Zasadnicze twierdzenie algebry

Udowodnimy zasadnicze twierdzenie algebry.

Definicja 0.1 *Niech $\mathbb{P}$ będzie dowolnym pierścieniem i $f \in \mathbb{P}[x]$ będzie dowolnym wielomianem o współczynnikach z pierścienia $\mathbb{P}$, to wtedy $x_0 \in \mathbb{P}$ jest pierwiastkiem wielomianu f wtedy i tylko wtedy gdy $f(x_0) = 0$.*

Twierdzenie 0.1 (Bezout'a) *Niech $\mathbb{K}$ będzie dowolnym ciałem oraz niech $f \in \mathbb{K}[x]$ ma pierwiastek $x_0 \in \mathbb{K}$, to istnieje $h \in \mathbb{K}[x]$ który dzieli f, co więcej mamy:*

$$f(x) = (x - x_0) \cdot h(x).$$

Dowód. *Niech $h, r \in \mathbb{K}[x]$ będą wielomianami dla których*

$$f(x) = (x - x_0) \cdot h(x) + r(x), \text{ oraz } st\ r < st\ (x - x_0) = 1,$$

więc $r(x) = c$ jest wielomianem stałym, to wtedy

$$0 = f(x_0) = (x_0 - x_0) \cdot h(x_0) + c = c,$$

stąd $r(x) = c = 0$ a więc $f(x) = (x - x_0) \cdot h(x)$, co kończy dowód. ■

Lemat 0.1 *Każdy wielomian $f \in \mathbb{C}[z]$, którego stopień jest większy bądź równy jedności jest nieograniczony w następującym sensie:*

$$\forall M \geq 0 \exists R > 0 \forall z \in \mathbb{C} \ \ R < |z| \longrightarrow M < |f(z)|.$$

Dowód. *Lemat ten udowodnimy przez indukcję względem stopnia wielomianu f. Jeśli $st\ f = 1$ to tezę pozostwiamy do udowodnienia czytelnikowi. Załóżmy że teza lematu jest prawdziwa dla wszystkich wielomianów dodatniego stopnia mniejszego niż n. Niech $st\ f = n$, jeśli $f(z) = a_n \cdot z^n + a_0$ to warunek w tezie jest spełniony w niemal oczywisty sposób. W pozostałym przypadku, $f(z) = z \cdot h(z) + a_0$ i $1 \leq st\ h < n$. Korzystamy teraz z założenia indukcyjnego dla wielomianu h. Załóżmy że $M > 0$ i niech $R > 1$ będzie takie że dla każdego $z \in \mathbb{C}$ dla którego spełniony jest warunek $R < |z|$ zachodzi nierówność $M + |a_0| < |h(z)|$ to wtedy mamy:*

$$|f(z)| = |z \cdot h(z) + a_0| \geq |z \cdot h(z)| - |a_0| > |h(z)| - |a_0| > M + |a_0| - |a_0| = M,$$

dla $|z| > R$. Korzystając z zasady indukcji skończonej otrzymjemy tezę, co kończy dowód naszego lematu. ■

Twierdzenie 0.2 (Zasadnicze tw. algebry, Gauss (1799)) *Każdy wielomian zespolony $f \in \mathbb{C}[z]$, którego stopień jest nie mniejszy niż 1 ma pierwiastek.*

Dowód. *Niech $f \in \mathbb{C}[z]$ będzie wielomianem o następującej postaci $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Stosując powyższy lemat, istnieje $R > 1$ dla którego zachodzi następująca inkluzja $D := \{z \in \mathbb{C} : \ |f(z)| \leq |a_0|\} \subset K_R := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq R\}$, gdzie D jest jest domknięty i ograniczony w $\mathbb{C}$. Wtedy na mocy twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów, istnieje $z_0 \in D \subset K_R$ takie że $|f(z_0)| = \min\{|f(z)| : \ z \in \mathbb{C}\}$ jest kresem dolnym wszystkich modułów wartości wielomianu f. Udowodnimy teraz że $f(z_0) = 0$. Jeśli nie, to $|f(z_0)| > 0$ i wtedy dla każdego $z = z_0 + r \cdot e^{i\phi}$ mamy*

$$f(z_0 + re^{i\phi}) = f(z_0) + \sum_{k=0}^{n} b_k r^k e^{ik\phi}.$$

Niech $k_0 = \min\{k < n : \ b_k \neq 0\}$, to dla $r \in (0,1)$ i $\phi = \frac{\pi - arg(b_{k_0})}{k_0}$ mamy:

$$\begin{aligned} |f(z_0 + re^{i\phi})| =& |f(z_0) + \sum_{k=k_0}^{n} b_k r^k e^{ik\phi}| \leq |f(z_0) + b_{k_0} r^{k_0} e^{i\phi k_0}| + |\sum_{k=k_0+1}^{n} b_k r^k e^{ik\phi}| \\ \leq& |f(z_0) + b_{k_0} r^{k_0} e^{i\phi k_0}| + \sum_{k=k_0+1}^{n} |b_k| r^k \leq |f(z_0) + b_{k_0} r^{k_0} e^{i\phi k_0}| \\ &+ n \max\{|b_k| : \ k = 0, ..., n\} r^{k_0+1} = |f(z_0)| - |b_{k_0}| r^{k_0} + C r^{k_0+1} < |f(z_0)|, \end{aligned}$$

gdzie $C = n \max\{|b_k| : \ k = 0, ..., n\}$ i wystarczająco małego r, co prowadzi do sprzeczności. W ten sposób, dowód istnienia $z_0 \in \mathbb{C}$ dla którego $f(z_0) = 0$ został zakończony. ∎

Wniosek 0.1 *Jeśli $f \in \mathbb{C}[z]$ jest wielomianem zespolonym stopnia $n \in \mathbb{N}$, to istnieją liczby zespolone $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ (mogą się powtarzać) i $c \in \mathbb{C}$ dla których zachodzi rozkład na czynniki liniowe:*

$$f(z) = c \cdot (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

Dowód. *Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem stopnia wielomianu $f \in \mathbb{C}[z]$, dla wielomianów stopnie nie większego od jedności teza jest oczywista. Niech $f \in \mathbb{C}[z]$ i $st\ f = n > 1$, to z zasadniczego twierdzenia algebry, istnieje pierwiastek z_0 dla wielomianu f. stosując twierdzenie Bezout* *istnieje* $h \in \mathbb{C}[z]$ *dla którego* $f(z) = (z - z_0) \cdot h(z)$*, oczywiście st* $h <$ *st* $f = n$*, więc stosujemy założenie indukcyjne dla* h

$$h(z) = c \cdot (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_{n-1}), \text{ (stopień } h \text{ jest równy } n-1\text{)}$$

więc ostatecznie mamy

$$f(z) = (z - z_0) \cdot h(z) = (z - z_0) \cdot c \cdot (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_{n-1}),$$

co kończy dowód o rozkładzie wielomianu. ■

Robert Rałowski