Elementy analizy matematycznej 2 na W10

Lista zadań uzupełniających wykład dr Pauliny Frej w semestrze letnim 2023/24.

Zadania są wybrane z list zadań opracowanych przez dr J. Sulkowską oraz dra M. Gewerta i dra Z. Skoczylasa z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz z podręcznika *Problemy Analizy Matematycznej* w red. B. Demidowicza.

1 Lista podstawowa obowiązująca na ćwiczeniach.

Rachunek różniczkowy funkcji dwóch zmiennych.

Wyznaczanie dziedziny. Szkicowanie wykresów funkcji dwóch zmiennych (powierzchnie obrotowe i walcowe).

Zadanie 1.1. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne podanych funkcji dwóch zmiennych.

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2-y}}$, b) $f(x,y) = \ln\dfrac{x^2+y^2-9}{16-x^2-y^2}$, c) $f(x,y) = \sqrt{x\,\sin y}$,

Zadanie 1.2. Naszkicować wykresy podanych funkcji dwóch zmiennych.

a) $f(x,y) = 1 - 2\sqrt{x^2+y^2}$,

b) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$,

c) $f(x,y) = \sqrt{3+2x-x^2-y^2}$,

d) $f(x,y) = 1-y^2$.

Obliczanie pochodnych cząstkowych. Wyznaczanie równania płaszczyzny stycznej. Zastosowanie różniczki do szacowania dokładności obliczeń

Zadanie 1.3. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji dwóch zmiennych.

a) $f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$,

b) $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right)$,

c) $f(x,y) = e^{\cos\frac{x}{y}}$,

d) $f(x,y) = \ln\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)$,

Zadanie 1.4. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w podanym punkcie tego wykresu.

a) $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{1}{2} + x^2 - y\right)$, w punkcie przecięcia wykresu z osią Oz,

b) $f(x,y) = \dfrac{\arcsin\, x}{\arccos\, y}$, w punkcie $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, z_0\right)$,

c) $f(x,y) = e^{x+y} - e^{4-y}$, w punkcie przecięcia wykresu z osią Ox,

Zadanie 1.5.

a) Na wykresie funkcji $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ wskazać punkty, w których płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny $\pi:\ x+y-z-5=0$.

b) Wyznaczyć równanie tej płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x,y) = x^2+y^2$, która jest prostopadła do prostej $l:\ x=t,\ y=t,\ z=2t,\ t\in\mathbb{R}$.

Zadanie 1.6.

a) Krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 12$ m. Obliczyć, stosując różniczkę funkcji, jak w przybliżeniu zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu, gdy długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2 cm.

b) Masa ciała zważonego z dokładnością 20 g wynosi $M = 4000$ g, a jego objętość zmierzona z dokładnością 1 cm^3 wynosi $V = 800$ cm^3. Z jakim błędem bezwzględnym i względnym można obliczyć gęstość tego ciała?

Wyznaczanie i interpretowanie gradientu funkcji i pochodnej kierunkowej.

Zadanie 1.7. a) Obliczyć gradient funkcji $f(x,y)=\ln(x+\ln y)$ w punkcie $(x_0,y_0)=(e,1)$.

b) Obliczyć pochodne kierunkowe funkcji $f(x,y)=|x|+|y|$ w punkcie $(x_0,y_0)=(0,1)$ w kierunku wersorów $\vec{v}_1=(0,1)$, $\vec{v}_2=(0,-1)$, $\vec{v}_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Dla jakich wersorów pochodna kierunkowa funkcji f w punkcie $(x_0,y_0)=(0,1)$ jest równa 0?
Naszkicować wykres funkcji $f(x,y)=|x|+|y|$ i zinterpretować wyniki obliczeń.

c) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)=x-\dfrac{y}{x^2}+y$ w punkcie $(x_0,y_0)=(1,1)$ w kierunku wersora $\vec{v}=\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

d) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)=(x^2-y)\,e^{2y-x}$ w punkcie $(x_0,y_0)=(1,1)$ w kierunku wersora tworzącego kąt $\alpha=\frac{\pi}{3}$ z dodatnią częścią osi Ox.

e) Wyznaczyć wersory $\vec{v}$, w kierunku których funkcja $f(x,y)=\sqrt{e^x}\,(x+y^2)$ w punkcie $(x_0,y_0)=(0,2)$ ma pochodną kierunkową równą 0.

f) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)=y-x^2+2\ln(xy)$ w punkcie $(x_0,y_0)=\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ w kierunku wersora $\vec{v}$ tworzącego kąt α z dodatnią częścią osi Ox.
Dla jakiego kąta α pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość największą?

