Lista 2

<u>**Rozszerzona postać gry**</u>

Zadanie 1. *Niech* $T = (V, E, x_0)$ *będzie drzewem skierowanym o korzeniu* x_0. *Dla dowolnych* $x, y \in V$

$$x \preceq y \longleftrightarrow x = y \vee (\exists t = (t_0, \ldots, t_{n-1}) \in V^n) x = t_0 \wedge y = t_{n-1} \wedge (t_k, t_{k+1}) \in E).$$

Sprawdź, czy $(V, \preceq)$ *jest porządkiem częściowym.*

Zadanie 2. *Niech* $(N, V, E, x_0, (V_i)_{i \in N}, \mathcal{O}, u)$ *będzie rozszerzoną postacią gry oraz* V *i* $N = \{1, \ldots, n\}$ *są skończone. Niech będzie dany wektor strategii* $s = (s_i)_{i \in N}$ *(*s_i *- strategia* i*-go gracza). Udowodnij, że istnieje* $m \in \mathbb{N}$ *takie, że*

$$(s_1 \cup s_2 \cup \ldots \cup s_n)^m (x_0)$$

jest liściem w drzewie gry (V, E, x_0).

Zadanie 3. *Opisz następującą grę w postaci gry rozszerzonej. Na stole leżą trzy stosy zapałek. Pierwszy stos ma jedną zapałkę, drugi ma dwie a trzeci stos składa się z trzech zapałek. Dwóch graczy naprzemian usuwa zapałki ze stołu. W każdym ruchu, gracz wybiera jeden ze stosów i usuwa przynajmniej jedną zapałkę z wybranego stosu. Gracz, który usunie ostatni przegrywa grę. Rysując drzewo tej gry, wyznacz sposób w jaki jeden z graczy może sobie zagwarantować zwycięstwo.*

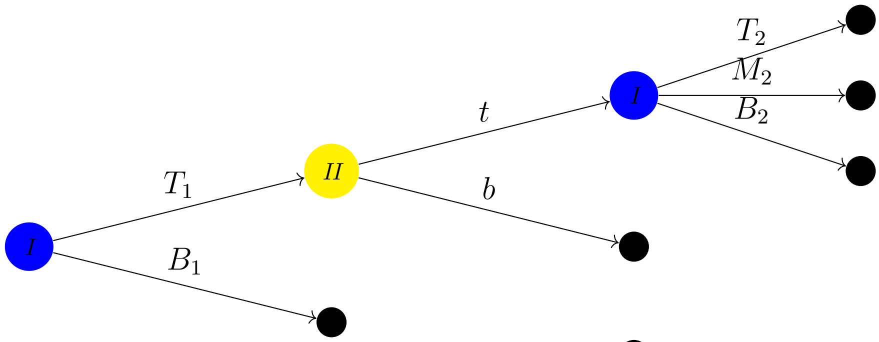
Zadanie 4. wybór kandydata *Opisz następującą sytuację w postaci gry rozszerzonej. Ewa, Łukasz i Staszek stanowią zarząd firmy prawniczej. W trójkę rozważają przyjęcie nowych pracowników. Kandydatami do przyjęcia są Anna, Roman i Jan. Procedura wyboru jest następująca:*

