Równania różniczkowe w technice

Lista 3: Równania zwyczajne drugiego rzędu. Oscylacje i rezonans

1. (*Równania, w których nie występuje zmienna zależna*) Gdy do czynienia mamy z równaniem $y'' = f(t, y')$ możemy zawsze dokonać podstawienia $u = y'$ i wtedy otrzymamy $u' = f(t, u)$, które jest równaniem pierwszego rzędu. Takie równanie potrafimy już rozwiązać a niewiadomą y otrzymujemy całkując $dy/dt = u$. Użyj tego podstawienia, aby znaleźć rozwiązania podanych równań.

   a) $t^2y'' + 2ty' - 1 = 0, \quad t > 0$; b) $2t^2y'' + (y')^3 = 2ty', \quad t > 0$;
   c) $y'' + y' = e^{-t}$; d) $t^2y'' = (y')^2$.

2. Znajdź rozwiązania poniższych równań różniczkowych drugiego rzędu o stałych współczynnikach z warunkami początkowymi. Naszkicuj zachowanie się rozwiązania.

a) $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$; b) $2y'' + y' - \frac{1}{4}y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;
c) $\frac{1}{4}y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$; d) $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$;
e) $y'' - 2y' + 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$; f) $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 2$;
g) $y'' + y' + 1.25y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$; h) $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$.

3. (*Równania, w których nie występuje zmienna niezależna*) W przypadku równań $y'' = f(y, y')$ możemy szukać rozwiązania postaci $y' = g(y)$. Wtedy $y'' = y' \, dg/dy = g \, dg/dy$. Teraz nasze równanie jest pierwszego rzędu i ma postać $g \, dg/dy = f(y, g)$. Możemy rozwiązać uważając y jako zmienną niezależną a g jako szukaną funkcję. Na koniec, niewiadomą y znajdujemy całkując $dy/dt = g(y)$. Sprawdź wszystkie podstawienia w tym zadaniu oraz rozwiąż następujące równania

   a) $yy'' + (y')^2 = 0$; b) $y'' + y = 0$; c) $y'' + y(y')^3 = 0$.

4. (*Równania wyższych rzędów*) Znajdź rozwiązania ogólne następujących równań jednorodnych rzędów wyższych niż drugi.

   a) $y^{(iv)} + 2y'' + y = 0$; b) $y''' - 12y'' + 22y' - 20y = 0$; c) $y^{(n)} - y = 0$.

5. (*Metoda redukowania*)

   (a) Załóżmy, że znamy jedno z rozwiązań fundamentalnych równania liniowego

   $$y'' + p(t)y' + g(t)y = 0.$$

   Oznaczmy je przez y_1. Pokaż, że jeśli szukamy drugiego rozwiązania postaci $y_2(t) = f(t)y_1(t)$ to f spełnia równanie *pierwszego rzędu*.

   (b) W mechanice płynów, przy opisie przepływów turbulentnych wokół cylindra pojawia się równanie

   $$y'' + a(xy' + y) = 0.$$

   Pokaż, że jednym z rozwiązań tego równania jest $y_1(x) = \exp(-ax^2/2)$. Znajdź drugie rozwiązanie fundamentalne.

6. (*Faktoryzacja operatora*) Pokaż, że równanie

$$y'' + (1 - t^2)y = 0,$$

może być zapisane jako

$$\left(\frac{d}{dt} - t\right)\left(\frac{d}{dt} + t\right) y = 0.$$

Koniecznie zwróć uwagę na to, że kolejność składania operatorów jest *istotna*! Użyj tej faktoryzacji aby znaleźć rozwiązanie wyjściowego równania.

7. (*Orbity keplerowskie*)[1] Rozpatrując klasyczne zagadnienie dwóch ciał i rozpisując prawo Newtona we współrzędnych biegunowych pokazać można, że promień wodzący cząstki spełnia równanie

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{k}{r^2} + \frac{l^2}{\mu r^3},$$

gdzie μ jest (zredukowaną) masą układu, l jest momentem pędu (jedną z jego składowych) oraz $k = Gm_1m_2$. Rozwiąż to równanie w następujący sposób. Chcemy znaleźć kształt orbity $r = r(\phi)$, gdzie ϕ jest kątem np. między Ziemią, Słońcem i peryhelium. Najpierw podstaw $u = 1/r$ i skorzystaj z tożsamości (druga równość wynika z zasady zachowania momentu pędu dla naszego układu)

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\frac{d}{d\phi} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{d}{d\phi}$$

aby otrzymać równanie dla u w funkcji kąta ϕ

$$u''(\phi) = -u(\phi) + \frac{k\mu}{l^2}.$$

Zapisz rozwiązanie powyższego równania w postaci

$$u(\phi) = \frac{k\mu}{l^2}(1 + \epsilon \cos \phi)$$

przy warunku $u'(0) = 0$. Ostatecznie wyraź postać orbity w postaci

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon \cos \phi}.$$

Narysuj różne orbity dla kilku wartości c i ϵ. Upewnij się, że otrzymałeś wszystkie znane Tobie krzywe stożkowe.

