ALGEBRA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

Rozwiązania zadań z egzaminu na ocenę celującą, luty 2015

1. Pokazać, że $\operatorname{Im}\left[(13-9i)^{148}(2+i)^{444}\right]=0$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\begin{aligned}(13-9i)^{148}(2+i)^{444} &= \left[(13-9i)(2+i)^3\right]^{148}=[(13-9i)(2+11i)]^{148}\\ &= (125+125i)^{148}=5^{444}(1+i)^{148}=-2^{74}5^{444}.\end{aligned}$$

Zatem $\operatorname{Im}\left[(13-9i)^{148}(2+i)^{444}\right]=0$.

2. Dla jakich naturalnych n *wielomian* x^n+x+1 *dzieli się bez reszty przez wielomian* x^2+x+1?

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że wielomian x^3-1 jest podzielny przez wielomian x^2+x+1. Rozważymy trzy przypadki:

- dla $n=3k\ \ (k\in\mathbb{N})$ mamy

$$\begin{aligned}x^n+x+1 &= x^{3k}+x+1=\left(x^3\right)^k+x+1=\\ \left[\left(x^3-1\right)+1\right]^k+x+1 &= \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(x^3-1\right)^i+x+2;\end{aligned}$$

- dla $n=3k+1\ \ (k\in\mathbb{N})$ mamy

$$\begin{aligned}x^n+x+1 &= x^{3k+1}+x+1=x\left(x^3\right)^k+x+1=\\ &= x\left[\left(x^3-1\right)+1\right]^k=x\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(x^3-1\right)^i+2x+1;\end{aligned}$$

- a dla $n=3k+2\ \ (k\in\mathbb{N})$ mamy

$$\begin{aligned}x^n+x+1 &= x^{3k+2}+x+1=x^2\left(x^3\right)^k+x+1=\\ &= x^2\left[\left(x^3-1\right)+1\right]^k=x^2\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(x^3-1\right)^i+x^2+x+1.\end{aligned}$$

Z tych rozważań wynika, że tylko dla liczb naturalnych postaci $n=3k+2$ wielomian x^n+x+1 jest podzielny przez x^2+x+1.

3. Niech $n\ \ (n\geqslant 2)$ *będzie liczbą naturalną. Czy istnieją macierze* A,B *stopnia* n *takie, że dla dowolnej macierzy* X *tego samego stopnia zachodzi równość* $X^T=AXB$?

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że istnieją macierze kwadratowe A,B stopnia n takie, że dla każdej macierzy kwadratowej X tego samego stopnia zachodzi równość $X^T=AXB$. Podstawiając $X=I$, otrzymamy $AB=I$, czyli $B=A^{-1}$. Zatem, jeśli poszukiwany wzór istnieje, to musi mieć postać $X^T=AXA^{-1}$. Stosując ten wzór do wyznaczenia transpozycji iloczynu XY otrzymamy

$$(XY)^T=A(XY)A^{-1}=A\left[X\left(A^{-1}A\right)Y\right]A^{-1}=\left(AXA^{-1}\right)\left(AYA^{-1}\right)=X^TY^T.$$

Z drugiej strony zachodzi tożsamość $(XY)^T = Y^T X^T$. Otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem nie istnieją macierze A, B spełniające warunki zadania.

4. Sześcian ma krawędź o długości 30, *a początek układu współrzędnych jest jego środkiem. Jedna z krawędzi sześcianu jest równoległa do wektora* $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, -2)$, *a inna do wektora* $\boldsymbol{v}_2 = (2, 10, 11)$. *Wyznaczyć współrzędne wierzchołków sześcianu.*

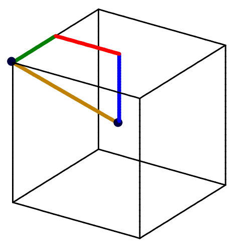
Rozwiązanie. Najpierw znajdziemy wektor $\boldsymbol{v}_3$, który jest prostopadły do wektorów v_1 i v_2. Mamy

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = (42, -15, 6)\,.$$

Następnie wektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ wydłużamy/skracamy tak, aby miały długość równą połowie długości krawędzi sześcianu, tj. 15. Po tej operacji otrzymamy wektory:

$$\boldsymbol{a}_1 = (5, 10, -10)\,, \quad \boldsymbol{a}_2 = (2, 10, 11)\,, \quad \boldsymbol{a}_3 = (14, -5, 2)\,.$$

Zauważmy teraz, że wektor wodzący dowolnego wierzchołka sześcianu można przedstawić w postaci sumy trzech spośród wektorów $\pm\boldsymbol{a}_1, \pm\boldsymbol{a}_2, \pm\boldsymbol{a}_3$ (rysunek).



Wierzchołki sześcianu mają zatem współrzędne:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = (5, 10, -10) + (2, 10, 11) + (14, -5, 2) = (21, 15, 3)\,;\\
\boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 = (5, 10, -10) + (2, 10, 11) - (14, -5, 2) = (-7, 25, -1)\,;\\
\boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = (5, 10, -10) - (2, 10, 11) + (14, -5, 2) = (17, -5, -19)\,;\\
\boldsymbol{w}_4 &= \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 = (5, 10, -10) - (2, 10, 11) - (14, -5, 2) = (-11, 5, -23)\,;\\
\boldsymbol{w}_5 &= -\boldsymbol{w}_1 = (-21, -15, -3)\,;\\
\boldsymbol{w}_6 &= -\boldsymbol{w}_2 = (7, -25, 1)\,;\\
\boldsymbol{w}_7 &= -\boldsymbol{w}_3 = (-17, 5, 19)\,;\\
\boldsymbol{w}_8 &= -\boldsymbol{w}_4 = (11, -5, 23)\,.
\end{aligned}$$