Wyznaczanie ekstremów lokalnych funkcji dwóch zmiennych.

Zadanie 1.8. Korzystając z definicji zbadać, czy funkcja $f(x,y)=5\,|x|+|y+1|$ ma ekstremum lokalne w punkcie $(x_0,y_0)=(0,-1)$.

Zadanie 1.9. Zbadać, czy podane funkcje dwóch zmiennych mają ekstrema lokalne. (Wyznaczyć punkty krytyczne i określić rodzaj ekstremum, jeśli dana funkcja takie posiada.)

a) $f(x,y)=xe^{-y}+\dfrac{1}{x}+e^y$,
b) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$,
c) $f(x,y)=e^3+y^3-3xy$,
d) $f(x,y)=x^2-xy+y^2-54\ln y$,
e) $f(x,y)=x+y^2-2\ln(xy)$,
f) $f(x,y)=e^{3-y}+e^x+e^{y-x}$.

Całki podwójne.

Zamiana całki podwójnej na całki iterowane. Obliczanie całek po obszarach normalnych.

Zadanie 1.10. Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D jest ograniczony podanymi krzywymi.

a) $y=x^2,\ y=x+2$,
b) $x^2+y^2=4,\ y=2x-x^2,\ x=0$ $(x,y\geqslant 0)$,
c) $x^2-y^2=1,\ x^2+y^2=3$ $(x<0)$.

Naszkicować obszar całkowania D.

Zadanie 1.11. Obliczyć podane całki iterowane.

a) $\displaystyle\int\limits_0^1 dx\int\limits_\pi^{2\pi}\sin xy\,dy$,
b) $\displaystyle\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-1}^0 e^{2x-y}\,dy$,
c) $\displaystyle\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^y \sqrt{y^2+16}\,dx$.

Naszkicować obszary całkowania.

Zadanie 1.12. Obliczyć całki podwójne po obszarach ograniczonych podanymi krzywymi.

a) $\displaystyle\iint\limits_D y\,dxdy,$ $\quad D: y = 2 - x^2,\ y = -1,\ y = 1,\ x = 1 - \sqrt{1 - y^2},$

b) $\displaystyle\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy,$ $\quad D:\ y = \sqrt{x},\ x = 0,\ y = 1,$

c) $\displaystyle\iint\limits_D (xy + 4x^2)\,dxdy,$ $\quad D:\ y = x + 3,\ y = x^2 + 3x + 3,$

d) $\displaystyle\iint\limits_D x^2 e^{xy}\,dxdy,$ $\quad D:\ y = x,\ y = 1,\ x = 0,$

e) $\displaystyle\iint\limits_D (2x - 3y + 2)\,dxdy,$ $\quad D:\ y = 0,\ y = \pi,\ x = -1,\ x = \sin y.$

Naszkicować obszary całkowania.

Całka podwójna we współrzędnych biegunowych. Przykłady zastosowań całek podwójnych.

Zadanie 1.13. Wprowadzając współrzędne biegunowe, obliczyć podane całki podwójne.

a) $\displaystyle\iint\limits_D x\,dx\,dy,$ D jest obszarem ograniczonym krzywymi $x^2 + (y-1)^2 = 1,\ y = x\ \ (x \geq y),$

b) $\displaystyle\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1,\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant \sqrt{3}\,x\right\},$

c) $\displaystyle\iint\limits_D y^2 e^{x^2+y^2}\,dxdy,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\},$

d) $\displaystyle\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0,\ y \leqslant x^2 + y^2 \leqslant x\},$

e) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y\,dxdy}{(x^2+y^2)^3},\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9,\ y \leqslant 0\},$

Naszkicować obszary całkowania.

Zadanie 1.14. Wykorzystując całkę podwójną, obliczyć pole obszaru D ograniczonego podanymi krzywymi.

a) $D:\ x^2 + y^2 = 2y,\ y = \sqrt{3}\,|x|,$

b) $D:\ x + y = 4,\ x + y = 8,\ x - 3y = 0,\ x - 3y = 5.$

Zadanie 1.15. Wykorzystując całkę podwójną, obliczyć objętość bryły U ograniczonej podanymi powierzchniami. Sporządzić staranny rysunek pomocniczy.

a) $U:\ z = \sqrt{25 - x^2 - y^2},\ z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2},$

b) $U:\ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z = 1\ (z \geqslant 1),$

c) $U:\ z = 5 - x^2 - y^2,\ z = 1,\ z = 4,$

d) $U:\ x^2 + y^2 - 2y = 0,\ z = x^2 + y^2,\ z = 0.$

Zadanie 1.16. Obliczyć pole powierzchni płata $\Sigma:\ z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1.$

Zadanie 1.17. Wyznaczyć położenie środka masy obszaru jednorodnego D o gęstości ρ_0.

