RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Lista 7   26 maja 2019.

Zadanie 81 *Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie normalnym o średniej 0 i wariancji σ^2. Niech $c > 0$. Obliczyć $EX^{(c)}$ oraz $Var(X^{(c)})$. Wynik dla wariancji przedstawić za pomocą Φ, dystrybuanty standardowej normalnej.*

Zadanie 82 *Niech $c > 0$. Pokazać, że jeśli X_n będzie ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie normalnym o średniej 0 i wariancjach σ_n^2, to szereg $\sum Var(X_n^{(c)})$ jest zbieżny $\iff \sum \sigma_n^2 < \infty$.*
****

Niestety powyższy fakt nie jest prawdziwy bez dodania pewnego założenia. Poniżej podaję przykład, a następnie dowód tego faktu przy odpowiednich założeniach.

Obliczyliśmy na ćwiczeniach, że dla X - zmienną losową o rozkładzie normalnym o średniej 0 i wariancji σ^2 mamy

$$Var(X^{(c)}) = \sigma^2 \left(\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sigma}\right) - 2\frac{c}{\sigma} g\left(\frac{c}{\sigma}\right)\right) \tag{1}$$

$$= \sigma^2 \left(2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1 - 2\frac{c}{\sigma} g\left(\frac{c}{\sigma}\right)\right), \tag{2}$$

gdzie Φ jest standardową dystrybuantą normalną a g standardową gęstością normalną. Wiemy, że zachodzi związek

$$\Phi' = g,$$

który skutkuje tym, że (rachunki zostawiam Państwu - zastosować regułę H)

$$\lim_{v \to 0^+} \frac{2\Phi(v) - 1 - 2vg(v)}{v^3} = c^* = \frac{1}{3} g(0) > 0$$

Zatem jeśli $\sigma \to \infty$, to z (2) i powyższej granicy dostajemy:

$$Var(X^{(c)}) = \sigma^2 \left(2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1 - 2\frac{c}{\sigma} g\left(\frac{c}{\sigma}\right)\right)$$
$$\approx \frac{1}{\sigma} c^3 c^*$$

Jezeli weźmiemy teraz X_n takie, że $\sigma_n = n^2$, to

$$Var(X_n^{(c)}) \approx \frac{1}{n^2} c^3 c^*$$

i szereg $\sum Var(X_n^{(c)}) < \infty$, ale szerg $\sum \sigma_n^2 = \infty$.

Uwaga

Prawdziwy jest natomiast taki fakt:

Założymy, że ciąg σ_n^2 jest ograniczony. Jeśli X_n będzie ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie normalnym o średniej 0 i wariancjach σ_n^2, to szereg $\sum Var(X_n^{(c)})$ jest zbieżny $\iff \sum \sigma_n^2 < \infty$.

Nietrywialne jest wynikanie $\Longrightarrow$. To w zasadzie zrobiliśmy na ćwiczeniach, ale podaję jeszcze raz szkic rachunków. Jeżeli σ_n^2 jest ograniczony, to $\inf_n \left\{\frac{c}{\sigma_n}\right\} = m > 0$. Korzystając z tego, że funkcja $h(v) = 2\Phi(v) - 1 - 2vg(v)$ jest ściśle rosnąca na $[0, \infty)$ mamy:

$$
\begin{aligned}
Var(X_n^{(c)}) &= \sigma_n^2 \left(2\Phi\left(\frac{c}{\sigma_n}\right) - 1 - 2\frac{c}{\sigma} g\left(\frac{c}{\sigma_n}\right)\right) \\
&\geq \sigma_n^2 \left(2\Phi(m) - 1 - 2mg(m)\right)
\end{aligned}
$$

Zatem zbieżność szeregu $\sum Var(X_n^{(c)})$ implikuje zbieżność szeregu $\sum \sigma_n^2$ na mocy kryterium porównawczego, bo

$$
2\Phi(m) - 1 - 2mg(m) > 0,
$$

co wynika z monotoniczności funkcji h.

W tym momencie możemy zająć się zadaniem 89.

Na początek załóżmy, że X_n ma zerową wartość oczekiwaną i szereg $\sum X_n$ jest zbieżny. Wtedy z twierdzenia o 3 szeregach

$$
\sum P(|X_n| \geq c) < \infty.
$$

Wynika stąd, że $\sigma_n \to 0$ (X_n ma ten sam rozkład co $\sigma_n Z$, a Z jest standardowy normalny), zatem ciąg σ_n^2 jest ograniczony. Dalej ze zbieżności $\sum X_n$ wynika, że szereg wariancji dla obciętych składników jest zbieżny, a to implikuje, że $\sum \sigma_n^2 < \infty$ na mocy prawidłowej wersji zadania 82.

