# RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Lista 3    20 marzec 2019.

**Zadanie 32** *Niech $X_n$ będzie ciągiem zmiennych losowych o rozkładach $\mu_n$ i wartościach w zbiorze liczb naturalnych. Niech $X$ ma rozkład $\mu$ skoncentrowany na zbiorze liczb naturalnych. Pokazać, że ciąg rozkładów $\mu_n$ jest słabo zbiezny do rozkładu $\mu$ $\Longleftrightarrow$*

$$lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = P(X = j)$$

*dla każdego $j$ naturalnego.*

**Zadanie 33** *Pokazać, że $\mu_n = \frac{1}{n}(\delta_{1/n} + \delta_{2/n} + \cdots + \delta_{n/n})$ jest słabo zbieżny. Znaleźć miarę graniczną.*

**Zadanie 34** *Niech ciąg miar probabilistycznych $\mu_n$ będzie słabo zbieżny do $\delta_a$. Pokazać, że odpowiadający ciąg zmiennych losowych $X_n$ jest zbieżny wg. $P$ do $X = a$.*

**Zadanie 35** *Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną miar probabilistycznych na prostej. Niech istnieją $\delta > 0, M > 0$ takie, że*

$$\int_R |x|^\delta \mu(dx) < M, \quad \mu \in \mathcal{P}.$$

*Pokazać, że $\mathcal{P}$ jest jednostajnie ciasna. Pokazać, że istnieje rodzina warunkowo zwarta dla której powyższy warunek nie jest spełniony dla żadnego $\delta > 0$.*

**Zadanie 36** *Niech $\mathcal{P} = \{Pois(\lambda), \lambda \in \Lambda\}$, $\Lambda$ jest podzbiorem półprostej dodatniej . Uzasadnić, ze $\mathcal{P}$ jest warunkowo zwarta $\Leftrightarrow$ $\Lambda$ jest zbiorem ograniczonym. $Pois(\lambda)$ jest rozkładem Poissona z parametrem $\lambda > 0$.*

**Zadanie 37** *Pokazać, że jeśli $X$ jest zmienną losową oraz $\delta, \epsilon > 0$, to*

$$E|X|^2 I_{\{|X| \geq \epsilon\}} \leq \frac{E|X|^{2+\delta}}{\epsilon^\delta}.$$

**Zadanie 38** *Pokazać, że jeśli $X_k$ są zmiennymi losowymi o wartościach oczekiwanych $m_k$ i takimi, że dla pewnego $\delta > 0$ mamy $E\,|X_k|^{2+\delta} < \infty$ oraz spełniony jest warunek (zwany* **warunkiem Lapunowa***):*

$$\lim_n \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n E\,|X_k - m_k|^{2+\delta} = 0,$$

*gdzie $s_n^2 = Var(X_1 + ... + X_n)$, to spełniony jest* **warunek Lindeberga***:*
*Dla każdego $\epsilon > 0$*

$$\lim_n \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n E|X_k - m_k|^2 I_{\{|X_k - m_k| \geq \epsilon s_n\}} = 0.$$

**Zadanie 39** *Pokazać, że ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach i skończonym drugim momencie spełnia warunek Lindeberga.*

**Zadanie 40** *Niech $U_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na $[0,n]$. Sprawdzić, czy zachodzi CTG dla tego ciągu. Tzn. wyznaczyć ciągi $a_n$ i $b_n > 0$ takie, że*

$$\frac{\sum_{k=1}^n U_k - a_n}{b_n} \Rightarrow N,$$

*gdzie $N$ ma standardowy rozkład normalny.*

*To samo pytanie dla $X_n$ - ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie zadanym przez funkcję charakterystyczną $\phi_{X_n}(t) = \cos\sqrt{n}t$.*

**Zadanie 41** *Niech $U_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $P(U_n = \pm 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$, $P(U_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}$. Sprawdź, czy zachodzi CTG dla tego ciągu. Czy zachodzi warunek Lindeberga w tym przypadku?*

**Zadanie 42** *Niech $X$ będzie zmienna losową spełniającą warunki:*

*a) $EX^2 < \infty$.*

*b) Jeżeli $Y, Z$ są niezależne o tym samym rozkładzie co $X$, to $\frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$ ma ten sam rozkład co $X$.*

*Pokazać, że $X$ ma rozkład normalny o średniej 0. Wsk. Pokazać, że jeśli $X_1, X_2, \ldots$ niezależne o rozkładzie $X$, to*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_{2^n}}{\sqrt{2^n}}$$

*ma ten sam rozkład co $X$. Aby się o tym przekonać, wykazać to najpierw dla $n = 2$.*

**Zadanie 43** *Pokazać, że $f(t) = e^{-C|t|^\alpha}$, $C > 0$ i $\alpha > 2$, nie jest funkcją charakterystyczną rozkładu probabilistycznego. Wsk. Obliczyć $f''(0)$.*

**Zadanie 44** ** Aby uzasadnić, że $f(t) = e^{-|t|^\alpha}$, gdzie $0 < \alpha < 2$, jest funkcją charakterystyczną rozkładu probabilistycznego pokazać, że $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n^{1/\alpha}}$ jest zbieżny wg. rozkładu, gdzie $X_k$ jest ciągiem i.i.d. o rozkładzie symetrycznym i $P(|X_1| > t) = 1/t^\alpha, t \geq 1$. Wsk. Pokazać, że funkcja charakterystyczna $X_1$ spełnia*

$$\phi_{X_1}(t) = 1 - c|t|^\alpha + o(|t|^\alpha), t \in R,$$

*gdzie $c > 0$ jest pewną stałą. Następnie zbadać zbieżność ciągu funkcji charakterystycznych zmiennych $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n^{1/\alpha}}$.*