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin^2 x\},$

b) D jest trójkątem równoramiennym o boku a i wysokości h,

c) D jest półpierścieniem o promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R.

Zadanie 1.18. Obliczyć momenty bezwładności podanych obszarów jednorodnych o masie M względem wskazanej osi lub punktu.

a) ćwiartka koła o promieniu R, względem osi symetrii,   b) kwadrat, względem przekątnej.

Szeregi liczbowe i potęgowe.

Badanie zbieżności szeregów liczbowych.

Zadanie 1.19. Wyznaczyć sumy częściowe podanych szeregów i zbadać ich zbieżność.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$,   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$,   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Zadanie 1.20. Korzystając z kryterium porównawczego lub z kryterium ilorazowego, zbadać zbieżność podanych szeregów.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+2}$,   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-1}{3^n-1}$,   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$.

Zadanie 1.21. Korzystając z kryterium d'Alemberta lub z kryterium Cauchy'ego, zbadać zbieżność podanych szeregów.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n+5^n}$,   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{n^4+1}$,   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\,n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2024^n}{(2n)!}$,   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\pi^n n!}$,   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arccos^n\left(\tfrac{1}{3^n}\right)$,

Zadanie 1.22. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną podanych szeregów.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$,   b) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$,   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2n}{3n+5}\right)^n$.

Wyznaczanie przedziału zbieżności szeregu potęgowego.

Zadanie 1.23. Wyznaczyć przedziały zbieżności podanych szeregów potęgowych.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(5x-10)^n$,   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{ne^n}$,   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$,   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+6)^n}{3^n-2^n}$,

Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy przy wykorzystaniu rozwinięć podstawowych funkcji.

Zadanie 1.24. Korzystając ze znanych rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych, wyznaczyć rozwinięcia w szereg Maclaurina podanych funkcji i określić ich przedziały zbieżności. (Przydatne wzory podane są poniżej.)

a) $f(x)=\dfrac{5}{1+2x}$,   b) $f(x)=\dfrac{x^3}{16-x^2}$,   c) $f(x)=x^2e^{-x}$.

Zadanie 1.25. Korzystając ze znanych rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych, obliczyć wskazane pochodne. (Przydatne wzory podane są poniżej.)

a) $f^{(2015)}(0)$ dla funkcji $f(x) = xe^{-x}$,

b) $f^{(10)}(0)$ dla funkcji $f(x) = x \sin^2 \dfrac{x}{2}$.

Szeregi Maclaurina niektórych funkcji elementarnych

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad \text{dla } |x| < 1,$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

2 Lista dodatkowa (praca własna studenta).

Rachunek różniczkowy funkcji dwóch zmiennych.

Wyznaczanie dziedziny. Szkicowanie wykresów funkcji dwóch zmiennych (powierzchnie obrotowe i walcowe).

Zadanie 2.1. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne podanych funkcji dwóch zmiennych.

a) $f(x, y) = \ln(y - \sin x)$,

b) $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{y-2}{x+1}}$,

c) $f(x, y) = \sqrt{y - x}\, \ln(9 - x^2 - y^2)$.

Zadanie 2.2. Naszkicować wykresy podanych funkcji dwóch zmiennych.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3$,

b) $f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 6y + 3$,

c) $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$,

d) $f(x, y) = \cos x$.

Obliczanie pochodnych cząstkowych. Wyznaczanie równania płaszczyzny stycznej. Zastosowanie różniczki do szacowania dokładności obliczeń

Zadanie 2.3. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji dwóch zmiennych.

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^3}{xy^2}$,

b) $f(x, y) = \sqrt{2xy + y^2}$,

c) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{1 - xy}{x + y}$,

d) $f(x, y) = \dfrac{\sin^2(x - y)}{x^2 + y^2}$,

e) $f(x, y) = \sqrt{y - x}\, \ln(9 - x^2 - y^2)$,

Zadanie 2.4. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w podanym punkcie tego wykresu.

a) $f(x, y) = e^{x+2y}$, w punkcie $(2, -1, z_0)$,

b) $f(x, y) = x^2 \sqrt{y + 1}$, w punkcie $(1, 3, z_0)$,

c) $f(x, y) = (2 + x - 3y)^4$, w punkcie przecięcia wykresu z osią Oz,

Zadanie 2.5. a) Napisać równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 6$ w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = (0, 2, -1)$. Jak się nazywa ta powierzchnia?

b) Na powierzchni $z = y \ln(1 + x + y^2)$ znaleźć punkt, w którym płaszczyzna styczna do tej powierzchni jest równoległa do płaszczyzny $\pi :\ z - y \ln 2 = 0$.

