.
2. Naszkicować wykresy funkcji
   (a) $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$,
   (b) $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y$,
   (c) $f(x,y) = -3 + 2\sqrt{x^2 + y^2}$,
   (d) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$,
   (e) $f(x,y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$,
   (f) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$,
   (g) $f(x,y) = y^2$.
3. Obliczyć pochodne cząstkowe 1-ego rzędu funkcji
   (a) $f(x,y) = x^3 + 4x^2y - y^5$,
   (b) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$,
   (c) $f(x,y) = x \cdot \sqrt{x^2 - y^2}$.
4. Obliczyć pochodne cząstkowe 1-ego i 2-ego rzędu funkcji
   (a) $f(x,y) = x^5 + 4x^3 - 2xy^4 + y^6$,
   (b) $f(x,y) = x^y$,
   (c) $f(x,y) = x \cdot \ln(x^3 + y^2)$.
5. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej, do wykresu funkcji
   (a) $f(x,y) = 3^{y-2x}$, w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = (4, 1, f(4,1))$,
   (b) $f(x,y) = \frac{y + \ln x}{x\sqrt{xy}}$, w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = (1, 16, f(1,16))$,
   (c) $f(x,y) = y\sqrt{\operatorname{arc\,tg} x}$, w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{3}, 2, z_0)$.
6. Wyznaczyć ekstrema lokalne podanych funkcji:
   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + y^3$,
   (b) $f(x,y) = x^2 - y^3 + 2xy$,
   (c) $f(x,y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 15$,
   (d) $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln^2 x + y^2 - \ln xy$,
   (e) $f(x,y) = x^2(1+y)^3 + y^2$,
   (f) $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.
7. Wyznaczyć ekstremum warunkowe funkcji:
   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, przy warunku $xy = 1$,
   (b) $f(x,y) = x^2 - 2xy$, przy warunku $x - y^2 = 0$.

8. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji na podanym zbiorze domkniętym, ograniczonym D:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 2y$,
   D - trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,-4)$,

   (b) $f(x,y) = x + 2y$, $\quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

9. W trójkącie o wierzchołkach $(0,0),(3,0),(0,8)$ znaleźć punkt dla którego suma kwadratów odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

10. Koszt budowy 1m^2 podłogi magazynu wynosi 40 zł, sufitu 60 zł, a ścian 20 zł. Przy jakich wymiarach prostopadłościennego magazynu o pojemności 4320 m^3 koszt budowy będzie najmniejszy?

11. Obliczyć całkę podwójną

    (a)
    $$\iint_D x \;\; dxdy,$$
    gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi
    $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$,

    (b)
    $$\iint_D xy \;\; dxdy,$$
    gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi
    $y = x^4$, $y = -8x$,

    (c)
    $$\iint_D x^2 y \;\; dxdy,$$
    gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi
    $y = -2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = -\sqrt{-x}$,

    (d)
    $$\iint_D e^{\frac{x}{y}} \;\; dxdy,$$
    gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi
    $y = 1$, $x = 0$, $y = \sqrt{x}$.

12. Narysować obszar całkowania, a następnie zmienić kolejność całkowania w całkach:

    (a)
    $$\int_{-2}^{0} dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\; dy,$$

    (b)
    $$\int_{0}^{2} dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\; dy,$$

    (c)
    $$\int_{0}^{2} dx \int_{-x^2}^{0} f(x,y)\; dy,$$

    (d)
    $$\int_{0}^{8} dx \int_{-x}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\; dy.$$

13. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć całkę podwójną:

(a)
$$\iint_D x \ \ dxdy,$$
gdzie D jest obszarem zadanym warunkami:
$4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9,\ x \leqslant 0;$

(b)
$$\iint_D xy \ \ dxdy,$$
gdzie D jest obszarem zadanym warunkami:
$x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \leqslant 0,\ y \leqslant 0;$

(c)
$$\iint_D y\sqrt{x^2 + y^2} \ \ dxdy,$$
gdzie D jest obszarem zadanym warunkami:
$x^2 + y^2 \leqslant 7, y \leqslant 0;$

(d)
$$\iint_D xy \ \ dxdy,$$
gdzie D jest obszarem zadanym warunkami:
$x^2 + y^2 - 4y \leqslant 0,\ x \geqslant y.$

14. Zamienić całkę podwójną na całki iterowane we współrzędnych biegunowych

(a)
$$\iint_D xy^2 \ \ dxdy,$$
$$D: \ x^2 - 2x + y^2 \leqslant 0 \ ;$$

(b)
$$\iint_D x\sqrt{x^2 + y^2} \ \ dxdy,$$
$$D: \ x^2 + 2x + y^2 - 2y \leqslant 0 \ .$$

