Zastosowania równań różniczkowych cząstkowych

Lista 2: Metody numeryczne i równanie konwekcji

Zadania analityczne

1. (*Metoda nieznanych współczynników*) Bardzo użyteczną techniką otrzymywania wszelkich możliwych różnic skończonych jest metoda nieznanych współczynników. Niech $\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ będą ustalonymi punktami takimi, że $x_{i+1} - x_i = h$. Załóżmy, że chcemy znaleźć takie stałe a_i, żeby
$$\sum_{i=1}^{n} a_i u(x_i) = u^{(k)}(x) + O(h^p),$$
gdzie $p > 0$ będzie tak duże jak to tylko możliwe.

   (a) W powyższej sumie rozwiń $u(x_i)$ w formalny szereg Taylora w pobliżu punktu x i wyjaśnij dlaczego współczynniki a_i dające poprawną różnice skończoną są rozwiązaniem układu
$$\frac{1}{j!}\sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - x)^j = \delta_{jk}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

   (b) Zastosuj metodę nieznanych współczynników dla wyliczenia przybliżenia pierwszej pochodnej dla zbioru punktów $\{x_i\}$
$$\{x_0, x_0 + h, x_0 - 2h\}, \{x_0 - h, x_0, x_0 + h\}, \{x_0, x_0 + h, x_0 + 2h\},$$
$$\{x_0 - 2h, x_0 - h, x_0, x_0 + h, x_0 + 2h\}.$$
   Znajdź błędy tak znalezionych przybliżeń.

2. (*Druga pochodna*) Wyprowadź różnicę skończoną przybliżającą drugą pochodną funkcji $u = u(x)$ poprzez złożenie operatorów różnic skończonych pierwszego rzędu. Znajdź dokładną postać błędu odcięcia. Zastosuj również metodę nieznanych współczynników, żeby otrzymać analogiczny wynik.

3. (*Trzecia pochodna*) Za pomocą dowolnej metody znajdź kilka różnic skończonych przybliżających pochodną trzeciego rzędu. Oczywiście wyprowadź też wzór na błąd odcięcia.

4. (*Błędy zaokrąglenia*) Każdy komputer ma skończoną pamięć, dlatego przy wykonywaniu jakichkolwiek obliczeń musi dokonywać licznych zaokrągleń aby móc zapisywać liczby w odpowiednim standardzie. Załóżmy, że chcemy przybliżyć drugą pochodną za pomocą dokładnej metody scentrowanej D_0
$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}u'''(\xi).$$
Wydaje się, że jeśli weźmiemy im mniejsze h tym lepiej D_0 przybliży nam $u'(x)$. W praktyce - nic bardziej mylnego gdyż zwiększymy tym samym błędy zaokrąglenia. Niech $e(x)$ oznacza błąd zaokrąglenia przy komputerowym obliczaniu wartości funkcji $u(x)$, to znaczy
$$u(x) = \widetilde{u}(x) + e(x),$$
gdzie $\widetilde{u}$ jest wartością podaną przez komputer.

(a) Załóż, że $|e(x)| \leq \epsilon$ oraz $|f'''(x)| \leq M$ i pokaż, że prawdziwy błąd numerycznego obliczenia pochodnej wynosi

$$\left| u'(x) - \frac{\widetilde{u}(x+h) - \widetilde{u}(x-h)}{2h} \right| \leq \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2}{6} M,$$

widzimy, że błąd rozkłada się na dwa składniki, z których jeden jest nieograniczony gdy $h \to 0$.

(b) Zauważ, że górne ograniczenie w powyższym wzorze, traktowane jako funkcja h, ma minimum. Znajdź zatem optymalną wartość h_{opt}, dla której całkowity błąd przybliżenia jest najmniejszy.

(c) Znajdź optymalną wartość h_{opt} dla $u(x) = \sin x$ oraz odpowiadające jej oszacowanie błędu przybliżenia.

5. (*Warunek wystarczający dla stabilności*) Jasne jest, że jeśli $\|B(h)\| \leq 1$ to $\|B(h)^n\| \leq 1$. Pokaż, że warunek ten można co nieco osłabić, to znaczy $B(h) \leq 1 + \alpha h$, dla pewnego α oraz dostatecznie małych h, wymusza

$$\|B(h)^n\| \leq C_T,$$

dla pewnej stałej C_T oraz $nh \leq T$.