Zadanie 2.6.

a) Wysokość h i promień r walca zmierzono z dokładnością 1 mm i otrzymano $h = 350$ mm oraz $r = 145$ mm. Obliczyć, stosując różniczkę funkcji, z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość V tego walca?

b) Boki trójkątnego kawałka ziemi zmierzone z dokładnością 1 m wynoszą $a = 250$ m, $b = 400$ m. Kąt między tymi bokami zmierzony z dokładnością $0,01$ rad wynosi $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole P tego kawałka ziemi?

Wyznaczanie i interpretowanie gradientu funkcji i pochodnej kierunkowej.

Zadanie 2.7. a) Wyznaczyć punkty, w których długość gradientu funkcji $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ wynosi 2.

b) Korzystając z definicji, obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ w punkcie $(x_0,y_0) = (0,0)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

c) Korzystając z definicji, obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ w punkcie $(x_0,y_0) = (1,0)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

d) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = x^2+y^2$ w punkcie $(x_0,y_0) = (-3,4)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$.

e) Wyznaczyć wszystkie punkty, w których pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{y}$ w kierunku wersora $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ przyjmuje wartość 0.

f) Wyznaczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$ w punkcie $(x_0,y_0) = (1,1)$ w kierunku gradientu.

Wyznaczanie ekstremów lokalnych funkcji dwóch zmiennych.

Zadanie 2.8. Korzystając z definicji zbadać, czy funkcja $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ ma ekstremum lokalne w punkcie $(x_0,y_0) = (0,0)$.

Zadanie 2.9. Zbadać, czy podane funkcje dwóch zmiennych mają ekstrema lokalne. (Wyznaczyć punkty krytyczne i określić rodzaj ekstremum, jeśli dana funkcja takie posiada.)

a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$,

b) $f(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y, (x > 0, y > 0)$,

c) $f(x,y) = xy + \ln y + x^2$,

d) $f(x,y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$,

e) $f(x,y) = x^3 - 4xy + 2y^2$,

f) $f(x,y) = (x^2 - y^2)\, e^{-x}$,

g) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y+1}{\sqrt{x}}$,

h) $f(x,y) = y\sqrt{x} + \dfrac{y}{\sqrt{x}} + \dfrac{8}{y^2}$,

i) $f(x,y) = (y+2)\sqrt{x} + \dfrac{4}{xy}$,

j) $f(x,y) = e^{x-2y} + e^{y-x} + e^{6+y}$.

Uwaga: Proszę nie rozwiązywać wszystkich przykładów od początku do końca. Warto natomiast dojść do momentu wyznaczenia punktów krytycznych.

Całki podwójne.

Zamiana całki podwójnej na całki iterowane. Obliczanie całek po obszarach normalnych.

Zadanie 2.10. Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D jest ograniczony podanymi krzywymi.

a) $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 51 = 0$,

b) $y = 2 - x^2, x = |y|, y = -2$,

c) $y = -2,\ y = \dfrac{1}{x},\ y = -\sqrt{-x}$.

Naszkicować obszar całkowania D.

Zadanie 2.11. Obliczyć podane całki iterowane.

a) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_x^{x^2} \frac{y}{x^2}\, dy,$ b) $\displaystyle\int_1^4 dx \int_x^{2x} x^2\sqrt{y-x}\, dy,$ c) $\displaystyle\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^3+y^3)\, dy.$

Naszkicować obszary całkowania.

Zadanie 2.12. Obliczyć całki podwójne po obszarach ograniczonych podanymi krzywymi.

a) $\displaystyle\iint_D xy^2\, dxdy,$ $D: y=x,\ y=2-x^2,$

b) $\displaystyle\iint_D (xy+x)\, dxdy,$ $D:\ x=0,\ y=-1,\ y=3-x^2\ (x\geqslant 0),$

c) $\displaystyle\iint_D e^{x^2}\, dxdy,$ $D:\ y=0,\ y=2x,\ x=\sqrt{\ln 3},$

d) $\displaystyle\iint_D (x^2-xy)\, dxdy,$ $D:\ y=x,\ y=3x-x^2,$

Naszkicować obszary całkowania.

