1. Macierze

Definicja 1.1 (Iloczyn kartezjański)**.** *Niech A, B będą dowolnymi zbiorami, to wtedy $(x, y) \in A \times B \longleftrightarrow x \in A \wedge y \in B$.*

Twierdzenie 1.1. *Niech A, B, C, D będą dowolnymi zbiorami, to wtedy mają miejsce następujące równości:*

(1) $((A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,
(2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

Dowód. *1.* $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \longleftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in (C \times D) \longleftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge x \in C \wedge y \in D \longleftrightarrow x \in A \cap C \wedge y \in B \cap D \longleftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.
Dowód. 2. $(x, y) \in (A \cup B) \times C \longleftrightarrow x \in A \cup B \wedge y \in C \longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \longleftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \longleftrightarrow (x, y) \in A \times C \vee (x, y) \in B \times C \longleftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.
■

Definicja 1.2 (Macierz)**.** *Niech $\mathbb{K}$ będzie ustalonym ciałem (lub pierścieniem), $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, to wtedy A nazywamy macierzą o m wierszach i n kolumnach $\longleftrightarrow A \in \mathbb{K}^{\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}}$. Zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach ze współczynnikami z $\mathbb{K}$ oznaczamy przez $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ lub $\mathbb{K}^{m\times n}$.*

Definicja 1.3 (działania na macierzach)**.** *Na macierzach możemy zdefiniować następujące dziaąnia*

Dodawanie:: *Niech $A, B \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, to macierz $A + B \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ definiujemy następująco*

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \;\; (A + B)_{ij} := (A)_{ij} + (B)_{ij},$$

Mnożenie przez skalar:: *Niech $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ i $\alpha \in \mathbb{K}$, to $\alpha A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ definiujemy tak*

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \;\; (\alpha A)_{ij} := \alpha (A)_{ij},$$

Mnożenie macierzy:: *Dla $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ i $B \in \mathbf{M}_{n,k}(\mathbb{K})$ możemy zdefiniować iloczyn $AB \in \mathbf{M}_{m,k}(\mathbb{K})$ w taki sposób:*

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, k\} \;\; (AB)_{ij} := \sum_{r=1}^{n} (A)_{ir}(B)_{rj}.$$

Twierdzenie 1.2 (Proste własności)**.** *Niech $A, B, C \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $D \in \mathbf{M}_{n,k}(\mathbb{K})$ oraz $F \in \mathbf{M}_{k,l}(\mathbb{K})$ to wtedy*

(1) $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(AD)F = A(DF)$,
(2) $A + B = B + A$,
(3) $(A + B)D = AD + BD$,
(4) $\alpha \in \mathbb{K} \longrightarrow \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
(5) $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \longrightarrow (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A), (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
(6) *istnieje* $\mathbf{0} \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *że dla każdego* $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ $A + \mathbf{0} = A = \mathbf{0} + A$,
(7) *dla każdego* $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *istnieje (dokładnie jedno)* $B \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *że* $A + B = \mathbf{0}$,
(8) *istnieje* $\mathbf{1} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *że dla każdego* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ $\mathbf{1}A = A = A\mathbf{1}$.

Dowód. *Udowodnimy tylko niektóre własności, np. łączność mnożenia. Niech* $(i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots l\}$ *będzie dowolne, to wtedy:*

$$
\begin{aligned}
((AD)F)_{ij} &= \sum_{r=1}^{k} (AD)_{ir} F_{rj} = \sum_{r=1}^{k} (\sum_{s=1}^{n} A_{is} D_{sr}) F_{rj} \\
&= \sum_{r=1}^{k} (\sum_{s=1}^{n} A_{is} D_{sr} F_{rj}) = \sum_{s=1}^{n} A_{is} \sum_{r=1}^{k} (D_{sr} F_{rj}) = \sum_{s=1}^{n} A_{is} (DF)_{sj} = (A(DF))_{ij},
\end{aligned}
$$

co dowodzi $(AD)F = A(DF)$. ■

2. Wyznaczniki

Definicja 2.1 (wyznacznik macierzy)**.** *Niech* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *będzie kwadratową macierzą nad* $\mathbb{K}$ *to wtedy funkcję*

$$\mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \ni A \mapsto |A| \in \mathbb{K}$$

definiujemy rekurencyjnie względem stopnia macierzy A*:*

$n = 1$**:** $\longrightarrow \ |A| = |[a_{11}]| = a_{11}$
$n > 1$**:** $\longrightarrow \ |A| = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i} |A_{1i}|$, *gdzie* $A_{1i} \in \mathbf{M}_{n-1}(\mathbb{K})$

Wyznacznik $|A|$ *z macierzy oznacza się również* $\det(A)$.

