RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Lista 1   25 luty 2019.

Zadanie 1 *Niech* $\mathbb{X} = (X_1, ..., X_n)$ *będzie wektorem o macierzy kowariancji* Q *(zakładamy, że* $EX_i^2 < \infty$*).*

Pokazać, że jeśli $\underline{x} \in R^n$*, to* $Var\,\langle \underline{x}, \mathbb{X}\rangle = \langle Q\underline{x}, \underline{x}\rangle$*.*

Niech A *będzie macierzą wymiaru* $m \times n$*. Niech* $\mathbb{Y} = A\mathbb{X}$ *(w tym mnożeniu* $\mathbb{X}$ *jest macierzą jednokolumnową). Pokazać, że macierz kowariancji* $\mathbb{Y}$ *jest postaci* AQA^**. Jaki jest wymiar tej macierzy?*

Zadanie 2 *Niech* $\mathbb{X} = (X_1, ..., X_n)$ *będzie wektorem o rozkładzie normalnym niezdegenerowanym o macierzy kowariancji* Q*. Wykazać, że dla dowolnych liczb* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *zmienna* $a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n + a_0$ *ma rozkład normalny na prostej. Znaleźć jej wartość oczekiwaną i wariancję. Umowa: zmienna losowa stała p.w. też jest zmienną normalną, o wariancji* $= 0$*.*

Wsk. Uzasadnić, że rozkład $a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n + a_0$ *jest równy rozkładowi kombinacji liniowej niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym.*

Zadanie 3 *Niech* (X, Y) *ma dwuwymiarowy rozkład normalny taki, że* $EX = EY = 0$*,* $VarX = VarY = 1$*, a współczynnk korelacji równa się* $-1/2$*.*

a. *Jak wygląda gęstość wektora* (X, Y)*, a jak wektora* $(X + Y, Y)$ *?*

b. *Obliczyć* $P(X > Y + 1)$*. Wynik podać za pomocą dystrybuanty standardowgo rozkładu normalnego* Φ*.*

Zadanie 4 *Niech* $\mathbb{X} = (X_1, X_2)$ *ma dwuwymiarowy rozkład normalny niezdegenerowany (niekoniecznie standardowy).*

a) Uzasadnić, że X_1, X_2 *mają rozkłady normalne. O jakich parametrach?*

b) Pokazać, że istnieje obrót o macierzy $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ *w* $\mathbb{R}^2$ *taki, że wektor* $A\mathbb{X}$ *ma niezależne komponenty.*

c) (trudniejsza wersja (b)) Niech* $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *ma rozkład normalny niezdegenerowany w* $\mathbb{R}^n$*. Pokazac, że istnieje macierz ortogonalna A:* $detA = 1$*, oraz* $A\mathbb{X}$ *ma niezależne komponenty.*

Zadanie 5 *Niech* X_1, X_2, X_3 *będą niezależne i mają rozkład normalny o średniej zero i jednakowej wariancji.*

a) Znaleźć gęstość wektora $\mathbb{Y} = (X_1 - X_2, X_1 + X_2)$*. Czy wetor ten ma niezależne komponenty?*

b) Znaleźć gęstość wektora dwuwymiarowego $(X_1, X_1 + X_2)$ *oraz wektora trójwymiarowego* $(X_1, X_1 + X_2, X_1 + X_2 + X_3)$*.*

Zadanie 6 *Niech ciąg zmiennych losowych* X_n *będzie zbieżny p.w. do zmiennnej losowej* X*. Uzasadnić, że*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t),$$

dla każdego t*, który jest punktem ciągłości dystrybuanty granicznej* F_X*. Podać przykład pokazujący, że założenie o ciągłości jest istotne.*

Zadanie 7 *Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $EX_n = \frac{1}{n(n+1)}, Var(X_n) = \frac{1}{3^n}$. Korzystając z twierdzenia o 2. szeregach uzasadnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny p.w. Znaleźć rozkład graniczny.*

Centralne Twierdzenie Graniczne:

Niech X_n będzie ciągiem i.i.d. o wartości oczekiwanej m i wariancji σ^2. Wtedy, dla k. $t \in R$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) = \Phi(t),$$

gdzie $\Phi(t)$ jest dystrubuantą standardowego rozkładu normalnego na prostej.

Zadanie 8 *Na lot 100-miejscowym samolotem sprzedano 102 bilety (overbooking). Jakie jest prawdopodobienstwo (oszacować), że wszyscy pasażerowie, którzy zjawią sie na czas na lotnisku polecą tym samolotem. Zakładamy, że pasażerowie zjawiają się niezależnie oraz P(pasażer pojawi się na czas)=0,99. Wsk. Skorzystać z Centralnego Twierdzenia Granicznego (CTG). Czy założenie o niezależności jest realistyczne? Czy można użyc rozkładu Poissona do otrzymania odpowiedniego oszacowania?*

Zadanie 9 *Samolot zabiera bezpiecznie 12 000 kg. Zakładamy, że wagi pasażerów są niezależnymi zm. los. o jednakowych rozkładach ze średnią 65 kg i wariancją 100 kg^2. Ile maksymalnie osób może zabrać samolot, aby z pr. co najmniej 0,999 ich łaczna waga nie przekroczyła 12 000 kg? Wsk. Skorzystać z Centralnego Twierdzenia Granicznego (CTG).*