Całka podwójna we współrzędnych biegunowych. Przykłady zastosowań całek podwójnych.

Zadanie 2.13. Wprowadzając współrzędne biegunowe, obliczyć podane całki podwójne.

a) $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy,$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 2\},$

b) $\displaystyle\iint_D y\, dx\, dy,$ D jest obszarem ograniczonym krzywymi $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=1,\ y=x,\ y=0\ (x,y\geqslant 0),$

c) $\displaystyle\iint_D xy^2\, dxdy,$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geqslant 0,\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\},$

d) $\displaystyle\iint_D x^2\, dxdy,$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 2y\},$

e) $\displaystyle\iint_D y\, dxdy,$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 2x,\ y\leqslant 0\},$

Naszkicować obszary całkowania.

Zadanie 2.14. Wykorzystując całkę podwójną, obliczyć pole obszaru D ograniczonego podanymi krzywymi.

a) $D:\ y^2=4x,\ x+y=3,\ y=0\ (y\geqslant 0),$ b) $D:\ x^2+y^2-2y=0,\ x^2+y^2-4y=0.$

Zadanie 2.15. Wykorzystując całkę podwójną, obliczyć odjętość bryły U ograniczonej podanymi powierzchniami. Sporządzić staranny rysunek pomocniczy.

a) $U:\ x^2+y^2=1,\ z=x^2+y^2-3,\ z=5-\sqrt{x^2+y^2},$ c) $U:\ x^2+y^2=1,\ z=4-x^2-y^2,\ z=2,$

b) $U:\ z=x^2+y^2,\ z=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}(x^2+y^2),$ d) $U:\ z=\sqrt{25-x^2-y^2},\ z=x^2+y^2-13.$

Zadanie 2.16. Obliczyć pole płata Σ.

a) $\Sigma: \; z = \sqrt{x^2+y^2}, \; 1 \leqslant z \leqslant 2$,

b) $\Sigma: \; x^2+y^2+z^2 = R^2, \; x^2+y^2-Rx \leqslant 0, \; z \geqslant 0$.

Zadanie 2.17. Wyznaczyć położenie środka masy obszaru jednorodnego D o gęstości ρ_0.

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant 9\}$,

b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, \; |y| \leqslant e^x\}$,

c) D jest trójkątem równobocznym o boku $2a$, do którego dołączono półkole o promieniu a (jeden z boków trójkąta sklejono ze średnicą półkola).

Zadanie 2.18. Obliczyć momenty bezwładności podanych obszarów jednorodnych o masie M względem wskazanej osi lub punktu.

a) trójkąt równoboczny o boku a, względem podstawy,

b) koło o średnicy d, względem środka,

c) trójkąt równoboczny o boku a, względem osi symetrii.

Szeregi liczbowe i potęgowe.

Badanie zbieżności szeregów liczbowych.

Zadanie 2.19. Wyznaczyć sumy częściowe podanych szeregów i zbadać ich zbieżność.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Zadanie 2.20. Korzystając z kryterium porównawczego lub z kryterium ilorazowego, zbadać zbieżność podanych szeregów.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+2}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{\sqrt{2n^6-1}}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n}{n\,3^n+2^n}$,

Zadanie 2.21. Korzystając z kryterium d'Alemberta lub z kryterium Cauchy'ego, zbadać zbieżność podanych szeregów.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$,

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{2n}}{(3n^2+1)^n}$,

Zadanie 2.22. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną podanych szeregów.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+4^n}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+2}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n+1}$.

Wyznaczanie przedziału zbieżności szeregu potęgowego.

Zadanie 2.23. Wyznaczyć przedziały zbieżności podanych szeregów potęgowych.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(x+1)^n}{n+1}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt{n}+2}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-3x)^n}{\sqrt{n}+1}$,

Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy przy wykorzystaniu rozwinięć podstawowych funkcji.

Zadanie 2.24. Korzystając ze znanych rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych, wyznaczyć rozwinięcia w szereg Maclaurina podanych funkcji i określić ich przedziały zbieżności.

a) $f(x) = \sin \dfrac{x}{2}$,

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+4x}$.

Zadanie 2.25. Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych, obliczyć wskazane pochodne.

a) $f^{(50)}(0)$ dla funkcji $f(x) = x^2 \cos x$,

b) $f^{(11)}(0)$ dla funkcji $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$,

c) $f^{(101)}(0)$ dla funkcji $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{3x}}$.