1 Przestrzenie liniowe

Definicja

Przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ nazywamy dowolny niepusty zbiór V, na którym określone są binarne działanie dodawania wektorów $+$ i unarne działania mnożenia wektorów przez skalary $t \in \mathbb{R}$, które spełniają aksjomaty L1-L8 dla wszystkich $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in V$ oraz $r, s \in \mathbb{R}$.

L1. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ (przemienność)

L2. $\mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u}$ (łączność)

L3. Istnieje element $\mathbf{0} \in V$ (zwany wektorem zerowym) taki, że dla wszystkich $\mathbf{v} \in V$ mamy $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$.

L4. Dla każdego $\mathbf{v} \in V$ istnieje $\mathbf{v}' \in V$ taki, że $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{v}' + \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

L5. $r(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = r\mathbf{v} + r\mathbf{w}$

L6. $(r + s)\mathbf{v} = r\mathbf{v} + s\mathbf{v}$

L7. $r(s\mathbf{v}) = (rs)\mathbf{v}$

L8. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Elementy przestrzeni liniowej V nazywamy wektorami.

Definicja

Niepusty podzbiór W przestrzeni liniowej V nazywamy podprzestrzenią (liniową) przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące warunki.

(1) Dla wszystkich $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W, \mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$ (zamkniętość względem dodawania wektorów).

(2) Dla wszystkich $\mathbf{v} \in W$ i $t \in \mathbb{R}, t\mathbf{v} \in W$ (zamkniętość względem mnożenia przez skalary).

Definicja

Kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ nazywamy dowolny wektor postaci $t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n$, gdzie $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$.

Definicja

Dla niepustego zbioru $A \subset V$ zbiór wszystkich liniowych kombinacji wektorów z A oznaczamy przez $\mathrm{lin}(A)$, tzn.

$$\mathrm{lin}(A) = \{\sum_{i=1}^{n} t_i\mathbf{v}_i : t_i \in \mathbb{R}, \mathbf{v}_i \in A, n \in N\}.$$

Dla $A = \emptyset$ przyjmujemy $\mathrm{lin}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$, tzn. traktujemy wektor $\mathbf{0}$ jako kombinację liniową 0 wektorów. Zbiór $\mathrm{lin}(A)$ nazywamy liniowym domknięciem (linearyzacją) zbioru A.

Twierdzenie
$\mathrm{lin}(A)$ jest najmniejszą podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą zbiór A (dlatego nazywamy ją podprzestrzenią V generowaną przez A).

2 Liniowa niezależność

Definicja
Wektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich jest liniową kombinacją pozostałych. W przeciwnym razie mówimy, że wektory te są liniowo niezależne.

Przyjmujemy też, że układ złożony z jednego wektora zerowego $\mathbf{0}$ jest liniowo zależny (gdyż $\mathbf{0}$ jest kombinacją liniową 0 wektorów).

Przyjmujemy, że układ 0 wektorów jest liniowo niezależny.

Przykłady
1. Wektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ leżą na pewnej płaszczyźnie przechodzącej przez $\mathbf{0}$.
2. Dla wektora $\mathbf{v} \in V$ układ wektorów $\mathbf{v}, \mathbf{v}$ jest liniowo zależny. Wektory $\mathbf{0}, \mathbf{v}$ są liniowo zależne (bo $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}$ jest liniową kombinacją wektora $\mathbf{v}$).
3. Jedynym liniowo zależnym wektorem $\mathbf{v} \in V$ jest wektor zerowy $\mathbf{0}$.

Fakt
Wektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ są liniowo niezależne $\iff$

$$(*) \qquad (\forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R})(t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0)$$

Przykłady
1. Wektory bazowe $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ są liniowo niezależne. By się o tym przekonać, sprawdzamy warunek $(*)$ z faktu. Przypuśćmy, że dla pewnych $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}, t_1\mathbf{e}_1 + \cdots + t_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$. Wektor $t_1\mathbf{e}_1 + \cdots + t_n\mathbf{e}_n$ jest równy po prostu wektorowi

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}.$$

Zatem wszystkie skalary $t_1, \dots, t_n$ są równe 0.