Twierdzenie 2.1 (O wyznaczniku)**.** *Wznacznik macierzy ma następujące własności na kolumnach:*

(1) $\det[X+Y, A_2, \dots, A_n] = \det[X, A_2, \dots, A_n] + \det[Y, A_2, \dots, A_n]$,
(2) $\alpha \in \mathbb{K} \longrightarrow \det[\alpha A_1, A_2, \dots, A_n] = \alpha \det[A_1, A_2, \dots, A_n]$,
(3) $\forall i \in \{1, \dots, n-1\} \ \det[A_1, \dots, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n] = -\det[A_1, \dots, A_{i+1}, A_i, \dots, A_n]$,
(4) $1 \le i < j \le n \longrightarrow \det[A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n] = -\det[A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n]$,
(5) $\det[A_1, \dots, A_i, \dots, A_i, \dots, A_n] = 0$,
(6) $|A^T| = |A|$,

gdzie $A_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ *oraz* $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

Dowód. 1 *Niech* $A(x+y) = [X+Y, A_2, \dots, A_n]$ *natomiast* $A(x) = [X, A_2, \dots, A_n]$ *oraz* $A(y) = [Y, A_2, \dots, A_n]$ *to wtedy mamy*

$$
\begin{aligned}
|A(x+y)| = &\begin{vmatrix} x_1+y_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ x_2+y_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+y_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
=&(-1)^{1+1}(x_1+y_1)\begin{vmatrix} x_1+y_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ x_2+y_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+y_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{11} + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{1i}\begin{vmatrix} x_1+y_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ x_2+y_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+y_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{1i} \\
=&(-1)^{1+1}x_1\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ x_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{11} + (-1)^{1+1}y_1\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ y_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{11} + \\
&+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{1i}\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ x_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{1i} + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{1i}\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ y_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{1i} = \\
=&(-1)^{1+1}x_1\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ x_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{11} + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{1i}\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ x_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{1i} + \\
&+(-1)^{1+1}y_1\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ y_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{11} + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{1i}\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ y_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{1i} = \\
=&|A(x)| + |A(y)|
\end{aligned}
$$

co kończy dowód **1**.
Dowód. **2,3** jest analogiczny jak w punkcie **1**.
Dowód. **4** *wynika prosto z* **3** *własności.*
Dowód. **5** wynika prosto z **4** własności.
Dowód. **6** *jest przez indukcję ze względu na stopień macierzy. Jeśli* $n = 1$ *to* $|A| = a_{11} = |A^T|$. *Niech* $n > 1$ *oraz* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, *to wtedy możemy założyć tezę indukcyjną* $B \in \mathbf{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ *to wtedy*

$|B^T| = |B|$. *Zuważmy że*

$$|(A^T)_{1i}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}^{\mathbf{T}}_{1i} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}_{1i} = \begin{vmatrix} \textit{skreślona} & \downarrow i\textit{-ta} & \textit{kolumna}\\ a_{12} & \dots & a_{n2}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \textit{skreślony} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ i\textit{-ty} \to & \vdots & \ddots & \vdots \\ \textit{wiersz} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}_{i1} = |A_{i1}|,$$

a stąd mamy:

$$|A^T| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}(a^T)_{1i}|(A^T)_{1i}| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}|A_{i1}| = (-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}| + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}|A_{i1}|$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}| + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}\begin{vmatrix} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ & \vdots & & \vdots\\ \to_i & a_{i2} & \dots & a_{in}\\ & \vdots & & \vdots\\ & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}| + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\begin{vmatrix} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ & \vdots & & \vdots\\ \to_i & a_{i2} & \dots & a_{in}\\ & \vdots & & \vdots\\ & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}_{1j}$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}| + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\begin{vmatrix} & \downarrow_1 & \downarrow_j & \\ \to_1 & a_{11} & \dots & a_{1n}\\ & \vdots & & \vdots\\ \to_i & a_{i1} & \dots & a_{in}\\ & \vdots & & \vdots\\ & a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}| + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\begin{vmatrix} & & \downarrow_j & \\ \to_1 & a_{11} & \dots & a_{1n}\\ & \vdots & & \vdots\\ & a_{i1} & \dots & a_{in}\\ & \vdots & & \vdots\\ & a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}_{i1}$$

$$
=(-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}|+\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}\begin{array}{cc} & \quad\quad\downarrow_j \\ \to_1 & \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{i1} \end{array}
$$

$$
=(-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}|+\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\begin{array}{cc} & \quad\quad\downarrow_j \\ \to_1 & \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}|A_{1j}|=|A|.
$$