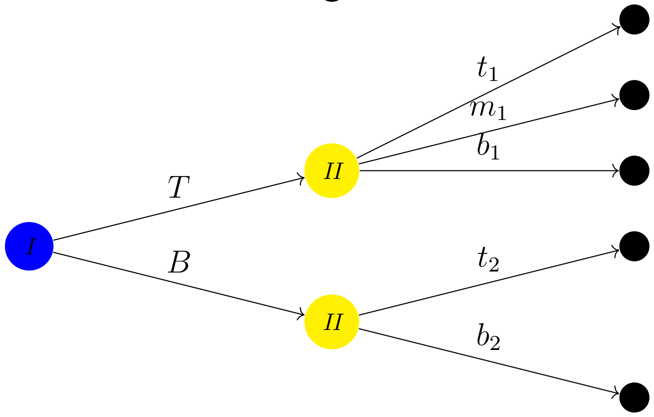
- *Ewa jako pierwsza daje propozycję jednego z kandydatów,*
- *następnie Łukasz proponuje własnego kanydata (może być ten sam, którego zaproponowała Ewa),*
- *Staszek proponuje jednego kandydata który był wcześniej zaproponowany do przyjęcia do firmy prawniczej,*
- *kandydat, który otrzymał poparcie u dwóch partnerów z firmy zostaje przyjęty, Jeżeli żaden z kandydatów nie uzyskał poparcia dwóch członków zarządu, to wszyscy trzej kandydaci nie zostają przyjęci do firmy prawniczej.*

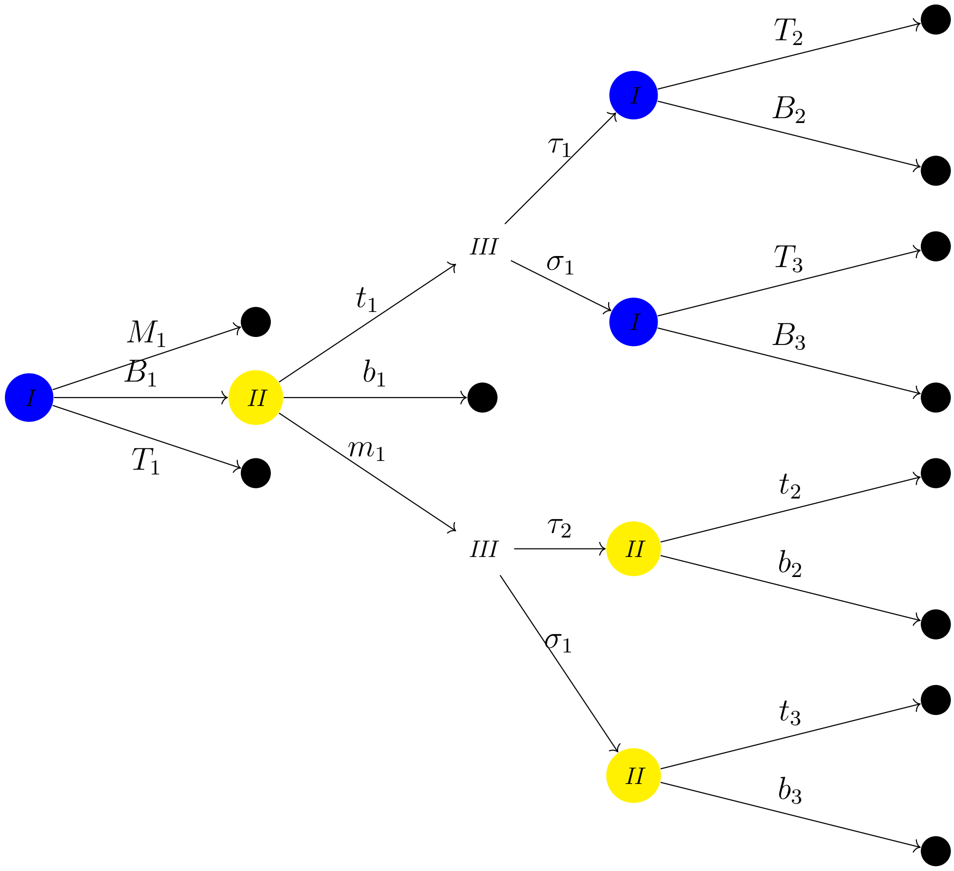
Zadanie 5. *Przedstaw tę sytuację jako grę w rozbudowanej formie. Ptak broni swojego terytorium. Kiedy inny ptak próbuje zaatakować to terytorium, pierwszy ptak staje przed dwiema alternatywami: stać i walczyć o swoje terytorium lub uciekać i szukać innego miejsca dla swojego domu. Wypłatą dla każdego ptaka jest spodziewana liczba potomków i są one obliczane w następujący sposób:*