2. Podobnie sprawdzamy, że w przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]$ wektory $1, x, x^2, \dots, x^n$ są liniowo niezależne.

Definicja (liniowej niezależności dla dowolnego zbioru wektorów w przestrzeni V.)

Załóżmy, że $A \subset V$.

1) Zbiór A jest liniowo niezależny $\iff$ żaden wektor $\mathbf{v} \in A$ nie jest liniową kombinacją wektorów ze zbioru $A \setminus \{\mathbf{v}\}$.

2) Zbiór A generuje V $\iff$ każdy wektor $\mathbf{v} \in V$ jest liniową kombinacją wektorów z A (tzn. $\mathrm{lin}(A) = V$). Mówimy też wtedy, że A jest zbiorem generatorów przestrzeni V.

3) Ogólniej, dla podprzestrzeni $W \subset V$ mówimy, że A generuje W $\iff$ $\mathrm{lin}(A) = W$.

4) A jest bazą przestrzeni V $\iff$ A jest liniowo niezależny i generuje V. W szczególności cała przestrzeń V generuje V.

Przykłady .

1. Gdy V jest przestrzenią zerową, to zbiór $A = \emptyset$ generuje V (bo $\mathrm{lin}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$) i jest liniowo niezależny, więc zbiór pusty jest bazą V.

2. Wektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in R^n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Ich liniowa niezależność była pokazana powyżej. Jasne jest też, że generują one $\mathbb{R}^n$.

3. Dowolny układ 3 liniowo niezależnych wektorów w $\mathbb{R}^3$ jest bazą $\mathbb{R}^3$. W istocie, przypuśćmy, że $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne. Wówczas $\mathbb{R}^3 = \{t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + t_3\mathbf{x}_3 : t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$, więc wektory te generują $\mathbb{R}^3$. Podobnie pokazujemy, że każda para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ wektorów liniowo niezależnych jest bazą $\mathbb{R}^2$.

4. Zbiór $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ jest nieskończoną bazą przestrzeni $\mathbb{R}[x]$. Istotnie, sprawdzenie liniowej niezależności jest łatwe. By pokazać, że wektory te generują całą przestrzeń $\mathbb{R}[X]$ rozważmy dowolny wielomian $W(X) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ o wyrazach rzeczywistych. Wówczas

$$W = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_k \cdot x^k,$$

tzn. W jest liniową kombinacją wektorów $1, x, x^2, \ldots, x^k$ ze skalarnymi współczynnikami $a_0, a_1, \ldots, a_k$.

5. Czy wektory $1 + x + x^2$, $2 + x$, $x + 2x^2 \in \mathbb{R}[x]$ są liniowo zależne? By odpowiedzieć na to pytanie, stosujemy kryterium z faktu. Na mocy tego kryterium wektory te są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ (nie wszystkich $= 0$) mamy

(a) $t_1(1 + x + x^2) + t_2(2 + x) + t_3(x + 2x^2) = 0$. (a) jest równoważne temu, że wielomian

$$(t_1 + 2t_2) + (t_1 + t_2 + t_3)x + (t_1 + 2t_3)x^2$$

jest zerowy, to znaczy mamy

$$\begin{cases} t_1 & + & 2t_2 & & & = & 0 \\ t_1 & + & t_2 & + & t_3 & = & 0 \\ t_1 & + & & & 2t_3 & = & 0 \end{cases}$$

Powyższy układ równań ma niezerowe rozwiązanie, np. $t_1 = 2$, $t_2 = t_3 = -1$, zatem wektory $1 + x + x^2$, $2 + x$, $x + 2x^2$ są liniowo zależne.

W powyższych przykładach wskazaliśmy bazy niektórych przestrzeni liniowych. Okazuje się, że każda przestrzeń liniowa ma bazę.