8. Rozwiązaniem ogólnym jakiego równania jest funkcja $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$?

9. Rozważmy równanie

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\beta,$$

gdzie $\beta > 0$.

   (a) Rozwiąż zadane zagadnienie początkowe, żeby otrzymać funkcję $y_\beta(t)$.

   (b) Narysuj wykres funkcji dla różnych wartości β. Znajdź minimum $y_\beta(t)$ w zależności od parametru β.

[1] Dokładne omówienie zagadnienia znajdziesz w niemalże każdej książce z mechaniki klasycznej (np. Taylor) oraz na wykładzie z fizyki.

(c) Oblicz $\inf\{\beta : y_\beta$ nie ma minimum jako funkcja $t\}$.

10. Rozwiąż następujące równanie różniczkowe z warunkami początkowymi

$$u'' + 2u' + 3u = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -1 + \sqrt{2}.$$

Znajdź liczbę $T > 0$ taką, że $|u(t)| \leq \sqrt{\frac{2}{e}}$ dla każdego $t \geq T$. Postaraj się aby T było tak małe jak to tylko możliwe. Następnie korzystając z komputera sprawdź ile wynosi najmniejsza liczba T_0, dla której zachodzi powyższy warunek. Porównaj ją z Twoim wynikiem.

11. (*Nieliniowe wahadło*) Na wykładzie wyprowadziliśmy równanie opisujące ruch wahadła

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

W przypadku kiedy wychylenia są duże nie możemy zastąpić funkcji $\sin\theta$ jej liniowym przybliżeniem.

(a) Pomnóż stronami nieliniowe równanie wahadła przez $\frac{d\theta}{dt}$ i skorzystaj ze wzoru na pochodną funkcji złożonej aby otrzymać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{g}{l}\cos\theta\right) = 0.$$

(b) Przyjmij warunek początkowy $\theta(0) = \theta_0$, $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$ oraz scałkuj powyższe równanie w celu otrzymania równania pierwszego rzędu

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}.$$

(c) (*Rozwiązanie ruchu wahadła*) Zauważ, że możemy rozdzielić zmienne i otrzymać rozwiązanie ruchu wahadła jako funkcję $t = t(\theta)$

$$t(\theta) = \pm\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta_0}}.$$

Wyrażenie to można odwrócić i zapisać wynik w terminach funkcji eliptycznych Jacobiego.

(d) (*Okres drgań wahadła*) Pokaż, że jeśli T jest okresem drgań wahadła to

$$T = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta_0}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 x}}, \quad k = \sin\frac{\theta_0}{2}.$$

Całka po prawej stronie powyższego wzoru jest nazywana *zupełną całką eliptyczną pierwszego rodzaju*[2] i występuje w różnych zagadnieniach związanych z obliczaniem obwodu elipsy. Nie jest możliwe przedstawienie całki eliptycznej jako kombinacji funkcji elementarnych. Jednak w łatwy sposób można otrzymać rozwinięcie w szereg, które daje ostatecznie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n}\right] = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + ...\right).$$

Porównaj okres wahadła liniowego z powyższym wyrażeniem.

[2] Zachęcam do przestudiowania tego tematu. Drugi tom Fichtenholza jest dobrym źródłem.

12. (*Wydzielanie niejednorodności*) Pokaż, że rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0',$$

może być zapisane w postaci $y(t) = u(t) + v(t)$, gdzie u jest rozwiązaniem odpowiedniego zagadnienia *jednorodnego* z *niezerowymi* warunkami początkowymi a v jest rozwiązaniem odpowiedniego zagadnienia *niejednorodnego* z *zerowymi* warunkami początkowymi.

13. Znajdź rozwiązania następujących równań

a) $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$;
b) $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$;
c) $y'' + y' + 4y = 2\sinh t$;
d) $y'' + y' - 2y = 2t, \ \ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 1$;
e) $y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}, \ \ y(0) = 1, \ \ y'(0) = 0$.

14. Napisz rozwiązanie ogólne dla następującego równania

$$y'' + \lambda^2 y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t\right),$$

gdzie $\lambda > 0$ oraz $\lambda \neq n\pi$ dla $n = 1, ..., N$. Zauważ, że prawa strona powyższego równania to suma częściowa szeregu Fouriera (przy pewnych założeniach możemy wziąć nawet $N \to \infty$). Wyjaśnij jakie znaczenie ma wyprowadzone przez Ciebie rozwiązanie.