- *Jeśli ptak atakujący poddaje się ptakowi broniącemu i zamiast tego leci na inne terytorium, wypłata wynosi: 6 potomków dla ptaka broniącego się, 4 potomków dla ptaka atakującego,*

- *Jeśli ptak atakujący przeprowadza atak, a ptak broniący leci na inne terytorium, wypłata wynosi: 4 potomków dla ptaka broniącego się, 6 potomków dla ptaka atakującego,*
- *Jeśli atakujący ptak przeprowadza atak, a broniący się ptak stoi na ziemi i walczy, wypłata wynosi: 2 potomków dla ptaka broniącego się, 2 potomków dla ptaka atakującego.*





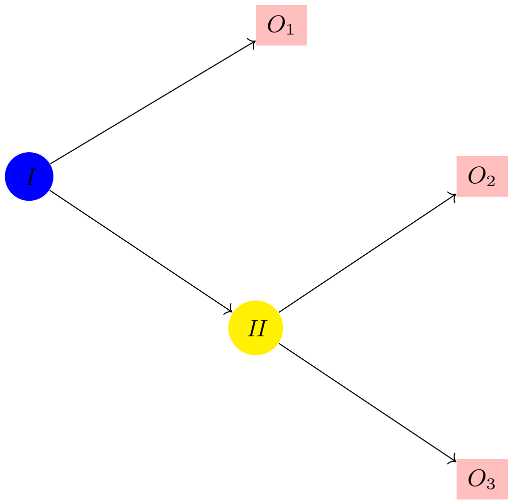


Rysunek 1. Graficzne przedstawienie gry.

Zadanie 6. *Dane są trzy gry, patrz Rysunek 1.*

a: *Ile strategii ma każdy gracz w każdej z następujących trzech gier (wyniki gier nie są określone na liczbach).*
b): *Wypisz w pełni wszystkie strategie każdego gracza w każdej z trzech gier.*
c): *ile jest wszystkich różnych rozgrywek w każdej z gier?*

Zadanie 7. *Niech będzie dana gra, której drzewo skierowane jest następujące:*



Wyniki gry są różne i są elementami zbioru I wygrywa , II wygrywa , remis .

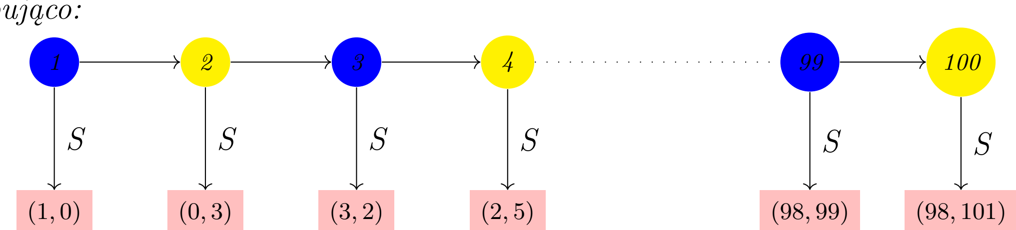
(1) *czy istnieje wybór* $)1, O_2, O_3$*, przy którym gracz* I *ma strategię wygryawjącą,*
(2) *to samo ale dla gracza* II*,*
(3) *czy istnieje wybór* O_1, O_2, O_3*, przy którym obydwaj gracze posiadają strategię gwarantującą przynajmniej remis?*

Zadanie 8 (Wojna płci)**.** *Męczyzna i Kobietą chcą spędzić wolny piątek. Możliwą alternatywą spędzenia wolnego czasu są kocert rockowy (CR) albo mecz piłki nożnej (F). Męzczyzna chce pójść na mecz a Kobieta na kocert ale oboje wolą spędzić wspólnie czas niż osobno. Satysfakcję ze spędzonego czasu wartościujemy następująco:*

(1) *oglądanie wspólnie meczu:* 2 *dla męzczyzny i* 1 *dla kobiety,*
(2) *pójście razem na koncert rockowy:* 1 *dla męzczyzny i* 2 *dla kobiety;*
(3) *czas spędzony osobno:* 0 *dla męzczyzn i* 0 *dla kobiety.*

Para nie komunikuje się ze sobą dobrze, więc każdy wybiera, dokąd pójdzie w piątek wieczorem, zanim odkryje, co wybrał drugi, i odmawia zmiany zdania Przedstaw tę sytuację jako grę w rozbudowanej formie.