Twierdzenie (o istnieniu bazy)

1) Każdy zbiór liniowo niezależny $A \subset V$ można rozszerzyć do bazy przestrzeni V.

2) Każdy zbiór generatorów przestrzeni V zawiera bazę.

Wniosek

Każda przestrzeń liniowa ma bazę.

Znaczenie pojęcia bazy wynika z następującego twierdzenia Steinitza.

Twierdzenie

Każde dwie bazy przestrzeni V są równoliczne.

Definicja

Liczbę elementów dowolnej bazy przestrzeni V nazywamy wymiarem przestrzeni V. Wymiar V oznaczamy przez $\dim(V)$. W przypadku, gdy liczba ta jest nieskończona, możemy napisać $\dim(V) = \infty$.

Przykłady

1. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. Istotnie, bazą jest tu zbiór n-elementowy $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, zwany bazą standardową przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Bazę tę oznaczamy symbolem $\mathcal{E}$. W szczególności $\dim(\mathbb{R}) = \dim(\mathbb{R}^1) = 1$, bazą $\mathbb{R}$ jest dowolna liczba niezerowa.

2. $\dim(\mathbb{R}[x]) = \infty$. Bazą standardową jest tu zbiór wektorów $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$.

3. Przestrzeń liniowa ma zazwyczaj wiele baz.

W poniższej uwadze wyliczamy podstawowe własności wymiaru.

Uwaga

Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami V.

1) $\dim(V_1) \leqslant \dim(V)$.

2) $\dim(V_1) = \dim(V) < \infty \Rightarrow V_1 = V$.

3) (modularność) $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$.

3 Bazy i przekształcenia liniowe

Każdy wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ jest kolumną składającą się ze współrzędnych $x_1, \ldots x_n$ wektora $\mathbf{x}$. Współrzędne te spełniają równość

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n,$$

w której występują wektory standardowej bazy $\mathbb{R}^n$. W podobny sposób możemy zdefiniować współrzędne dowolnego wektora przestrzeni liniowej V względem ustalonej bazy $\mathcal{B}$ tej przestrzeni. Mówi o tym poniższa uwaga.

Uwaga

Załóżmy, że $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ jest bazą przestrzeni V. Wówczas dla każdego wektora $\mathbf{v} \in V$ istnieje dokładnie jeden ciąg $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ taki, że

$$(*) \qquad \mathbf{v} = t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2 + \cdots + t_n\mathbf{b}_n.$$

Ciąg ten nazywamy ciągiem współrzędnych wektora $\mathbf{v}$ w bazie $\mathcal{B}$. Piszemy wówczas

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}.$$

Czasami dla wygody zapisujemy $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ w postaci wiersza zamiast kolumny.

Przykład

Rozważmy bazę standardową $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, to znaczy

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

również $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. Widzimy więc, że $x_1, \ldots, x_n$ to współrzędne wektora $\mathbf{x}$ w bazie $\mathcal{E}$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

W definicji układu współrzędnych wektora $\mathbf{v} \in V$ w bazie $\mathcal{B}$ istotna jest numeracja $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ (uporządkowanie) wektorów bazy $\mathcal{B}$. Istotnie, rozważmy standardową bazę $\mathbb{R}^n$ ze zmienioną kolejnością wektorów, np. niech $\mathcal{E}' = \{\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n-1}, \ldots, \mathbf{e}_1\}$. Wówczas

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Załóżmy, że V, W są dwiema przestrzeniami liniowymi nad $\mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja $F \colon V \to W$ jest izomorfizmem liniowym, gdy spełnione są następujące warunki.

1) F jest 1–1 i "na" (tzn. F jest bijekcją).

2) $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, F(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = F(\mathbf{v}_1) + F(\mathbf{v}_2)$.

3) $\forall t \in \mathbb{R} \forall \mathbf{v} \in V, F(t\mathbf{v}) = tF(\mathbf{v})$.

Gdy taki izomorfizm istnieje, mówimy, że V i W są izomorficzne (symbolicznie $V \cong W$).