15. (*Nieciągła siła*) W wielu rzeczywistych problemach konieczne staje się rozwiązanie zagadnienia, gdzie siła wymuszająca jest inna na różnych przedziałach. Rozważmy równanie

$$y'' + 2y' + 5y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Rozwiąż je z warunkami początkowymi $y(0) = 0$ oraz $y'(0) = 0$.
Wskazówka: Rozwiąż równanie najpierw dla $x \leq \pi/2$ z warunkami początkowymi. Następnie nieznane stałe w rozwiązaniu dla $x > \pi/2$ wyznacz żądając, aby y oraz y' były ciągłe w $\pi/2$.

16. (*Butelka w wiadrze*) Butelka jest zanurzona w wiadrze wypełnionym wodą. W położeniu równowagi butelka zanurza się na głębokość d_0 poniżej powierzchni wody. Załóżmy, że wpychamy butelkę na głębokość $d = d_0 + x$ i puszczamy. Znajdź równanie opisujące $x = x(t)$ oraz okres oscylacji. Oblicz okres drgań dla przypadku, kiedy $d_0 = 20$cm.
Wskazówka: Skorzystaj z Prawa Archimedesa.

17. (*Standardowa postać oscylacji*) Pokaż, że zawsze możemy znaleźć takie stałe R i δ, że zachodzi

$$C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = R \cos\left(\omega t - \delta\right).$$

18. (*Ciężarek*) Na końcu sprężyny o $k = 80$N/m zaczepiony jest ciężarek o masie $m = 0.2$kg a sprężyna drga poziomo. Znajdź częstość kołową ω oraz częstotliwość f i okres drgań T. Jeśli położenie początkowe jest równe $x_0 = 0$ a prędkość $v_0 = 40$m/s, to jaka jest amplituda R oraz faza δ drgań?

19. (*Sprężyna z tłumieniem*) Rozważ wózek zaczepiony na sprężynie z współczynnikiem tłumienia β oraz częstością własną $\omega_0 = 2\pi$. W chwili początkowej $x_0 = 1$. Narysuj wykresy położenia $x = x(t)$ dla różnych parametrów $\beta = 0, 1, 2, 4, 6, 2\pi, 10, 20$.

20. (*Dudnienia*)[3,4] Rozważ równanie oscylacji, w których nie występuje tłumienie a częstotliwość własna wynosi ω_0. Niech oscylacje będą wymuszane przez sinusoidalną siłę $f_0 \cos \omega t$.

(a) Znajdź rozwiązanie tego zagadnienia dla zerowych warunków początkowych i pokaż, że może być zapisane w postaci

$$y(t) = \frac{2f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t\right).$$

(b) Załóżmy, że różnica częstości $|\omega_0 - \omega|$ jest mała w porównaniu z ich sumą $\omega_0 + \omega$. Wyjaśnij dlaczego w tej sytuacji możemy mówić o szybkiej oscylacji, której amplituda zmienia się sinusoidalnie (jedna fala moduluje drugą). Zjawisko to nazywamy dudnieniem.

(c) Poksperymentuj i podstaw kilka wartości za ω_0 i ω dla $f_0 = 1$. Narysuj na komputerze wykresy oscylacji i dokładnie wskaż zjawisko dudnień.

(d) Rozważ przypadek, kiedy obecne jest tłumienie $\beta > 0$.

Łukasz Płociniczak

[3] Dudnienia są ciekawym zjawiskiem, które ma ważne zastosowania. Stroiciele pianin używają kamertonu, aby usłyszeć dźwięk referencyjny. Standardowy kamerton nastrojony jest na częstotliwość 440Hz, która odpowiada dźwiękowi A4. Jeśli nasze pianino jest lekko roztrojone, to klawisz A4 będzie miał częstotliwość niewiele różniącą się od 440Hz. Kamerton i klawisz uderzone jednocześnie wytworzą zjawisko dudnień, które eliminuje się regulując struny (bardzo trudna sztuka). Ciekawe jest to, że ucho ludzkie potrafi wychwycić dudnienia różniące się o 0.06%.

[4] Drugim zastosowaniem dudnień jest modulacja amplitudy fali nośnej używanej w telekomunikacji. Fala radiowa ma częstotliwość leżącą poza spektrum słyszalności (i całe szczęście). Modulacja amplitudy (AM) działa w ten sposób, że wysokoczęstotliwościową falę nośną moduluje się falą o częstotliwości akustycznej. Tak zmodulowany sygnał dociera do radioodbiornika, który z fali nośnej odzyskuje akustyczną modulację.