Lista do wykładu

Przestrzenie afiniczne

Zadanie 1 *Co można powiedzieć o punktach* a, b *przestrzeni afinicznej* $\mathfrak{A}[V]$ *jeśli istnieje wektor* $x \in V$ *taki, że* $a\#x = b$ *oraz* $b\#x = a$.

Zadanie 2 *Niech* $\mathfrak{A}[V]$ *będzie przestrzenią afiniczną. Nich* $a \in \mathfrak{A}$ *będzie ustalonym punktem. Udowodnij, że*

$$\mathfrak{A} \ni b \mapsto f(b) = \bar{ab} \in V,$$

jest bijekcją pomiędzy $\mathfrak{A}$ *i* V.

Zadanie 3 *W pewnej przestrzeni afinicznej* $\mathfrak{A}$ *nad przestrzenią euklidesową* $\mathbb{R}^3$ *w pewnym układzie współrzędnych* $\mathcal{O}, \mathcal{E}$, *punkty* a, b, c *mają następujące współrzędne*

$$(3, -5, 2),\ (1, 0, -4),\ (-2, -2, 5)$$

odpowiednio. Napisz współrzędne wektora $\bar{ab} - 2\bar{bc}$.

Zadanie 4 *Udowodnij, że dla zadanej przestrzeni afinicznej* $\mathfrak{A}[V]$, *przez dowolny punkt zbioru* $\mathfrak{A}$ *przechodzi dokładnie jedna rozmaitość afiniczna o zadanej przestrzeni kierunkowej.*

Zadanie 5 *Niech* $\mathfrak{A}[V]$ *będzie ustaloną przestrzenią afiniczną. Załóżmy, że* $\mathfrak{B} = b\#W$ *i* $\mathfrak{C} = c\#Z$ *będą dwiema rozmaitościami afinicznymi w* $\mathfrak{A}[V]$. *Udowodnij, że*

$$\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset \longleftrightarrow \bar{cb} \in W + Z,$$

gdzie

$$W + Z = \{w + z \in V :\ (w, z) \in W \times Z\}.$$

Zadanie 6 *Niech* $\mathfrak{A}[V]$ *będzie ustaloną przestrzenią afiniczną. Załóżmy, że* $\mathfrak{B} = b\#W$ *i* $\mathfrak{C} = c\#Z$ *będą dwiema rozmaitościami afinicznymi w* $\mathfrak{A}[V]$. *Załóżmy, że* $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset$, *udowodnij, że* $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ *jest rozmaitością afiniczną o przestrzeni kierunkowej* $W \cap Z$.

Zadanie 7 *Wykaż, że dowolny automorfizm przestrzeni afinicznej* $\mathfrak{A}[V]$ *przekształca rozmaitości afiniczne na rozmaitości afiniczne. Ponadto, jeśli obydwie rozmaitości afiniczne są równoległe, to ich obrazy względem automorfizu też są równoległe.*

Zadanie 8 *W przestrzeni afinicznej* $\mathbb{R}^2[\mathbb{R}^2]$ *dany jest punkt* $a \in \mathfrak{A}[V]$ *o współrzędnych* $(3, -1)$ *w zadanym układzie współrzędnych* $(\mathcal{O}, \mathcal{E})$. *Wyznacz współrzędne punktu* $a \in \mathfrak{A}[V]$ *w układzie współrzędnych* $(\mathcal{O}', \mathcal{E}')$, *wiedząc, że* $\mathcal{O}'$ *ma współrzędne* $(-2, -5)$ *w układzie* $(\mathcal{O}, \mathcal{E})$ *oraz*

$$\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

jest macierzą przejścia z bazy $\mathcal{E}$ *do bazy* $\mathcal{E}'$.

Grafika 2D i 3D

Zadanie 9 *Napisz funkcję w javascript (albo w pseudokodzie), która sprawdza, czy dane punkty* $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ *są współliniowe.*

Zadanie 10 *Napisz funkcję w javascript (albo w pseudokodzie), która sprawdza, czy dane punkty* $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ *są współliniowe.*

Zadanie 11 *Napisz funkcję sprawdzającą, czy dla punktów* $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ *punkty* C *i* D *leżą po tej samej stronie prostej wyznaczonej przez punkty* A *i* B.

Zadanie 12 *Napisz funkcję sprawdzającą, czy punkty* $X, Y \in \mathbb{R}^3$ *leżą po tej samej stronie płaszczyzny wyznaczonej przez niewspóliniowe punkty* $A, B, C \in \mathbb{R}^3$.

Zadanie 13 *Napisz funkcję sprawdzającą, czy odcinek* I *wyznaczony przez punkty* $X, Y \in \mathbb{R}^3$ *przecina płaszczyznę* π, *wyznaczoną przez niewspóliniowe punkty* $A, B, C \in \mathbb{R}^3$. *Jeśli odpowiedź jest pozytywna, to funkcja zwraca zbiór* $I \cap \pi$.

Zadanie 14 *Napisz funkcję, która zwraca unormowany wektor normalny* $\bar{n}$ *do płaszczyzny wyznaczonej przez niewspóliniowe punkty* $A, B, C \in \mathbb{R}^3$. *Zakładamy, że* $\bar{n}$ *ma zgodną orientację z* (A, B, C).

Zadanie 15 *Dla zadanych nizerowych punktów* $A, B \in \mathbb{R}^2$ *wyznacz macierz obrotu* $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *względem początku układu wsółrzędnych, która przeprowadza punkt* A *na punkt* B.