15. Obliczyć objętość brył ograniczonych powierzchniami:

(a) $z = x^2 + y^2 - 9,\ z = 9 - x^2 - y^2,$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 - 2x = 0,$

(c) $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}} - e^2,\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$

16. Obliczyć pole części powierzchni $z = x^2 + y^2$, znajdującej się pomiędzy płaszczyznami $z = 1,\ z = 4$.

17. Obliczyc całki niewłaściwe

a) $\int\limits_4^\infty \frac{10 \cdot e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx,$

b) $\int\limits_e^\infty \frac{1}{x \ln^2 x}\ dx.$

18. Korzystając z kryterium porównawczego uzasadnić zbieżnosc, bądź rozbieżność całki niewłaściwej.

a) $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^3+x}}\ dx,$

b) $\int\limits_1^\infty \frac{x+1}{x^2+1}\ dx.$

19. Obliczyć sumy szeregów geometrycznych.

(a)
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots,$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7}{4^n},$$

(c)
$$125 - 25 + 5 - \dots,$$

(d)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{11 \cdot 3^{2n+1}}{10^n}.$$

20. Obliczyć sumy szeregów

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n},$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}.$$

21. * Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n,$$
gdzie (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie a i różnicy r, (b_n) zaś ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie b i ilorazie q, $(-1 < q < 1, q \neq 0)$.

22. * Wykorzystując wynik poprzedniego zadania obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+2}{4^n}.$$

23. Korzystając z odpowiednich kryteriów rozstrzygnąć czy zbieżne są szeregi

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{n^8}},$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + n^2},$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n} + n}{\sqrt{n^5} + n^2},$$

(d)
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^{90}}{e^n},$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!},$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!},$$

(g)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n},$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2+\sqrt{n}}.$$

24. Wyznaczyć rozwiązania ogólne równań różniczkowych o zmiennych rozdzielonych

    (a)
    $$yy' + 4t = 0,$$

    (b)
    $$y' = 2ty^2,$$

    (c)
    $$(1-t^2)y' = 2y,$$

    (d)
    $$2\sqrt{t}y' = \sqrt{1-y^2},$$

25. Wyznaczyć rozwiązanie równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych
    $$\frac{y'}{\ln t} - \frac{1}{y} = 0$$
    z zadanym warunkiem początkowym $y(e) = -\pi$.

26. Wyznaczyć rozwiązania ogólne równań różniczkowych liniowych

    (a)
    $$y' + 2y = e^{-t},$$

    (b)
    $$y' + y = \sin t,$$

    (c)
    $$ty' = 2y + t^3 \cos t,$$

    (d)
    $$y' + 2ty = e^{-t^2}.$$

27. Wyznaczyć rozwiązanie równania różniczkowego liniowego
    $$ty' + y = t + 1\ ,$$
    z zadanym warunkiem początkowym $y(1) = 0$.

28. Sprawdzić, że funkcje $y_1(t) = t$ oraz $y_2(t) = \ln t$ tworzą układ fundamentalny rozwiązań równania
    $$t^2(1-\ln t)y'' + ty' - y = 0$$
    na przedziale $(0, e)$. Znaleźć rozwiązanie tego równania spełniające warunki $y(1) = 2, y'(1) = 1$.

29. Znaleźć rozwiązania ogólne liniowych równań różniczkowych, rzędu drugiego o stałych współczynnikach

(a)
$$6y'' - 5y + y = 0,$$

(b)
$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

(c)
$$y'' - 2y' + 5y = 0,$$

(d)
$$y'' - 4y' = 0.$$

30. Znaleźć rozwiązania liniowych równań różniczkowych, rzędu drugiego o stałych współczynnikach z zadanym warunkiem początkowym

(a)
$$y'' + y' - 6y = 0\ ,\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$$

(b)
$$y'' + 9y = 0\ ,\quad y(\frac{\pi}{3}) = 1,\ y'(\frac{\pi}{3}) = 1,$$

(c)
$$y'' - 2y' + y = 0\ ,\quad y(1) = 2,\ y'(1) = 3.$$

31. Stosując metodę uzmienniania stałych rozwiązać następujące równania różniczkowe

(a)
$$y'' + y = \frac{1}{\sin^2 t},$$

(b)
$$y'' - 6y' + 5y = 4e^{6t},$$

(c)
$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}\ln t,$$

(d)
$$y'' - y' = \frac{e^t}{1 + e^t},$$

(e)
$$y'' + 2y' = y = t^2 - t,$$

(f)
$$y'' - 4y' + 3y = (t - 2)e^{3t},$$

(g)
$$y'' + 9y = \cos 3t.$$