■

Wniosek 2.1. *Mamy dalsze własnosci wyznaczników, tym razem na wierszach:*

(1) $\det\begin{bmatrix} X+Y \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} X \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix} Y \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$

(2) $\alpha\in\mathbb{K}\longrightarrow\ \det[\alpha A_1,A_2,\dots,A_n]=\alpha\det[A_1,A_2,\dots,A_n],$

(3) $\forall i\in\{1,\dots,n-1\}\ \det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_{i+1} \\ A_i \\ \dots \\ A_n \end{bmatrix},$

gdzie $A_k=[a_{k1}\dots a_{kn}]$, $X=[x_1\dots x_n]$ *oraz* $Y=[y_1\dots y_n]$.

Twierdzenie 2.2. *Niech* A,B *będą macierzami kwadratowymi dowolnego stopnia (odpowiednio* n *i* m*, niekoniecznie* n,m *mają być równe), niech* $0,C$ *będą macierzami takiego stopnia, że macierz* $D=\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$ *jest kwadratowa, to wtedy* $\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix}=|A||B|$.

Dowód. *Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem stopnia macierzy* A*. Jeśli* $A\in\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *to wtedy* $d_{11}=a_{11}$ *i* $d_{1i}=0$ *dla* $i\in\{2,\dots,m\}$ *a więc mamy*

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{1+i}d_{1i}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}_{1i}=(-1)^2a_{11}\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}=|A||B|.
$$

Załóżmy, że $n > 1$ *i nasze twierdzenie jest prawdziwe dla* $k < n$. *Niech* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *to wtedy mamy:*

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ c_{11} & \dots & c_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} & b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ c_{11} & \dots & c_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} & b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}_{1i}$$

$$\overset{\textit{zał.}}{\underset{\textit{ind.}}{=}} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{1i} \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{1i} \right) \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix} = |A||B|,$$

co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Twierdzenie 2.3 (Cauchy'ego o wyznacznikach)**.** *Niech* $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *będą macierzami kwadratowymi tego samego rozmiaru, to* $|AB| = |A||B|$.

Dowód. *Niech* $D = AB \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *oraz* $C = \begin{bmatrix} B & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & A \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2n}(\mathbb{K})$ *będzie naszą pomocniczą, to wtedy korzystając z poprzedniego twierdzenia mamy* $|C| = |A||B|$*, z drugiej strony:*

$$
|C| = \begin{vmatrix} B & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
b_{11} & \dots b_{1i} \dots & b_{1n} & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
b_{21} & \dots b_{2i} \dots & b_{2n} & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
b_{31} & \dots b_{3i} \dots & b_{3n} & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\
b_{n1} & \dots b_{ni} \dots & b_{nn} & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\
0 & \dots 0 \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots 0 \dots & 0 & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l} k_i + b_{1i}k_{1+n} \\ k_i + b_{2i}k_{2+n} \\ \vdots \\ k_i + b_{ni}k_{n+n} \end{array}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
b_{11} & \dots 0 \dots & b_{1n} & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
b_{21} & \dots 0 \dots & b_{2n} & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
b_{31} & \dots 0 \dots & b_{3n} & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\
b_{n1} & \dots 0 \dots & b_{nn} & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\
0 & \dots a_{11}b_{1i} + \dots + a_{1n}b_{ni} \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots a_{n1}b_{1i} + \dots + a_{nn}b_{ni} \dots & 0 & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
b_{11} & \dots 0 \dots & b_{1n} & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
b_{21} & \dots 0 \dots & b_{2n} & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
b_{31} & \dots 0 \dots & b_{3n} & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\
b_{n1} & \dots 0 \dots & b_{nn} & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\
0 & \dots d_{1i} \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots d_{ni} \dots & 0 & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n}
\end{vmatrix}
= \begin{vmatrix}
0 & \dots 0 \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots 0 \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots 0 \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\
0 & \dots 0 \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\
d_{11} & \dots d_{1i} \dots & d_{1n} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & & b_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
d_{n1} & \dots d_{ni} \dots & d_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{n}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \dots = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ AB & A \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ AB & A \end{vmatrix} = (-1)^{n^2+n} \begin{vmatrix} AB & A \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = |AB|.
$$