Zadanie 16 *Czy dla zadanych punktów* $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ *można wyznaczyć izometrię* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *taką, że*

1. $f(a) = B$,
2. *prosta wyznaczona przez punkty* A, B *przechodzi na prostą przechodzącą przez punkty* C *i* D,
3. *istnieje macierz* $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *i wektor* $v \in \mathbb{R}^2$ *taka, że dla dowolnego* $x \in \mathbb{R}^2$ $f(x) = M \cdot x + v$, *(wektory* x, y *zapisujemy kolumnowo).*

Jeśli odpowiedź jest twierdząca, to wyznacz M *i* v.

Zadanie 17 *Napisz funkcję która sprawdza, czy część wspólna dwóch trójkątów wyznaczonych przez wierzchołki* $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ *oraz* $C, D, E \in \mathbb{R}^3$ *jest odcinkiem o dodatniej długości.*

Grafika 2D i 3D ciąg dalszy

Zadanie 18 *Wyznacz macierz macierz spełniającej równość*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad lub \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

dla następujących przekształceń:

1. *obrót o kąt* α *wokół punktu* $P = (x_p, y_p)$ *(punkt* P *jest punktem stałym tego przekształceniaa)*
2. *lustrzane odbicie względem osi* $y = y_p$.
3. *obrót w* $\mathbb{R}^3$ *wokół osi* OZ,
4. *obrót w* $\mathbb{R}^3$ *wokół osi przechodzącej przez punkty* $(0, 0, 0)$ *oraz* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Zadanie 19 *Wyprowadź wzór Rodriguesa na obrót w* $\mathbb{R}^3$ *wokół osi (przechodzącej przez punkt* $(0, 0, 0)$ *wyznaczonej przez wektor jednostkowy* $\bar{k}$ *o kąt* θ*:*

$$\bar{v}' = \bar{v} \cdot \cos\theta + (\bar{k} \times \bar{v}) \cdot \sin\theta + \bar{k}(\bar{k} \cdot \bar{v})(1 - \cos\theta).$$

Zadanie 20 *Stosując wzór Rodriguesa wyznacz macierz obrotu (w postaci z zadania 18) w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ *wzdłuż osi wyznaczonej przez wektor jednostkowy* $\bar{k}$ *o kąt* θ.

Kwaterniony

$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ *jest zbiorem kwaternionów oraz mamy*

$$ij = k = -ji, \ jk = i = -kj, \ ki = j = -ik, \ i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Defiiniujemy sprzężenie kwaternionu ora moduł następująco:

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dj, \quad \|a + bi + cj + dk\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Zadanie 21 *Wykaż następujące własności sprzężenia kwaternionu:*

1. $\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$,
2. $\overline{q_1 \cdot q_2} = \overline{q_1} \cdot \overline{q_1}$,

3. $\overline{\overline{q}} = q$.

Zadanie 22 *Wykaż następujące własności modułu kwaternionu:*

1. $\|q\| = \|\overline{q}\| = \| - q\|$,

2. $q \cdot \overline{q} = \|q\|^2$,

3. $\|q_1 \cdot q_2\| = \{q_1\| \cdot \|q_2\|$,

4. $\|q_1 + q_2\| \leq \|q_1\| + \|q_2\|$.

Zadanie 23 *Udowodnij, że dla niezerowego kwaternionu q zachodzi wzór*

$$q \cdot w = w \cdot q = 1 \ \ (= 1 + 0i + 0j + 0k),$$

gdzie $w = \frac{\overline{q}}{\|q\|}$.

Zadanie 24 *Kwaterniony możemy traktować następująco:*

$$\hat{\mathbb{H}} = \{[a, \bar{v}] : \ a \in \mathbb{R} \wedge \bar{v} \in \mathbb{R}^3\}.$$

Wykaż, że istnieje izomorfizm pomiędzy $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ *a* $(\hat{\mathbb{H}}, \oplus, \odot)$, *gdzie*

$$[x, \bar{v}] \oplus [y, \bar{w}] = [x + y, \bar{v} + \bar{w}], \ \ [x, \bar{v}] \odot [y, \bar{w}] = [xy - \bar{v}\bar{w}, x\bar{w} + y\bar{v} + \bar{v} \times \bar{w}].$$

Zadanie 25 *Niech będzie dany wektor unormowany $\bar{v}$ (tj. $\|\bar{v}\| = 1$), kąt θ oraz dwa kwaterniony:*

$$p = [0, \bar{w}], \ \ q = \left[\cos\frac{\theta}{2}, \bar{v}\sin\frac{\theta}{2}\right],$$

gdzie kwaternion p jest kwaternionem czystym. Udowodnij, że qpq^{-1} jest też kwaternionym czystym, którego druga współrzędna jest wektorem powstałym z wektora $\bar{w}$ przez obrót o kąt θ wokół osi wyznaczonej przez wektor jednostkowy $\bar{v}$.

Zadanie 26 *Rozważmy dany podzbiór macierzy o współczynnikach zespolonych:*

$$\widetilde{\mathbb{H}} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : \ z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Sprawdź, że $\widetilde{\mathbb{H}}$ z działaniami macierzowymi mnożenia i dodawania jest izomorficzny ze zbiorem kwaternionów $\mathbb{H}$.

Zadanie 27 *Sprawdź, czy podzbiór $\widetilde{\mathbb{H}}$ z poprzedniego zadania jest nieprzemiannym ciałem.*

cdn.