Zadanie 9. *Gracze* I *i* II *grają na przemian i* I *zaczyna grę. Drzewo gry wygląda nastąpująco:*



Wypłata gry (w liściu drzewa gry) jest parą (x, y)*, gdzie* x *jest wartością kasy gracza* I *w tysącach dolarów a* y *jest warośćią w kasie drugiego gracza wyrażoną w tysiącach dolarów.*

Każdy gracz ma kasę, do której pieniądze są dodawane w trakcie gry. Na początku, kasa gracza I zawiera 1000 \$*, a kasa gracza II jest pusta. Każdy gracz z kolei, po swoim ruchu, może zdecydować o zatrzymaniu gry (S), w którym to przypadku każdy gracz otrzymuje* *jako wypłatę kwoty pieniężnej w swojej kasie, lub kontynuować grę. Za każdym razem, gdy gracz decyduje się na kontynuowanie gry, usuwa 1000 USD z kasy i umieszcza je w kasie innego gracza, a jednocześnie* **Super darczyńca** *dodaje kolejne 2000 USD do kasy innego gracza. Jeśli żaden gracz nie zatrzyma gry po upływie 100 tur, gra się kończy, a każdy gracz otrzymuje do tego momentu pieniądze. Jak zagrałbyś w tę grę w roli Gracza I? Uzasadnij swoją odpowiedź!*

Zadanie 10. *Odpowiedz na następujące pytania dotyczące gry Chomp Davida Gale'a:*

- **a):** *Który z dwóch graczy ma zwycięską strategię w grze Chomp rozgrywanej na planszy* $2 \times \infty$ *Uzasadnij swoją odpowiedź. Opisz zwycięską strategię.*
- **b):** *Znajdź dwie zwycięskie strategie dla Gracza I w grze Chomp rozgrywanej na planszy* $\infty \times \infty$.

Zadanie 11. *Gra "Orzeł - Reszka." Obydwaj gracze rzucają jednocześnie monetą jednozłotową. Jeżeli wypadły dwi takie same strony monety, to wygrywa gracz* I *a jeżeli różne, to wygrywa gracz* II. *Sprawdź, czy zachodzi twierdzenie von Neumanna w grze "Orzeł - Reszka".*

Zadanie 12. *Gra - papier kamień i nożyczki. Dwóch graczy jednocześnie wystawiają dłoń przedstawiającą symbol papieru, kamienia i nożyczek. Gracz który pokazał silniejszy symbol wygrywa grę i dostaje jeden punkt a przegrany otrzymuje* -1. *Jeżeli obydwaj wskażą ten sam symbol, to każdy z nich otrzymuje* 0 *punktów. Hierarhi bycia silniejszym jest ustawiona następująco:*

- *nożyce są silniejsze od papieru, ponieważ go tną,*
- *kamień jest silniejszy od nożyc, ponieważ je tępi,*
- *papier jest silniejszy od kamienia, ponieważ go owija.*

Opisz tę grę w postaci rozszerzonej.

Zadanie 13. *Niech będzie dane przeliczalne drzewo gry i załóżmy, że głębokość każdego wierzchołka jest ograniczona; tzn. istnieje dodatnia liczba całkowita* N, *która jest większa niż długość każdej ścieżki w drzewie gry.*

Udowodnij, że twierdzenie von Neumanna jest prawdziwe w grach z doskonałą informacją i bez przypadkowych ruchów.

Robert Rałowski