Równania różniczkowe w technice

Lista 1: Różne rodzaje równań

1. Sklasyfikuj podane równania różniczkowe (typ, rząd, liniowość).

(a) $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2}+t\dfrac{dy}{dt}+y=\arctan t$; (b) $(1+y^2)\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=t$; (c) $\dfrac{dy}{dt}+y=e^t$;

(d) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\ln(t+y)=\sin t$; (e) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$; (f) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+u^2=0$;

(g) $\dfrac{\partial^4u}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4u}{\partial y^4}=0$; (h) $\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{1}{t+x}$; (i) $\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}+3\sqrt{t}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$.

2. Sprawdź, czy podana funkcja jest rozwiązaniem równania różniczkowego.

(a) $y''-y=0$, $y_1(t)=e^t$, $y_2(t)=\cosh t$;

(b) $y'-2ty=1$, $y(t)=e^{t^2}\left(\int_0^t e^{-s^2}ds+1\right)$;

(c) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$, $u_1(x,y)=\cos x\cosh y$, $u_2(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$;

(d) $c^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_\lambda(x,t)=e^{-c^2\lambda^2t}\sin\lambda x \quad (\lambda\in\mathbb{R})$.

3. Zgadnij lub wyprowadź rozwiązanie ogólne równania $y'=cy$. Jaka funkcja o własności $y(0)=1$ spełnia to równanie?

4. Dopasuj rozwiązania do równań różniczkowych (jedno równanie może mieć więcej niż jedno rozwiązanie)

   Równania:

$$\text{(a) } \tfrac{dy}{dt}=y^2;\quad \text{(b) } \tfrac{dy}{dt}=e^{2t};\quad \text{(c) } \tfrac{d^2y}{dt^2}+4y=0;\quad \text{(d) } \frac{dy}{dt}=te^{-y}.$$

   Rozwiązania:

(i) $y(t)=\frac{1}{2}e^{2t}$; (ii) $y(t)=\sin 2t$; (iii) $y(t)=t+\ln t$; (iv) $y(t)=-\dfrac{1}{t}$;

(v) $y(t)=\cos 2t$; (vi) $y(t)=\sin\left(\cos\dfrac{t}{1+e^t}\right)$; (vii) $y(t)=\ln\left(1+\frac{1}{2}t^2\right)$.

5. Sformułuj równanie różniczkowe opisujące ruch samochodu podczas hamowania ze stałym opóźnieniem. Rozwiąż to równanie i znajdź zależność między prędkością z jaką samochód zaczyna hamować a drogą hamowania. Następnie odpowiedz na pytanie: jeśli prędkość początkowa hamowania wzrośnie dwa razy to ile razy wzrośnie droga hamowania? (Jedno z pytań egzaminacyjnych na prawo jazdy).

Łukasz Płociniczak