Twierdzenie (o izomorfizmie liniowym)

Jeśli $\dim(V) = n$, to istnieje izomorfizm liniowy $F \colon V \to \mathbb{R}^n$.

Wniosek
Przestrzenie tego samego wymiaru są izomorficzne.

Przykład
Niech
$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Wektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ są liniowo niezależne oraz $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, więc zbiór $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ jest bazą $\mathbb{R}^3$.
Niech
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Współrzędne $\mathbf{u}$ w bazie standardowej to
$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Znajdziemy współrzędne $\mathbf{u}$ w bazie $\mathcal{B}$. Są to jedyne liczby t_1, t_2, t_3 takie, że
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2 + t_3\mathbf{b}_3 = t_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_2 + t_3 \\ t_1 + t_2 \\ t_1 + t_3 \end{bmatrix}.$$

Zatem liczby t_1, t_2, t_3 spełniają równości
$$\left\{ \begin{array}{ccccc} t_2 & + & t_3 & = & 1 \\ t_1 & + & t_2 & = & 1 \\ t_1 & + & t_3 & = & 1 \end{array} \right. ,$$

skąd dostajemy $t_1 = t_2 = t_3 = \dfrac{1}{2}$. Zatem
$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy też, że wektor $\mathbf{u}$ ma również te same współrzędne w innej bazie

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Definicja

$F\colon V \to W$ jest przekształceniem liniowym, gdy zachodzą następujące warunki.

1) (addytywność) $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, F(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = F(\mathbf{v}_1) + F(\mathbf{v}_2)$.

2) (jednorodność) $\forall t \in R \forall v \in V, F(t\mathbf{v}) = tF(\mathbf{v})$.

Warunki te pojawiły się już w definicji izomorfizmu przestrzeni liniowych. Izomorfizm liniowy jest to więc przekształcenie liniowe, które dodatkowo jest bijekcją, to znaczy jest odwracalne.

Przykłady przekształceń liniowych.

1. Przekształcenie zerowe $\mathbf{0}\colon V \to W$ dane wzorem $\mathbf{0}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$. Przekształcenie identycznościowe $\mathrm{id}\colon V \to V$ dane wzorem $\mathrm{id}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

2. Dylatacja $D_t\colon V \to V$ o skali $t \in \mathbb{R}$, dana wzorem $D_t(\mathbf{v}) = t\mathbf{v}$.

3. Niech $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}$. Wówczas przekształcenie $F\colon C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^k$ dane wzorem $F(f) = (f(\mathbf{a}_1), \dots, f(\mathbf{a}_k))$ jest liniowe.

4. Przekształcenie $F\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ dane wzorem $F(W) = W'$, gdzie W' to pochodna wielomianu W.

5. Szczególnym przypadkiem są przekształcenia liniowe $F\colon V \to \mathbb{R}$. ($\mathbb{R}$ jest jednowymiarową przestrzenią liniową.) Przekształcenia takie nazywamy funkcjonałami liniowymi. Przekształcenie z przykładu 3 jest funkcjonałem liniowym dla $k = 1$. Inny przykład to przekształcenie $G\colon C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dane wzorem $G(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$

Załóżmy teraz, że $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ i $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m\}$ są bazami przestrzeni V i W odpowiednio. Niech $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ będzie dowolną macierzą wymiaru $m \times n$. Definiujemy wówczas przekształcenie $F\colon V \to W$ wzorem

$$(**) \qquad F(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \iff A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}.$$

Łatwo sprawdzić, że tak zdefiniowane przekształcenie jest liniowe. Okazuje się, że wszystkie przekształcenia liniowe $V \to W$ powstają w ten sposób.

Twierdzenie

$F\colon V \to W$ jest liniowe $\iff$ dla pewnej macierzy A wymiaru $m \times n$ zachodzi $(**)$.

