Równania różniczkowe w technice

Lista 4: Zagadnienia brzegowe i transformata Laplace'a

1. (*Standardowa postać równań drugiego rzędu*) Pokaż, że równanie
$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$
może być zapisane w postaci
$$(\mu(x)P(x)y')' + \mu(x)R(x)y = 0,$$
dla pewnego μ.

2. (*Skąd biorą się zagadnienia brzegowe - przykład*) Z zasady zachowania energii wynika, że temperatura $u = u(x,t)$ pewnego jednowymiarowego ośrodka zmierzona w czasie t oraz w punkcie x spełnia następujące równanie cząstkowe
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in [0, L].$$
Niech na brzegach ośrodka spełnione będą następujące warunki (Robina)
$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + b_1 u(0,t) = 0, \quad a_2 \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) + b_2 u(L,t) = 0.$$
Sprowadź powyższe zagadnienie cząstkowe do dwóch równań różniczkowych zwyczajnych z warunkami brzegowymi. Zastosuj tak zwaną metodę rozdzielania zmiennych, to jest, poszukaj rozwiązań postaci
$$u(x,t) = T(t)X(x),$$
gdzie T oraz X są szukanymi funkcjami jednej zmiennej.
Wsk. Jeśli $f(x) = g(y)$ dla każdego x oraz y to $f(x) = g(y) = \lambda = \text{const.}$ (dlaczego tak jest?).

3. Niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Rozwiąż następujące zagadnienia brzegowe i znajdź ich nietrywialne funkcje własne. Rozważ wszystkie możliwości znaku λ.

$$\text{a) } y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(1) = 0; \qquad \text{b) } y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(1) + y(1) = 0;$$
$$\text{c) } xy'' - 2y' + \left(\tfrac{2}{x} + \lambda x\right) y = 0,\ y(0) = y(1) = 0; \quad \text{d) } xy'' + 2y' + \lambda xy = 0,\ y(\pi) = y(2\pi) = 0.$$

Wsk. W podpunktach c) oraz d) zastosuj odpowiednie podstawienie tak, aby sprowadzić równanie do takiego o stałych współczynnikach.

4. (*Normalizacja*) Funkcje własne zagadnień brzegowych zwykle podane są z dokładnością do stałej multyplikatywnej. Biorąc pod uwagę poprzednie zadanie mówiące o ortogonalności naturalnym warunkiem okazuje się unormowanie rodziny funkcji własnych (ponieważ tutaj waga $r(x) = 1$)
$$\int_0^L \phi_n(x)^2 dx = 1.$$
Przeprowadź normalizację zbioru funkcji własnych wybranej z poprzednich zadań.

5. (*Baza ortonormalna*) Załóżmy, że każdą dostatecznie porządną funkcję f można rozwinąć w szereg na odcinku $[0, L]$
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x),$$

gdzie ϕ_n jest ortonormalną względem naturalnego iloczynu skalarnego na $[0, L]$ (zad. 4 i 5) funkcją własną pewnego zagadnienia brzegowego z warunkami na $[0, L]$. Wykorzystaj ortogonalność i wyznacz współczynniki a_n (przypomnij sobie odpowiednie wiadomości z algebry i z szeregów Fouriera).

Rozwiń następujące funkcje w szeregi względem wybranego zbioru funkcji własnych wyliczonych w zadaniu 3
$$f(x) = 1, \quad g(x) = x \quad \text{na} \quad [0, 1].$$

6. (*Okresowe warunki brzegowe*) W zastosowaniach równań różniczkowych cząstkowych rozwiązywanych we współrzędnych biegunowych pojawia się często następujące równanie
$$y'' + \lambda y = 0,$$
z okresowymi warunkami
$$y(-L) = y(L), \quad y'(-L) = y'(L).$$
Znajdź funkcje i wartości własne tego zagadnienia.

7. (*Belka*) W teorii sprężystości rozważa się następujące równanie opisujące wybaczanie się belki o długości L pod obciążeniem P
$$y^{(iv)} + \lambda y'' = 0.$$
Tutaj $\lambda = \frac{P}{EI}$, gdzie E jest modułem Younga a I geometrycznym momentem bezwładności belki. Belka unieruchomiona z jednej strony oraz przesuwna z drugiej spełnia
$$y(0) = y'(0) = y(L) = y''(L) = 0.$$
Dla takiej konfiguracji znajdź najmniejszą wartość własną λ_1 oraz kształt belki po wyboczeniu y_1.