Teraz załóżmy, że średnie X_n nie muszą być zerowe. Stosujemy argument symetryzacyjny: niech X_n' będą niezależnymi kopiami X_n i zmienne $X_n, X_n', n = 1, \ldots$ są niezależne. Wtedy szereg $\sum X_n'$ jest też zbieżny, zatem szereg $\sum X_n' - X_n$ jest zbieżny i ponieważ jego komponenty są normalne o średniej 0 i wariancji $2\sigma_n^2$, ze zbieżności szeregu $\sum X_n' - X_n$ dostajemy zbieżność szeregu $\sum \sigma_n^2$. Stąd wynika zbieżność szeregu $\sum X_n - EX_n$ na mocy tw. o 2. szeregach. Ponieważ z założenia szereg $\sum X_n$ jest zbieżny, to musi być zbieżny szereg EX_n. Pokazaliśmy zatem następujący fakt:

Jeżeli szereg $\sum X_n$ jest zbieżny, to szeregi $\sum EX_n$ i $\sum Var(X_n)$ są zbieżne.

Na odwrót: ze zbieżności szeregów $\sum EX_n$ i $\sum Var(X_n)$ oczywiście wynika zbieżność szeregu $\sum X_n$ na mocy tw. o 2. szeregach.

Zadanie 83 *Niech ϵ_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wyznaczonym przez funkcję charakterystyczną $\phi(t) = \cos t$, zaś a_n ciągiem liczbowym. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$ jest zbieżny z P.1 $\Leftrightarrow$ szereg $\sum_n^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny.*

Zadanie 84 ** Pokazać, że jeśli $X_1, ..., X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, to istnieje $0 \leq r \leq \infty$ takie, że szereg (potęgowy) $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega)(z-p)^n$ jest z prawdopodobieństwem 1 zbieżny w kole $|z-p| < r$ i rozbieżny dla $|z-p| > r$.*

Zadanie 85 *Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na $[-1, 2]$. Dla jakich $\theta \in R$ szereg $\sum n^{-\theta} X_n$ jest zbieżny z pr. 1.*

To samo zadanie, jeśli X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na $[-1, 1]$.

Zadanie 86 *Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie: $P(X_n = n) = n^{-3} = P(X_n = -n)$ oraz $P(X_n = 0) = 1 - 2n^{-3}$. Pokazać, że szereg $\sum X_n$ jest zbieżny z pr. 1, ale $\sum Var(X_n) = \infty$.*

Zadanie 87 *Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych tym samym o rozkładzie. Pokazać, że szereg $\sum_n X_n$ jest zbieżny z pr. 1 $\Longleftrightarrow P(X_1 = 0) = 1$.*

Zadanie 88 *Niech X_n będzie nieujemnym ciągiem niezależnych zmiennych losowych . Pokazać, że jeśli $\sum EX_n < \infty$, to $\sum_n X_n$ jest zbieżny. Czy niezależność jest tutaj konieczna?*

Zadanie 89 *Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne zbieżności szeregu $\sum X_n$ w terminach zachowania się ciągu wariancji i wartosci oczekiwanych zmiennych X_n. Wsk. zad 82.*

Zadanie 90 *Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie symetrycznym. Niech*

$$\lim_{t\to\infty} tP(X_n \geq t) = 1.$$

Niech a_n bedzie ciagiem liczbowym. Uzsadnić, że szereg losowy $\sum a_n X_n$ jest zbieżny $\Longleftrightarrow \sum |a_n| < \infty$. Wsk. Pokaząć, że istnieje stała $K > 0$ taka, że dla $c > 1$

$$Var(X_1^{(c)}) \leq Kc.$$

Łatwiejsza wersja*: Założyć, że X_1 ma rozkład Cauchy'ego.*

****

$$Var(X_1^{(c)}) = E\left[(X_1^{(c)})^2\right] = \int_0^\infty 2tP(|X_1^{(c)}| \geq t)dt.$$

Oczywiste jest, że $P(|X_1^{(c)}| \geq t) = 0$ dla $t \geq c$ oraz $P(|X_1^{(c)}| \geq t) \leq P(|X_1| \geq t)$. Mamy więc

$$Var(X_1^{(c)}) \leq \int_0^c 2tP(|X_1| \geq t)dt.$$

Warunek $\lim_{t\to\infty} tP(X_1 \geq t) = 1$ oraz symetria implikuje, że istnieje stała $K > 0$:

$$2tP(|X_1| \geq t) \leq K, \quad t > 0,$$

zatem dla $c > 0$

$$Var(X_1^{(c)}) \leq \int_0^c 2tP(|X_1| \geq t)dt \leq Kc.$$

Stąd

$$Var((a_nX_n)^{(c)}) = a_n^2 Var\left(X_1^{(\frac{c}{|a_n|})}\right) \leq Kc|a_n|.$$

Zatem, ze zbieżności $\sum |a_n| < \infty$ wynika zbieżność szeregu $\sum Var((a_nX_n)^{(c)})$. Zbieżność $\sum P(|a_nX_n| \geq c)$ jest oczywista, bo $P(|a_nX_n| \geq c) \approx 2|a_n|/c, n \to \infty$. Pokazaliśmy, że ze zbieżności $\sum |a_n| < \infty$ wynika zbieżność szeregu $\sum a_nX_n$.

Na odwrót, jeżeli szereg $\sum a_nX_n$ jest zbieżny, to $\sum P(|a_nX_n| \geq c)$ jest zbieżny i $|a_n| \to 0$. Wtedy $P(|a_nX_n| \geq c) \approx 2|a_n|/c$, $n \to \infty$, więc ze zbieżności $\sum P(|a_nX_n| \geq c) < \infty$ wynika zbieżność $\sum |a_n|$.