Macierz A z twierdzenia nazywamy macierzą przekształcenia F w bazach $\mathcal{B}, \mathcal{C}$. Macierz tę oznaczamy przez $A = m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(F)$. Zauważmy, że kolumny macierzy $m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(F)$ są to układy współrzędnych w bazie $\mathcal{C}$ obrazów względem F kolejnych wektorów bazy $\mathcal{B}$. W przypadku, gdy $F\colon V \to V$, piszemy $m_{\mathcal{B}}(F)$ zamiast $m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F)$. Macierz $m_{\mathcal{B}}(F)$ nazywamy macierzą przekształcenia F w bazie $\mathcal{B}$.

Przykłady

1. Dla przekształcenia $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zdefiniowanego wzorem $(*)$ macierz A występująca w tym wzorze jest macierzą przekształcenia F w bazach standardowych $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{E}' \subset \mathbb{R}^m$. Możemy więc napisać $A = m_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(F)$. W przypadku baz standardowych opuszczamy zazwyczaj indeksy $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ pisząc $A = m(F)$.

2. Określamy przekształcenie liniowe $F\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ wzorem $F(W) = W' + W(0)$. Rozważmy bazy $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}, \mathcal{C} = \{x^3, x^2, x, 1\}$ przestrzeni $\mathbb{R}_3[X]$. Znajdziemy macierz $m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(F)$. W tym celu obliczamy współrzędne w bazie $\mathcal{C}$ obrazów wektorów bazy $\mathcal{B}$ względem F.

$$F(1) = 1, F(x) = 1, F(x^2) = 2x, F(x^3) = 3x^2.$$

Zatem

$$[F(1)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad [F(x)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[F(x^2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [F(x^3)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dlatego

$$m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(F) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Znając macierz przekształcenia $F\colon V \to W$ w danych bazach możemy łatwo obliczać obrazy wektorów względem F.

Mnożenie macierzy jest ściśle związane ze składaniem przekształceń liniowych $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Podobny związek występuje ze składaniem przekształceń liniowych abstrakcyjnych przestrzeni liniowych.

Załóżmy, że V, W, U są przestrzeniami liniowymi o skończonych bazach $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ odpowiednio. Załóżmy, że $F\colon V \to W$, $G\colon W \to U$ są liniowe oraz

$$H = G \circ F\colon V \to U$$

jest złożeniem F i G.

Wtedy przekształcenie H jest liniowe. Następujące twierdzenie wyjaśnia związek między macierzami przekształceń F, G i H.

Twierdzenie
$m_{\mathcal{B}\mathcal{D}}(H) = m_{\mathcal{C}\mathcal{D}}(G) \cdot m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(F)$.

4 Przekształcenia liniowe i macierze

Z przekształceniem liniowym $F\colon V \to W$ wiążemy dwie ważne podprzestrzenie.

Definicja

$$\mathrm{Ker}(F) = \{\mathbf{v} \in V : F(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}, \quad \mathrm{Im}(F) = \{\mathbf{w} \in W : \exists \mathbf{v} \in V, F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$$

Zbiór $\mathrm{Ker}(F)$ nazywamy jądrem przekształcenia F, zaś zbiór $\mathrm{Im}(F)$ obrazem F.

Fakt
1) $\mathrm{Ker}(F)$ jest podprzestrzenią V.
2) $\mathrm{Im}(F)$ jest podprzestrzenią W.

Twierdzenie
F jest 1–1 $\iff$ $\mathrm{Ker}(F) = \{\mathbf{0}\}$

Dla przekształcenia liniowego $F\colon V \to W$, wymiary przestrzeni V, $\mathrm{Ker}(F)$ i $\mathrm{Im}(F)$ są ze sobą ściśle związane.

Twierdzenie
$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F))$.
Liczbę $\dim(\mathrm{Im}(F))$ nazywamy *rzędem przekształcenia* F.

Wniosek
Załóżmy, że $\dim(V)$ jest skończony i przekształcenie $F\colon V \to V$ jest liniowe (endomorfizm). Wtedy F jest 1–1 $\iff$ F jest "na". W szczególności każdy z tych warunków jest równoważny temu, że F jest bijekcją.

