SZEREGI POTEGOWE - ZASTOSOWANIE DO LICZBY π

Definicja 1. *Niech będzie dany ciąg liczbowy* $(a_n)_{\in\mathbb{N}}$, $x \in \mathbb{R}$, *to funkcję rzeczywistą*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$$

nazywamy szeregiem potęgowym.

Twierdzenie 1. *Jeżeli szereg potęgowy* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$ *jest zbieżny w punkcie* $x \in \mathbb{R}$, *to dla każdego* $y \in \mathbb{R}$ *takiego, że* $|y-x_0| < |x-x_0|$ *szereg jest zbieżny bewzględnie w* y *tzn.* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n(y-x_0)^n|$ *jest zbieżny. Więc też* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(y-x_0)^n$ *jest zbieżny.*

Dowód. Załóżmy że szereg $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny w punkcie $x \in \mathbb{R}$. Ze zbieżności $f(x)$ wynika że $lim_{n\to\infty} a_n(x-x_0)^n = 0$. Wówczas, istnieje $M > 0$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $|a_n(x-x_0)^n| \leq M$. Niech $y \in \mathbb{R}$ takie że $|y-x_0| < |x-x_0|$, wtedy $q = |\frac{y-x_0}{x-x_0}| < 1$. Ponieważ mamy

- $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|a_n(y-x_0)^n| = |a_n(x-x_0)^n||\frac{y-x_0}{x-x_0}|^n \leq Mq^n$,
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ jest zbieżny (bo $0 \leq q < 1$).

Więc na mocy kryterium porównawczego, szereg $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n(y-x_0)^n|$ jest zbieżny, w szczególności, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(y-x_0)^n$ jest zbieżny. □

Definicja 2. *Niech będzie dany szereg potęgowy* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$, *to liczbę*

$$R = \sup\{|x-x_0| : \ x \in \mathbb{R} \wedge \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n \textit{ jest zbieżny w } x\}$$

nazywamy promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$.

Jako wniosek mamy twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Niech* R *będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$. *Wtedy dla każdego* $x \in (x_0-R, x_0+r)$, *szereg* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$ *jest zbieżny w* x.

Twierdzenie 3. *Jeżeli* R *jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$, *to wtedy*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \textit{dla } 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty, \\ 0 & \textit{gdy } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty, \\ \infty & \textit{gdy } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Twierdzenie 4. *Jeżeli R jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$, $a_n \neq 0$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to wtedy*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|} & \textit{dla } 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < \infty, \\ 0 & \textit{gdy } \limsup\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty, \\ \infty & \textit{gdy } \limsup\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0. \end{cases}$$

Przykład 1. *Wyznacz przedział zbieżności szeregu potęgowego:*
- $sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-2)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x+1)^n$,
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{4^{2n}}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nln^2n} x^n$.

Twierdzenie 5 (Rozwinięcie Taylora)**.** *Jeżeli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna na zbiorze $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq D_f$, to wtedy dla kazdego $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ istnieje $\xi \in (x_0 - r, x_0 + r)$ takie że*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n.$$

(Tutaj $f^{(k)}(x)$ oznacza k-tą pochodną w punkcie x)

Tutaj $R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$ nazywamy n-tą resztą Lagrange'a w punkcie x. Natomiast, $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ nazywamy wielomianem Taylora. Jeżeli $x_0 = 0$, to wtedy mamy do czynienia z rozwinięciem Maclaurina.

Twierdzenie 6. *Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że*
1. $I = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$,
2. *f jest nieskończenie różniczkowalna na przedziale I,*
3. $(\forall x \in I) \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Wtedy, dla każdego $x \in I$ zachodzi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Ponadto, jeżeli dla pewnego ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zachodzi

$$(\forall x \in I)\ (f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n),$$

to wtedy

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}).$$

Przykład 2. *Zachodzą wzory*
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *na* $\mathbb{R}$,
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ *na* $\mathbb{R}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ *na* $\mathbb{R}$,

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *dla* $x \in (-1,1)$.

Twierdzenie 7. *Niech* $R > 0$ *będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*, to wtedy*

(1) $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ *dla* $x \in (-R,R)$,
(2) *dla każego* $x \in (-R,R)$ *mamy*

$$\int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Przykład 3. *Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych, wyznacz:*

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{3^n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n}$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} \frac{2^n}{5^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{3^n}$.

Przykład 4 (Liczba π)**.** *Rozważmy funkcję* $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, *to tla wszystkich* t *takich że* $|t| < 1$ *mamy*

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}.$$

Oczywiście promień zbieżności szeregu widniejącego powyżej wynosi 1 *a jego przedział zbieżności jest równy* $(-1,1)$. *Niech* $x \in (-1,1)$, *to na mocy twierdzenia 7 o całkowaniu szeregów mamy*

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\, dt &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.\end{aligned}$$

Z drugiej strony mamy:

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \operatorname{arctg} x \bigg|_0^x = arctgx.$$

Więc dla dowolnego $x \in (-1,1)$ *mamy*

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Dla $x \in (-1,1)$ *niech* $\alpha = \operatorname{arctg} x$, *więc* $x = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. *Podstawiając to do powyższej równości, otrzymujemy: dla dowolnego* $\alpha \in (-\pi/4, \pi/4)$

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{tg}^{2n+1} \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\sin^{2n+1} \alpha}{\cos^{2n+1} \alpha}.$$

Niech $\alpha = \pi/6$, *to wtedy* $\sin \pi/6 = 1/2$ *oraz* $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$, *więc* $\operatorname{tg} \pi/6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. *Więc*

$$\pi/6 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{(\sqrt{3})^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{3^n \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.$$

Ponieważ $6/\sqrt{3} = \sqrt{12}$ *otrzymujemy wzór na liczbę* π*:*

$$\pi = \sqrt{12} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.$$

Niech $a \in \mathbb{R}$ *takie że*

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{a}{1+\sqrt{3}},$$

to wtedy $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = 2$ *a stąd* $2 = 3 - 1 = a$. *Więc*

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{3}} = 1 + \cfrac{2}{1+1+\cfrac{2}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\sqrt{3}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\ddots}}}}}$$

Ostatecznie mamy wzór na liczbę π*:*

$$\pi = 2 + 2 \cdot \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\ddots}}}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.$$