8. (*Równanie Eulera*) Następujące równanie liniowe drugiego rzędu zwane jest równaniem Eulera
$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$
   (a) Znajdź rozwiązanie ogólne powyższego równania. Rozpatrz różne przypadki w zależności od stałych a, b, oraz c.
   Wsk. Ponieważ x^n mnoży $y^{(n)}$ dla $n = 0, 1, 2$ to sensowne wydaje się szukanie rozwiązań postaci $y(x) = x^r$, dla pewnego r.

   (b) Rozwiąż teraz zagadnienie brzegowe
   $$x^2y'' = \lambda(xy' - y), \quad y(1) = 0, \ y(2) = 0.$$
   Ile rozwiązań ma ten problem? Czy zawsze $\lambda \in \mathbb{R}$?

9. (*Funkcja Gamma*) Euler badał następującą funkcję, która jak się okazało jest uogólnieniem silni
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$
   (a) Jaka jest dziedzina funkcji Gamma?

   (b) Całkując przez części pokaż, że $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ oraz, że $\Gamma(1) = 1$. Dzięki temu wynikowi pokaż, że dziedzina Γ może być rozszerzona na $\mathbb{R} - \{0, -1, -2, ...\}$.

(c) Pokaż, że $\Gamma(n+1) = n!$ dla $n \in \mathbb{N}$, czyli Γ jest rzeczywiście uogólnieniem silni.

(d) Korzystając z tego, że $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$ wykaż, że $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

10. (*Warunek dostateczny istnienia transformaty Laplace'a*) Niech f będzie kawałkami ciągła na każdym skończonym przedziale domkniętym. Ponadto, niech nie rośnie ona szybciej niż eksponenta, t.j. $|f(t)| \leq Ke^{at}$ dla $t \geq M$ przy $K, M \geq 0$ oraz $a \in \mathbb{R}$. Pokaż, że wtedy transformata Laplace'a istnieje na (a, ∞).

11. (*Własności transformaty Laplace'a*) Pokaż, że transformata Laplace'a jest operatorem liniowym na klasie funkcji spełniających założenia powyższego twierdzenia. Udowodnij również wzór na transformatę pochodnej

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} f^{(i)}(0).$$

12. (*Pochodna transformaty*) Niech $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

(a) Pokaż, że
$$F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s).$$

(b) Uogólnij powyższy wzór na pochodną dowolnego rzędu oraz wykorzystaj go aby znaleźć transformatę funkcji $t^n e^{at}$.

(c) Znajdź transformatę funkcji[1]

$$\operatorname{sinc}(t) := \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0; \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

13. Sprawdź, że transformaty Laplace'a podanych funkcji wyrażają się wzorami

$$a)\ \mathcal{L}\{t^p\} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}; \quad b)\ \mathcal{L}\{e^{at}\sin(bt)\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2};$$

Bez rozwiązywania zgadnij, ile wynosi transformata $\mathcal{L}\{e^{at}\cos(bt)\}$. Wyprowadź stąd $\mathcal{L}\{\cos(bt)\}$. W każdym przykładzie wskaż na jakim zbiorze dana transformata istnieje.

14. Korzystając z metody transformaty Laplace'a znajdź rozwiązania następujących zagadnień początkowych.

$$\begin{array}{llllll}
a)\ y'' - y' - 6y = 0, & y(0) = 1, & y'(0) = -1; & b)\ y'' - 2y' + 2y = \cos t, & y(0) = 1, & y'(0) = 0; \\
c)\ y'' + 2y' + y = 4e^{-t}, & y(0) = 2, & y'(0) = -1; & d)\ y'' + \omega^2 y = \cos(2t), & y(0) = 1, & y'(0) = 0; \\
e)\ y^{(iv)} - y = 0, & y(0) = 1, & y'(0) = 0, & y''(0) = 1, & y'''(0) = 0, & y'(0) = 0;
\end{array}$$

15. Rozwiąż następujące zagadnienia z nieciągłą siłą

$$a)\ y'' + 4y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & t > \pi, \end{cases} \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$$

$$b)\ y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases} \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

[1]Ta funkcja występuje tak często w teorii przetwarzania sygnałów, że ma nawet swoją nazwę „sink" od łac. *sinus cardinalis*.

16. (*Transformata funkcji pierwotnej*) Niech f spełnia założenia twierdzenia o transformacie Laplace'a. Zdefiniujmy funkcję pierwotną

$$g(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Pokaż, że $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = s^{-1}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

Łukasz Płociniczak