5 Zmiana bazy

Teraz zbadamy, jak zmieniają się współrzędne wektora przy zmianie bazy. Załóżmy, że $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $\mathcal{B}' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ są dwiema bazami przestrzeni V.

Problem. Znając współrzędne $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ wektora $\mathbf{v} \in V$, znaleźć współrzędne $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}$.

Fakt
$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = m_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\mathrm{id})[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.
Z tego względu przyjmujemy następującą definicję

Definicja Macierz $m_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ nazywamy macierzą przejścia od współrzędnych w bazie $\mathcal{B}$ do współrzędnych w bazie $\mathcal{B}'$.

Przykład
Wiemy, że dla pewnych $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lllllllll} b_1 & = & a_{11}b'_1 & + & a_{21}b'_2 & + & \dots & + & a_{n1}b'_n \\ b_2 & = & a_{12}b'_1 & + & a_{22}b'_2 & + & \dots & + & a_{n2}b'_n \\ \multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ b_n & = & a_{1n}b'_1 & + & a_{2n}b'_2 & + & \dots & + & a_{nn}b'_n. \end{array}$$

W wierszach tego układu równości występują współrzędne w bazie $\mathcal{B}'$ kolejnych wektorów bazy $\mathcal{B}$. Współrzędne te (zgodnie z algorytmem obliczania macierzy przekształcenia liniowego) to kolejne kolumny macierzy $m_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$. Dlatego

$$m_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Uwaga
$m_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ jest odwracalna i $m_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\mathrm{id})^{-1} = m_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathrm{id})$.

Przykład
Niech $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ będzie bazą standardową, zaś $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ będzie bazą utworzoną z wektorów

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wówczas

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{w} = -\frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{e}_3.$$

Dlatego

$$m_{\mathcal{BE}}(id) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

W naszym przykładzie macierz ta jest ortogonalna, więc macierz do niej odwrotna $m_{\mathcal{BE}}(\mathrm{id})^{-1} = m_{\mathcal{EB}}(\mathrm{id})$ będzie po prostu jej transpozycją (można też obliczyć ją metodą bezwyznacznikową). Alternatywnie możemy wyliczyć $m_{\mathcal{EB}}(id)$ wyrażając bazowe wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ jako liniowe kombinacje wektorów $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

6 Rzędy, diagonalizacja

Definicja

Rzędem (kolumnowym) macierzy $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ nazywamy liczbę liniowo niezależnych kolumn tej macierzy.

Twierdzenie

Liczba liniowo niezależnych kolumn macierzy A jest równa liczbie liniowo niezależnych wierszy macierzy A.

Fakt

$\text{rząd}(A) \geqslant k \iff$ macierz A ma pewien niezerowy minor stopnia k.

Widzimy więc, że dla obliczenia rzędu macierzy wystarczy obliczyć liczbę liniowo niezależnych wierszy. Poznamy teraz pewien szczególny rodzaj macierzy, dla ktorych jest to bardzo łatwe.

Definicja

Załóżmy, że $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ jest macierzą.

1) Mówimy, że a_{ij} jest wiodącym wyrazem w i-tym wierszu macierzy A, gdy $a_{ij} \neq 0$ i dla wszystkich $j' < j, a_{ij'} = 0$. Jeśli i-ty wiersz jest zerowy, to nie ma w nim wyrazu wiodącego.

2) Mówimy, że macierz A ma uporządkowane wiersze, gdy

a) jeśli i-ty wiersz macierzy A jest zerowy oraz $i' > i$, to i'-ty wiersz też jest zerowy.

b) Jeśli a_{ij} i $a_{i'j'}$ są wiodącymi wyrazami w swoich wierszach oraz $i < i'$, to $j < j'$.

Przykład

Poniższa macierz ma uporządkowane wiersze.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

W tym przypadku wiodące wyrazy to a_{11}, a_{23} i a_{34}.

Zauważmy, że rząd macierzy z uporządkowanymi wierszami = liczba liniowo niezależnych wierszy = liczba niezerowych wierszy.

