Lista 6

Elementy topologii

Zadanie 1. *Niech X, d będzie przestrzenią metryczną. Udowodnij, że*

(1) *$X, \emptyset$ są zbiorami otwartymi X,*
(2) *$U_0, U_1 \subseteq X$ są otwarte, to $U_0 \cap U_1$ też jest zbiorem otwartym w X,*
(3) *jeżeli $\mathcal{U} \subseteq \{U \in P(X) : U \text{ jest otwarty w } X\}$, to $\bigcup \mathcal{U}$ jest otwarty w X.*

Przestrzeń X, która spełnia powyższe trzy warunki nazywana jest przestrzenią topologiczną a rodzina $\{U \in P(X) : U \text{ jest otwarty w } X\}$ jest jej topologią.

Zadanie 2. *Niech X, d będzie przestrzenią metryczną. Udowodnij, że*

(1) *$X, \emptyset$ są zbiorami domkniętymi X,*
(2) *$F_0, F_1 \subseteq X$ są domknięte w X, to $F_0 \cup F_1$ też jest zbiorem domkniętym w X,*
(3) *jeżeli $\mathcal{F} \subseteq \{F \in P(X) : U \text{ jest domknięty w } X\}$, to $\bigcap \mathcal{F}$ jest domknięty w X.*

Zadanie 3. *Podaj przykład rodziny zbiorów otwartych $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ w przestrzeni X, że $\bigcap \mathcal{U}$ nie jest zbiorem otwartym w X.*

Definicja 1 (zwartość pokryciowa)**.** *Niech (X, d) będzie przestrzenią topologiczną. Powiemy, że $F \subseteq X$ jest zbiorem* **pokryciowo zwartym** *w X, jeśli dla kazdego otwartej rodziny $\mathcal{U}$ zbiorów otwartych w X takiej, że $F \subseteq \bigcup \mathcal{U}$, istnieje jej podrodzina skończona $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$, taka że $F \subseteq \mathcal{U}'$.*

Zadanie 4. *Udowodnij, że odcinek $[0, 1]$ jest pokryciowo zwarty. Wsk. dowód niewprost, przyjmując że istnieje pokrycie otwarte $\mathcal{U}$ odcinka $[0, 1]$ z którego nie mozna wybrać podpokrycie skończonego oraz $x_0 = \sup\{x \in (0, 1) : (\exists \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U})\ |\mathcal{U}'| < \infty \wedge [0, x] \subseteq \bigcup \mathcal{U}'\}$*

Zadanie 5. *Niech $F \subseteq X$ jest zbiorem zwartym w przestrzeni metrycznej X. Udowodnij, że F jest zbiorem ograniczonym i domkniętym w przestrzeni X. Wskazówski:*

(1) *wybierz pokrycie zbioru F będącym rodziną kul o promieniu jeden,*
(2) *udowodnij, że $X \setminus F$ jest zbiorem otwartym.*

Zadanie 6. *Przestrzeń topologiczna X jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej scentrowanej rodziny zbiorów domkniętych $\mathcal{F}$ zachodzi $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. $\mathcal{F}$ jest rodziną scentrowaną jeśli każda skończona niepusta podrodzina rodziny $\mathcal{F}$ ma niepuste przecięcie.*

Definicja 2 (ciągowa zwartość)**.** *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że $F \subseteq X$ jest* **zbiorem ciągowo zwartym** *w X, jeśli każdy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^N$ zawiera podciąg $(x_{k_n})(n \in \mathbb{N})$ zbieżny do pewnego $y \in F$.*

Definicja 3 (ϵ-sieć)**.** *Niech (X, d)-przestrzeń metryczna, $F \subseteq X$, $\epsilon > 0$, to $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ jest skończoną ϵ-siecią zbioru F jeśli $F \subseteq \bigcup_{k=0}^{n-1} B(x_k, \epsilon)$.*

Zadanie 7. *Udowodnij, że jeżeli $F \subseteq X$ jest ciągowo zwarty w X, to dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje skończona ϵ-sieć zbioru F.*

Zadanie 8. *Niech $\mathcal{U}$ jest otwartym pokryciem zbioru $F \subseteq X$ i F jest ciągowo zwarty w X. Udowodnij, że istnieje $\epsilon > 0$ takie, że dla każdego $x \in F$ istnieje $U \in \mathcal{U}$, dla którego $B(x,\epsilon) \subseteq U$.*

Zadanie 9. *Udowodnij, że jeżeli F jest zbiorem ciągowo zwartym w X, to F jest pokryciowo zwarty w X.*

Zadanie 10.* *Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną i $F \subseteq X$. Udowodnij, że F jest pokryciowo zwarty w X wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągowo zwarty.*

Zadanie 11. *Niech $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ są ciągowo zwarte, udowodnij że $A \times B$ jest również zwarty w $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wynik uogólnij na skończoną ilość zbiorów.*

Zadanie 12. *Udowodnij, że $[0,1]^n$ jest zbiorem zwartym w $\mathbb{R}^n$.*

Zadanie 13. *Niech $F \subseteq \mathbb{R}^2$, udowodnij, że F jest zwarty w $\mathbb{R}^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy F jest domknięty i ograniczony w $\mathbb{R}^2$. Wynik uogólnij na przypadek $\mathbb{R}^n$.*

Zadanie 14. *Podaj przykład przestrzeni metrycznej (X,d) i jej podzbioru Y takiego, że Y jest domknięty i ograniczony w X ale Y nie jest zbiorem zwartym w X.*

Zadanie 15. *Niech $\mathcal{F}$ będzie podrodziną zbiorów wypukłych w $\mathbb{R}^n$. Udowodnij, że $\bigcap \mathcal{F}$ jest zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$.*

Zadanie 16. *Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz $conv(A)$ bedzie otoczką wypukłą zbioru A zdefiniowaną następująco*

$$\bigcap \{F \subseteq \mathbb{R}^n : \ A \subseteq F \wedge A \text{ jest wypukły w } \mathbb{R}^n\}.$$

Udowodnij, że

$$conv(A) = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} t_k a_k : \ n \in \mathbb{N} \wedge \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A \wedge (t_k)_{k=1}^{n} \in [0,1]^n \wedge \sum_{k=1}^{n} = 1 \Big\}.$$

Zadanie 17. *Niech $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ będą zbiorami wypukłymi. Udowodnoj, że $A \times B$ jest zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^{m+n}$.*

Zadanie 18.* *Niech $f \in \mathbb{C}[z]$ bedzie wielomianem jednej zmiennej zespolonej stopnia wiekszego niż 1. Udowodnij, że wszystkie pierwiastki f' są w uwypukleniu wszystkich pierwiastków wielomianu f.*

Robert Rałowski