■

Twierdzenie 2.4 (Rozwinięcie Laplac'ea)**.** *Niech* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$*, to wtedy*

Rozwiniecie względem wiersza:: $\forall i \in \{1, \dots, n\}\ |A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} |A_{ik}|,$

Rozwiniecie względem kolumny:: $\forall j \in \{1, \dots, n\}\ |A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} |A_{kj}|.$

Dowód. *Niech* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *będzie pewną macierzą kwadratową o współczynnikach z* $\mathbb{K}$*. Ponadto, niech* $A = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ *gdzie* $w_i = [a_{i1}, \ldots, a_{in}]$ *jest* i*–tym wierszem macierzy* A*. To wtedy*

$$|A| = \begin{vmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots w_n \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} w_i \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{i-1} \\ w_{i+1} \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{ik} \begin{vmatrix} w_i \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{i-1} \\ w_{i+1} \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix}_{1k}$$

$$= (-1)^{i-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{ik} |A_{ik}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} |A_{ik}|,$$

co kończy dowód rozwinięcia względem i*–tego wiersza. By udowodnić drugą tożsamość, wystarczy skorzystać z twierdzenia o wyznaczniku macierzy transponowanej* ($|A^T| = |A|$) *oraz ze wzoru na rozwinięcie wyznacznika względem wiersza.* ■

Wniosek 2.2. *Niech* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *będzie macierzą kwadratową oraz niech* $D_A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *będzie jej dopełnieniem algebraicznym, tzn.* $[D_A]_{ij} = d_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$*, to wtedy*

$$AD^T = (D^T)A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det A & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \det A \end{bmatrix}.$$

Dowód. *Niech* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *oraz* $D_A \in \mathbf{M}_N(\mathbb{K})$ *będzie dopełnieniem algebraicznym macierzy* A*. Niech* $i = j$ *i zastosujmy rozwinięcie Laplac'ea względem wiersza dla macierzy* A*, to wtedy*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1} (-1)^{i+k} a_{ik} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (d^T)_{ki} = (AD^T)_{ii}.$$

Rozpatrzmy teraz przypadek gdy $i \neq j$*, to weźmy pod uwagę macierz* $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \ldots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \ldots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Zauważmy że nasza macierz ma dwa wiersze (mianowicie i–ty i j–ty) takie same, więc jej wyznacznik jest równy 0. *stosując ponownie rozwinięcie Laplace'a względem i–tego wiersza mamy:*

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{jk} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{ik} = \sum_{k=1} a_{jk} (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} d_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} (d^T)_{ki} = (AD^T)_{ji}.$$

Więc ostatecznie mamy $AD^T = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix}$. *Podobne rozumowanie prowadzi do* $D^T\, A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix}$, *co kończy dowód naszego wniosku.* ■

Definicja 2.2 (macierz odwrotna)**.** *Niech* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *będzie macierzą kwadratową, to macierz* $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *jest odwrotna do A jeżeli*

$$A \cdot B = \mathbf{1} = B \cdot A.$$

Macierz A nazywamy macierzą odwracalną wtedy gdy istnieje do niej macierz odwrotna.

Twierdzenie 2.5. *Kwadratowa macierz* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *jest odwracalna (posiada macierz odwrotną) wtedy i tylko wtedy gdy* $|A| \neq 0$, *co więcej, jeśli* $|A| \neq 0$ *to*

$$A^{-1} = \frac{D_A^T}{|A|}.$$

Dowód. *Przypuśćmy, że* $|A| = 0$ *i macierz A jest owracalna. To wtedy istnieje macierz* $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, *taka że* $AB = \mathbf{1} = BA$. *Na mocy twierdzenia Cauchyego mamy:*

$$1 = |\mathbf{1}| = |AB| = |A| \cdot |B| = 0 \cdot |B| = 0,$$

sprzeczność. Załóżmy że $|A| \neq 0$, *to z wniosku 2 mamy:*

$$A \cdot D_A^T = |A| \cdot \mathbf{1} = D_A^T \cdot A.$$

Ponieważ $|A| \neq 0$, *więc macierz* $\frac{1}{|A|} D_A^T$ *jest macierzą odwrotną do macierzy A.* ■