6. (*Translacje i różnice*) Niech L_m będzie operatorem translacji, czyli

$$L_m f(j) = f(j - m).$$

Pokaż, że $f(j) = e^{ij\xi}$ dla $\xi \in \mathbb{R}$ jest funkcją własną dowolnej kombinacji liniowej operatorów translacji z różnymi m. Znajdź wartości własne operatorów D_0 i $D_\pm$. Jaki to wszystko ma związek z operatorem pochodnej?

7. (*Stabilność*) Skorzystaj z metody von Neumanna i znajdź warunki stabilności dla następujących metod. Tutaj $R := ch/k$.

(a) „Pod prąd"

$$u_j^{n+1} = u_j^n - R\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right),$$

oraz

$$u_j^{n+1} = u_j^n - R\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right).$$

(b) Scentrowana

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{R}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right).$$

(c) Skokowa

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - R\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right).$$

(d) Laxa-Wendroffa

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{R}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{R^2}{2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right).$$

(e) Laxa-Friedrichsa (ważona metoda scentrowana)

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) - \frac{R}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right).$$

(f) Beama-Warminga (Lax-Wendroff pod prąd)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{R}{2}\left(3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n\right) + \frac{R^2}{2}\left(u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n\right).$$

Zadania numeryczne

1. (*Porównanie różnic skończonych*) Zaimplementuj wszystkie znalezione w powyższych zadaniach (oraz te z wykładu) różnice skończone dla pierwszej pochodnej oraz porównaj ich dokładność dla kilku wybranych funkcji. Narysuj również wykresy błędów odcięcia w zależności od h w skali podwójnie logarytmicznej. Otrzymasz proste, których nachylenie jest rzędem metody. Znajdź te rzędy, porównaj z wynikami teoretycznymi i powiedź dlaczego skala log-log daje taki wynik.

2. (*Implementacja metody różnic skończonych*) Napisz funkcję, która pobiera punkty x_i oraz rząd pochodnej k i zwraca współczynniki dla różnicy skończonej obliczone z metody nieznanych współczynników. Wykorzystaj ten wynik do zaimplementowania funkcji zwracającej tak znalezione przybliżenie k-tej pochodnej.

3. (*Za małe* h *wcale nie jest dobre cz. 1*) Połóż $h = 10^{-n}$ dla $n = 1, 2, ..., 20$ i korzystając z operatora D_+ oblicz pochodną swojej ulubionej funkcji w jakimkolwiek punkcie niebędącym zerem. Wyjaśnij co się dzieje. A co jeśli punkt, w którym liczysz pochodną będzie równy zero?

4. (*Za małe* h *wcale nie jest dobre cz. 2*) Zilustruj numerycznie wynik z zadania 4 biorąc $u(x) = \sin x$, $x = 0.9$ oraz h w przedziale $(10^{-3}; 10^{-1})$. Sztucznie zasymuluj arytmetykę odcinania po piątym miejscu dziesiętnym[1]. Czy widzisz gdzie znajduje się optymalne h? Skonfrontuj wynik z rezultatem analitycznym.

5. (*Rozwiązanie równania adwekcji*) Zaimplementuj wszystkie metody z zadania 7 do rozwiązania zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = \Phi(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Sprawdź rozwiązania dla wybranych warunków początkowych oraz prędkości propagacji c. W szczególności (ale nie tylko) weź $\Phi(x) = e^{-20x^2} + e^{-(x-5)^2}$. Czy zauważasz coś szczególnego?

   (b) Tak operuj wartościami c, h i k aby sprawdzić teoretyczne oszacowania na stabilność (kiedy występuje a kiedy nie).

   (c) Znajdź rzędy każdej z metod rozważając różnice $u(x,t) - u_j^n$ dla $nh = t$ oraz $kh = x$ i zbiegając raz z h a raz z k do zera.

Łukasz Płociniczak

[1]Na szczęście współczesne pakiety matematyczne radzą sobie całkiem nieźle z bardzo dokładnymi obliczeniami i w większości przypadków nie musimy martwić się błędem zaokrąglenia. Jednak bardzo złożone obliczenia wymagają dodatkowych bibliotek.