ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Rozwiązania zadań z egzaminu na ocenę celującą, luty 2015

1. Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego wzorem rekurencyjnym:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n} \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Rozwiązanie. Łatwo zauważyć, że ciąg (a_n) jest rosnący. Przypuśćmy, że ciąg ten jest ograniczony z góry. Wtedy z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wynika, że ciąg (a_n) ma granicę właściwą. Niech g oznacza tę granicę. Ponieważ $a_n > 1$, więc $g \geqslant 1$. Przechodząc we wzorze rekurencyjnym z n do ∞ dostaniemy

$$g = g + \frac{1}{2g}.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, więc ciąg (a_n) nie jest ograniczony z góry. Zatem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

2. Niech $f(x) = \sin(x^{20})\,\mathrm{arctg}\,(x^{30})\ln(1+x^{50})$. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n taką, że $f^{(n)}(0) \neq 0$. Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że pochodne dowolnego rzędu funkcji f są ciągłe na $\mathbb{R}$. Pokażemy, że najmniejszym stopniem pochodnej różnej od zera w punkcie 0 jest 100. Rozpoczniemy od uzasadnienia, że $f^{(1)}(0) = 0$. Rozważmy granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Z jednej strony granica ta jest równa 0, gdyż

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^{20})\ \mathrm{arctg}\ (x^{30})\ln(1+x^{50})}{x} &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(x^{20})}{x^{20}}\cdot x^{19}\,\mathrm{arctg}\,\left(x^{30}\right)\ln\left(1+x^{50}\right)\right] = \\ &= 1\cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

a z drugiej – z reguły de L'Hospitala – mamy

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f^{(1)}(x)}{1} = \frac{f^{(1)}(0)}{1}.$$

Zatem $f^{(1)}(0) = 0$.

Następnie uzasadnimy, że $f^{(2)}(0) = 0$. Rozważmy granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}.$$

Z jednej strony granica ta jest równa 0 (metoda uzasadnienia jak wyżej), a z drugiej korzystając z reguły de L'Hospitala mamy

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f^{(1)}(x)}{2x}\left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f^{(2)}(x)}{2!} = \frac{f^{(2)}(0)}{2!}.$$

Zatem $f^{(2)}(0) = 0$. W analogiczny sposób pokazujemy, że

$$f^{(3)}(0) = 0,\ f^{(3)}(0) = 0, \ldots, f^{(99)}(0) = 0.$$

Teraz dwoma sposobami wyznaczymy granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{100}}.$$

Pierwszym sposobem mamy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^{20}) \operatorname{arctg}(x^{30}) \ln(1+x^{50})}{x^{100}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x^{20})}{x^{20}} \cdot \frac{\operatorname{arctg}(x^{30})}{x^{30}} \cdot \frac{\ln(1+x^{50})}{x^{50}} \right) = 1,$$

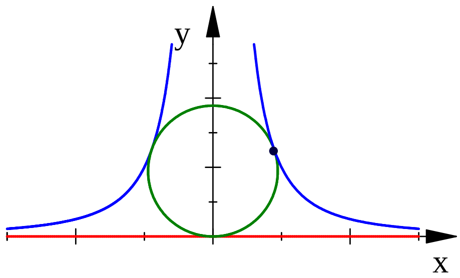
a korzystając 100 razy z reguły de L'Hospitala otrzymamy

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{100}} \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f^{(1)}(x)}{100x^{99}} \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=} \ldots = \frac{f^{(100)}(0)}{100!}.$$

Stąd wynika, że $f^{(100)}(0) = 100! \neq 0$.

3. Wyznaczyć promień największego koła, które można wpisać w obszar ograniczony krzywą $y = 1/x^2$ oraz osią Ox.

Rozwiązanie. Niech r oznacza promień największego koła oraz niech a $(a > 0)$ będzie rzędną punktu styczności okręgu o równaniu $x^2 + (y-r)^2 = r^2$ i krzywej $y = 1/x^2$.



W punkcie styczności funkcje $y = r + \sqrt{r^2 - x^2}$ (górna połowa okręgu) i $y = 1/x^2$ mają te same wartości oraz jednakowe pochodne (wspólna styczna). Zatem zachodzi układ równań

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} = r + \sqrt{r^2 - a^2}, \\ \frac{-2}{a^3} = -\frac{a}{\sqrt{r^2-a^2}}. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $(a, r) = \left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{32}, \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)$. Zatem promień największego koła jest równy $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2} \approx 0.945$.

4. Obliczyć całkę

$$\int \cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) dx \qquad (x \in [0,1]).$$

Wynik zapisać nie używając funkcji trygonometrycznych ani cyklometrycznych.

Rozwiązanie. Najpierw uprościmy funkcję podcałkową. Korzystając z tożsamości

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \ \sin(\arcsin x) = x,$$

mamy

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) &= \sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)} = \sqrt{\frac{1+\cos\arcsin x}{2}} = \\
&= \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\sin^2\arcsin x}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}} = \\
&= \sqrt{\frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{4}} = \sqrt{\frac{(1+x)+2\sqrt{(1+x)(1-x)}+(1-x)}{4}} = \\
&= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right), \quad x \in [-1,1]\,.
\end{aligned}
$$

Teraz obliczenie całki jest łatwe:

$$
\begin{aligned}
\int \cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) dx &= \frac{1}{2}\int \left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right) dx = \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)+C.
\end{aligned}
$$