Przykłady

1. Niech $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{R}^n$. Wówczas $\dim(\mathrm{lin}(A_1, \ldots, A_k))$ = rząd macierzy $(A_1, \ldots, A_k)$, który możemy już łatwo obliczyć.

2. Niech $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ będzie bazą przestrzeni liniowej V oraz $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$. Wówczas używając izomorfizmu liniowego między V i $\mathbb{R}^n$ dostajemy, że

$$\dim(\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)) = \dim(\mathrm{lin}([\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\mathbf{v}_k]_{\mathcal{B}})).$$

Ostatni wymiar umiemy już obliczyć używając metody z punktu 1.

Załóżmy, że przestrzeń V ma wymiar skończony oraz $F\colon V \to V$ jest liniowe. Macierz F w dowolnej bazie przestrzeni V umożliwia nam wyliczanie obrazów wektorów przy przekształceniu F. Jednak obliczenia przy użyciu macierzy mogą być żmudne. Dlatego staramy się często znaleźć taką bazę $\mathcal{B}$ przestrzeni V, by macierz $m_{\mathcal{B}}(F)$ była możliwie najprostsza, najlepiej diagonalna, tzn. postaci

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}.$$

Będziemy się starali rozstrzygnąć następujący problem.

Problem
Czy istnieje baza $\mathcal{B}$ przestrzeni V taka, że macierz $m_B(F)$ jest diagonalna?

By rozwiązać ten problem, wprowadzamy następującą definicję.

Definicja
1) Załóżmy, że $\dim(V) < \infty$. Mówimy, że przekształcenie liniowe $F\colon V \to V$ jest diagonalizowalne $\iff$ $m_{\mathcal{B}}(F)$ jest diagonalna dla pewnej bazy $\mathcal{B} \subset V$.

2) Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna $\iff$ macierz CAC^{-1} jest diagonalna dla pewnej odwracalnej macierzy $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Twierdzenie
Załóżmy, że $F\colon V \to V$ jest liniowe, $\dim(V) = n$ i $\mathcal{B}$ jest bazą V. Wtedy F jest diagonalizowalne $\iff$ $m_{\mathcal{B}}(F)$ jest diagonalizowalna.

Definicja
Załóżmy, że $F\colon V \to V$ jest liniowe, zaś A jest macierzą wymiaru $n \times n$.

1) Jeśli dla pewnego niezerowego $\mathbf{v}_0 \in V$, $F(\mathbf{v}_0) = t\mathbf{v}_0$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$, to skalar t nazywamy wartością własną przekształcenia F, a wektor $\mathbf{v}_0$ wektorem własnym F dla wartości własnej t.

2) Jeśli t jest wartością własną F, to przyjmujemy, że $\mathbf{0}$ jest również wektorem własnym F dla wartości własnej t.

3) Jeśli dla pewnego niezerowego wektora $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $A\mathbf{x}_0 = t\mathbf{x}_0$ dla pewnego $t \in R$, to t nazywamy wartością własną macierzy A, a $\mathbf{x}_0$ wektorem własnym macierzy A dla wartości własnej t.

4) Jeśli t jest wartością własną A, to przyjmujemy, że również wektor $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem własnym A dla wartości własnej t.

Fakt
Załóżmy, że $\dim(V) < \infty$. Wtedy $F \in \mathrm{End}(V)$ jest diagonalizowalne $\iff$ istnieje baza $\mathcal{B}$ przestrzeni V złożona z wektorów własnych F.

7 Diagonalizacja

Zakładamy, że V jest przestrzenią liniową wymiaru skończonego oraz F jest endomorfizmem V. Będziemy się starali rozstrzygnąć, czy istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych F (tzn. równoważnie czy F jest diagonalizowalne). Podamy proste kryterium diagonalizowalności. Naszą analizę endomorfizmu F rozpoczniemy od zdefiniowania pewnych niezmienników przekształcenia F.

