Lista 3

Gry w postaci strategicznej

Niech N będzie zbiorem niepustymoraz będzie dana rodzina zbiorów $\{S_i : \; i \in N\}$. Niech $i \in N$, to

$$S = \prod_{j \in N} S_j \text{ oraz } S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j.$$

Przez s_{-i} rozumiemy wybrany element zbioru S_{-i}.

Definicja 1. *Niech $(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ będzie strategiczną postacią gry. Załóżmy, że każdy zbiór S_i jest skończony. Niech $i \in N$, powiemy, że strategia s_i gracza i jest* **silnie zdominowana***, jeżeli*

$$(\exists t_i \in S_i \setminus \{s_i\})(\forall s_{-i} \in S_{-i}) \; u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(t_i . s_{-i}).$$

Natomiast, s_i jest **zdominowana** *(lub słabo zdominowana), jeżeli istnieje $t_i \in S_i$ różne od s_i takie, że*

- $(\forall s_{-i} \in S_{-i}) \; u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(t_i, s_{-i})$,
- $(\exists t_{-i} \in S_{-i}) \; u_i(s_i, t_{-i}) < u_i(t_i, t_{-i})$.

Zadanie 1. *Korzystając z poprzenich list, sprowadź każdą grę w postacji rozszerzonej do strategicznej postacii gry.*

Zadanie 2. *Udowodnij, że każda strategia silnie zdominowana jest strategią zdominowaną.*

Zadanie 3. *Niech A, B beda skończonymi zbiorami oraz będzie dana funkcja $u : A \times B \to \mathbb{R}$. Udowodnij*

$$\max_{a \in A} \min_{b \in B} u(a, b) \leq \min_{b \in B} \max_{a \in A} u(a, b).$$

Zadanie 4. *Niech beda dane dwie macierze A, B o dodatnich współczynnikach rzeczywistych. Niech bedzie dana gra w postaci strategicznej:*

$$\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}$$

Niech powyższa macierz ma m wierszy i n kolumn, 0 reprezentuje macierz zerową. Udowodnij, że we wspomnianej grze nie istnieje wartość gry, tzn.

$$\max_{i \leq m} \min_{j \leq n} u(i, j) \neq \min_{j \leq n} \max_{i \leq m} u(i, j).$$

Definicja 2 (Równowaga Nasha)**.** *Niech $(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ będzie strategiczną postacią gry. Załóżmy, że każdy zbiór S_i jest skończony. Powiemy, że wektor strategii $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*) \in \prod_{i \in N} S_i$ jest równowagą Nasha, jeżeli*

$$(\forall i \in N)(\forall s_i \in S_i) \; u_i(s_i, s_{-i}^*) \leq u_i(s_i^*, s_{-i}^*).$$

Zadanie 5. *Znajdź równowagę Nasha w następujących grach:*

	a	b	c	d
α	7, 3	6, 3	5, 5	4, 7
β	4, 2	5, 8	8, 6	5, 8
γ	6, 1	3, 8	3, 4	6, 9

	a	b	c	d
α	5, 2	3, 1	2, 2	4, 5
β	0, 3	2, 2	0, 1	-1, 3
γ	8, 4	7, 0	6, -1	5, 2
δ	0, 5	1, -2	2, 2	3, 4

	a	b	c	d
α	0, 0	-1, 1	1, 1	0, -1
β	1, -1	1, 0	0, 1	0, 0
γ	0, 1	-1, -1	1, 0	1, -1
δ	-1, 1	0, -1	-1, 1	0, 0
ϵ	1, 1	0, 0	-1, -1	0, 0

Definicja 3. *Niech będzie dana gra w postaci strategicznej i s_i^* bedzie wybraną strategią gracza $i \in N$. Powiemy, że s_i^* jest strategią* $\max\min$ *jeżeli:*

$$\min_{t_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i^*, t_i) = \max_{s_i \in S_i} \min_{t_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, t_{-i}).$$

Powiemy, że strategia s_i jest najlepszą odpowiedzią gracza $i \in N$ na wektor strategii pozostałych graczy $s_{-i} \in S_{-i}$ jeżeli

$$(\forall t_i \in S_i)\ u_i(t_i, s_{-i}) \leq u_i(s_i, s_{-i}).$$

Zadanie 6. *Podaj przykład gry w postaci strategicznej, w której wybrany gracz ma dwie strategie* $\max\min$.

Zadanie 7. *Udowodnij, że jeżeli strategia gracza i słabo dominuje pozostałe jego strategie, to jest ona strategią* $\max\min$. *Taka strategia jest najlepszą odpowiedzią na dowolny wektor strategii pozostałych graczy.*

Zadanie 8. *Udowodnij, jezeli w danej grze każdy gracz ma strategie, która słabo dominuje jego pozostałe strategie, to wektor strategii składający się z słabo dominujących strategii stanowi równowagę Nasha i jest wektorem strategii* $\max\min$.

Zadanie 9. *Udowodnij, jeżeli w grze każdy gracz $i \in N$ ma strategię s_i^* silnie dominująca pozostałe swoje strategie, to $(s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S$ jest jedynym wektorem, który jest równowagą Nasha i jedynym wektorem strategii* $\max\min$.

Zadanie 10. *Równowagę Nasha s^* nazywam silną, jeżeli*

$$(\forall i \in N)(\forall s_i \in S_i)\ s_i \neq s_i^* \longrightarrow u_i(s_i, s_{-i}^*) < u_i(s^*).$$

- **a):** *Udowodnij, że jeżeli w wyniku zastosowania eliminacji silnie zdominowanych strategii otrzymaliśmy jeden wektor strategii $s \in \prod_{i \in N} S_i$, to s jest silną równowagą Nasha.*
- **b):** *udowodnij, że jezeli $s^* = (s_i^*)_{i \in N}$ jest silną równowagą Nasha, to żadna ze strategii s_i^* nie może być wyeliminowana w procesie eliminacji zdominowanych i silnie zdominowanych strategii.*

Zadanie 11. *Dla każdej gry podanej poniżej, sprawdź czy po zastosowaniu eliminacji ściśle zdominowanych strategii otzrzymamy grę z jednym wektorem strategii. W takim przypadku, sprawdź czy jest to równowaga Nasha w grze wyjściowej i czy jest jedyna.*

	L	R
H	4, 2	0, 1
T	1, 1	3, 3

	L	R
H	1, 3	2, 3
T	0, 4	0, 2

	a	b	c
α	1, 0	3, 0	2,1
β	3, 1	0, 1	1, 2
γ	2, 1	1, 6	0, 2

Zadanie 12. ⋆ *Udowodnij, że jeżeli jest dany zbiór strategii powstał w wyniku zastosowania eliminacji strategii silnie zdominowanych (i proces ten jest zakończony), to ten zbiór nie zależy od wyboru kolejnosci zastosowanych eliminacji.*

Robert Ratowski