RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Lista 8 9 czerwiec 2019.

Zadanie 91 *Niech X_i bedzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o średniej 0 i skończonych wariancjach. Niech $S_n = \sum_1^n X_i$. Niech zdarzenie $A_k \in \sigma(X_1, \ldots, X_k)$, gdzie $\sigma(X_1, \ldots, X_k)$ jest sigma ciałem generowanym przez zmienne $X_1, \ldots, X_k$. Uzasadnić nierówność:*

$$E\left[(S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k}\right] \leq Var(S_n)P(A_k), \quad k \leq n.$$

Zadanie 92 *Czy rozkład Cauchy'ego jest nieskończnie podzielny?*

Zadanie 93 *Pokazać, że suma niezależnych zmiennych losowych mających (niekoniecznie takie same) rozkłady nieskończenie podzielne ma rozkład nieskończenie podzielny.*

Zadanie 94 *Rozkładem Gamma z parametrami α, β nazywamy rozkład o gęstości*

$$g_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & dla\ x > 0 \\ 0 & dla\ x \leq 0 \end{cases}$$

Wiadomo, że dla $\alpha_1, \alpha_2, \beta > 0$

$$g_{\alpha_1,\beta} * g_{\alpha_2,\beta} = g_{\alpha_1+\alpha_2,\beta}.$$

Wywnioskować stąd, że rozkład ten jest nieskończenie podzielny. Uwaga: wystarczy rozważyć przypadek $\beta = 1$. Czy rozkład wykładniczy jest nieskończenie podzielny?

Można pokazać, że funkcja charakterystyczna tego rozkładu wyraża się wzorem:

$$\phi(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^\alpha.$$

Zadanie 95 *Sprawdź, czy następujące rozkłady o zadanych funkcjach charakterystycznych są nieskończenie podzielne:*

$$\frac{\beta}{\beta - it}, \quad \frac{1}{1+t^2}, \quad e^{-t^2}\cos t, \quad \frac{1}{1+t^{1/2}}.$$

Zadanie 96 *Rozkład μ nazywamy* **stabilnym** *jeśli dla niezależnych zmiennych losowych X, Y o jednakowym rozkładzie μ i dla dowolnych $a, b \geq 0$ istnieją $c \geq 0, d \in R$:*

$$aX + bY \stackrel{d}{=} cX + d.$$

Pokazać, że rozkład stabilny jest nieskończenie podzielny. Uwaga: Można pokazać, że rozkłady stabilne są to rozkłady graniczne ciągów postaci $\frac{\sum_{1 \leq i \leq n} X_i - a_n}{b_n}$, gdzie a_n i b_n są ciągami rzeczywistymi, a $X_i, i \geq 1$ jest ciągiem i.i.d.

Zadanie 97 *Rozkład stabilny μ nazywamy ściśle stabilnym jeżeli $d = 0$ w równości z zadania poprzedniego. Pokazać, że symetryczny rozkład stabilny jest ściśle stabilny.*

Zadanie 98 *Czy rozkłady o funkcji charakterystycznej $\phi(t) = e^{-|t|^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 2$ są stabilne? ścisle stabilne?*

Zadanie 99 * *(dla chętnych) Niech ν będzie skończoną miarą nieujemną borelowską na R. Na wykładzie zdefiniowaliśmy $Pois(\nu)$ - złożony rozkład Poissona generowany przez ν, jako miarę probabilistyczną o funkcji charakterystycznej*

$$\psi(t) = e^{\int_R (e^{itx}-1)\nu(dx)}.$$

a) Pokazać, że $Pois(\nu) = e^{-\nu(R)} \sum_{k\geq 0} \frac{\nu^{*k}}{k!}$, czyli wykazać, że miara zdefiniowana przez szereg po prawej stronie równości jest miarą probabilistyczną o funkcji charakterystycznej ψ.

Uwaga. *Splot dla miar skończonych definiujemy identycznie jak dla miar probabilistycznych.*

b) Pokazać, że $Pois(\nu_1) * Pois(\nu_2) = Pois(\nu_1 + \nu_2)$, ν_1, ν_2 - miary skończone. Wywnioskować stąd, że miara $Pois(\nu)$ jest nieskończenie podzielna. Wsk. Rozważyć odpowiednie funkcje charakterystyczne.

c) Pokazać, że $Pois(\nu)$ ma drugi moment iff $\int_R |x|^2\nu(dx) < \infty$. (Rozważyć najpierw przypadek miary symetrycznej ν.

Zadanie 100 *Pokazać, że rozkład μ nie będący rozkładem zdegenerowanym o własności $\mu((-A, A)^c) = 0$ dla pewnego $A > 0$ nie jest nieskończenie podzielny. Wsk. Pokazać, że jeżeli $\mu_k^{*k} = \mu$, to nośnik miary μ_k zawiera się w $[-A/k, A/k]$. Używając tego faktu oszacować wariancję miary μ.*

****

Na wykładzie podano twierdzenie Lévy'ego -Chinczyna: ψ jest funkcją charakterystyczną rozkładu nieskończenie podzielnego wtedy i tylko wtedy gdy jest postaci

$$\psi(t) = e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}} e^{ita} e^{\int_R (e^{itx}-1-itxI_{\{|x|<1\}})\nu(dx)},$$

gdzie $\sigma \geq 0$, $a \in R$, a ν jest nieujemną miarą na R o własności $\int_R min\{1, x^2\}\nu(dx) < \infty$. Miara ν nazywa się miarą Lévy'ego rozkładu nieskończenie podzielnego.

Zadanie 101 *Które z poniższych miar absolutnie ciagłych są miarami Lévy'ego:*

$$\nu(dx) = \frac{1}{|x|^3}dx; \quad \nu(dx) = \frac{1}{|x|}dx; \quad \nu(dx) = \frac{e^x}{|x|}dx, x < 0 \text{ oraz } \nu(R^+) = 0.$$

A które z poniższych miar dyskretnych są miarami Lévy'ego:

$$\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{10/k}; \quad \nu = \sum_{k=1}^{\infty} k\delta_{1/k}$$

Zadanie 102 *Znaleźć miarę Lévy'ego rozkładu wykładniczego μ z parametrem $\lambda > 0$. Wsk. Zastosować zadanie 94 do znalezienia n-tego pierwiastka z miary μ czyli miary $\mu_n : \mu_n^{*n} = \mu$. Oznaczając ten pierwiastek (miarę) przez μ_n znaleźć graniczną postać funkcji charakterystycznej miary $Pois(n\mu_n)$.*