Definicja
Wyznacznikiem endomorfizmu F nazywamy liczbę $\det(F) = \det(m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F))$ dla dowolnej bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni V.

Fakt
$\det(F)$ nie zależy od wyboru bazy $\mathcal{B}$.

Wniosek
F jest odwracalne $\iff \det(F) \neq 0$

Uwaga
1) λ jest wartością własną $F \iff \det(F - \lambda \cdot \mathrm{id}) = 0$.
2) λ jest wartością własną macierzy $A \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Definicja
1) Wielomian $\varphi_A(X) = \det(A - XI)$ nazywamy wielomianem charakterystycznym macierzy A.
2) Wielomian $\varphi_A(X)$, gdzie A jest macierzą F w pewnej bazie $\mathcal{B}$, nazywamy wielomianem charakterystycznym przekształcenia F, oznaczamy go przez $\varphi_F(X)$.

Uwaga
1) Wielomian $\varphi_F(X)$ nie zależy od wyboru bazy $\mathcal{B}$.
2) Dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}, \varphi_F(\lambda) = \det(F - \lambda \cdot \mathrm{id})$.
3) λ jest wartością własną $F \iff \varphi_F(\lambda) = 0$.
3') λ jest wartością własną macierzy $A \iff \varphi_A(\lambda) = 0$.

Wniosek
Współczynniki wielomianu charakterystycznego $\varphi_F(X)$ nie zależą od wyboru bazy.

Wniosek

Jeśli $\dim(V) = n$, to F ma $\leqslant n$ różnych wartości własnych. Macierz wymiaru $n \times n$ ma $\leqslant n$ różnych wartości własnych.

Twierdzenie

Załóżmy, że $F \in \mathrm{End}(V)$ oraz $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ jest zbiorem wszystkich wartości własnych F, o krotnościach $t_1, \ldots, t_k$ odpowiednio.

1) Jeśli F jest diagonalizowalny, to $\varphi_F(X) = (\lambda_1 - X)^{t_1}(\lambda_2 - X)^{t_2} \cdots (\lambda_k - X)^{t_k}$.

2) $V^{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(F - \lambda_i \cdot \mathrm{id})$.

3) Niech $W = V^{\lambda_1} + V^{\lambda_2} + \cdots + V^{\lambda_k}$. Wówczas $W = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_k}$.

4) Następujące warunki są równoważne:

i) F jest diagonalizowalne.

ii) $\sum_i \dim(V^{\lambda_i}) = \dim(V)$.

iii) $\sum_i \dim(V^{\lambda_i}) \geqslant \dim(V)$

Przykłady .

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Macierzy A odpowiada przekształcenie liniowe $F_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. By rozstrzygnąć, czy macierz A jest diagonalizowalna, znajdujemy jej wielomian charakterystyczny i wartości własne.

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda) - 3(2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 3) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda),$$

gdzie $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$, $\lambda_3 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ (są to wartości własne macierzy A). Przestrzenie wektorów własnych V^{λ_1}, V^{λ_2}, V^{λ_3} mają wymiar przynajmniej 1 (bo są różne od $\{\mathbf{0}\}$), więc suma tych wymiarów jest $\geqslant 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Dlatego na mocy poprzedniego twierdzenia macierz A jest diagonalizowalna. Możemy też wywnioskować, że wszystkie przestrzenie V^{λ_i}, $i = 1, 2, 3$ mają wymiar 1 i $\mathbb{R}^3$ jest ich sumą prostą.

Możemy też znaleźć macierz odwracalną C taką, że $C^{-1}AC$ jest diagonalna. Rozwiązując odpowiednie układy równań znajdujemy, że V^{λ_1} jest prostą wzdłuż wektora $u = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$, V^{λ_2} prostą wzdłuż wektora $v = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, zaś V^{λ_3} prostą wzdłuż wektora $w = \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

W bazie $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ przekształcenie liniowe F_A ma macierz

$$m_{\mathcal{B}}(F_A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(\mathrm{id}) m_{\mathcal{E}}(F_A) m_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(id)$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 5 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$