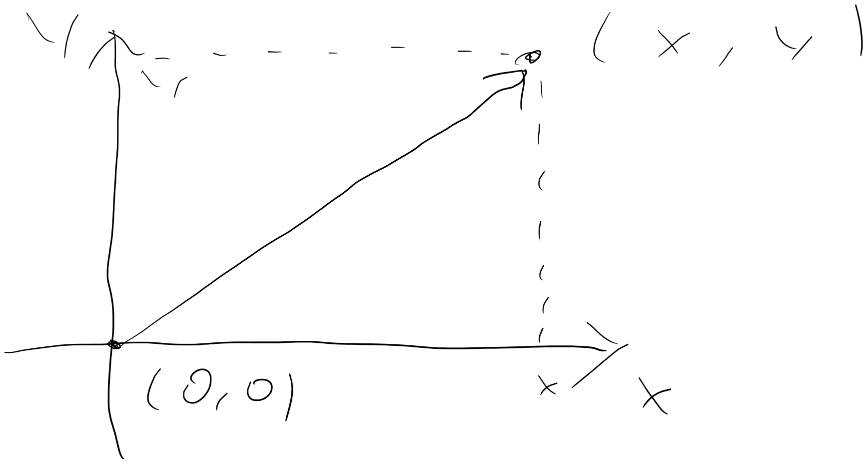
# PRZESTRZENIE LINIOWE $\mathbb{R}^n$

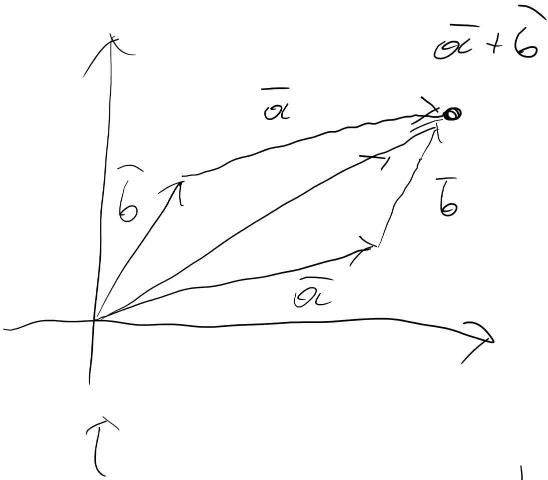
PRZYKŁADY NISKOWYMIAROWE:

- $\dim = 1$


$\lambda \in \mathbb{R}$

· dim = 2

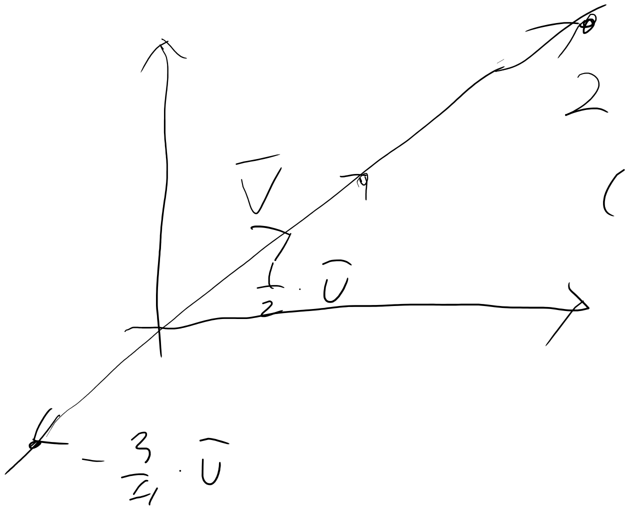



$$+ : \underset{\bar{a}}{\mathbb{R}^2} \times \underset{\bar{b}}{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \underset{\bar{a}+\bar{b}}{\mathbb{R}^2}$$

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

Tuesday, March 28, 2023 14:14




$\lambda \in \mathbb{R} \qquad \bar{v} \in \mathbb{R}^2$

$\lambda \cdot \bar{v} \in \mathbb{R}^2$

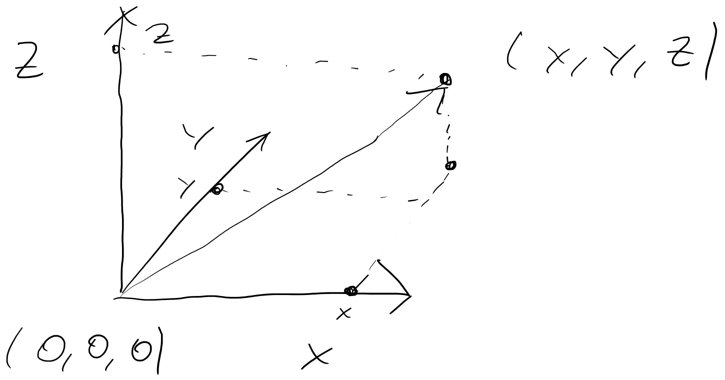
$2 \cdot \bar{v} = (v_1, v_2)$

$$\text{"}\cdot\text{"}: \begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \times & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \lambda & & \bar{v} & & \lambda \cdot \bar{v} \end{array}$$

$$\lambda (v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$$

Tuesday, March 28, 2023 14:17

- dim = 3




- MNOŻENIE PRZEZ LICZBĘ I DODAWANIE WEKTORÓW DEFINIUJEMY GEOMETRYCZNIE JAK DLA PŁASZCZYZNY (R2

OD STRONY FORMALNEJ

- $\underset{\in \mathbb{R}^3}{(x, y, z)} + \underset{\in \mathbb{R}^3}{(a, b, c)} = \underset{\in \mathbb{R}^3}{(a+x, b+y, c+z)}$

- $\underset{\in \mathbb{R}}{\lambda} \cdot (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

• $\dim = n$

$\bar{a} \in \mathbb{R}^n \quad \bar{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

FORMALNIE DEFINIUJEMY OPERACJE

1) $\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\Uparrow}{\bar{a}}} + \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\Uparrow}{\bar{b}}} = \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\Uparrow}{\overline{a+b}}}$

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) =$

$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$

2)
$$\underset{\mathbb{R}}{\lambda} \cdot \cancel{\phantom{xx}} \underset{\mathbb{R}^n}{\overline{\alpha}} = \underset{\mathbb{R}^n}{\lambda \overline{\alpha}}$$

$$\lambda \cdot (\alpha_1, \dots \alpha_n) = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2 \dots \lambda \alpha_n)$$

PRZYKŁAD

$$(1, 2, 3, 4, 5) - 2 \cdot (1, 1, 1, 1, 1) =$$
$$(1, 2, 3, 4, 5) + (-2, -2, -2, -2, -2) =$$
$$(-1, 0, 1, 2, 3)$$

WŁASNOŚCI OPERACJI $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^n$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$
- $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$
- $\bar{a} + \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\Uparrow}{\bar{0}}} = \bar{a}$
- $\bar{a} - \bar{a} = \bar{0}$
- $(\lambda \cdot \mu)\, \bar{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \bar{a})$
- $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$
- $\lambda\, (\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \bar{a} + \lambda \bar{b}$
- $(\lambda + \mu)\, \bar{a} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{a}$

Tuesday, March 28, 2023 14:51

BONUS: $\dim = +\infty$

"$\mathbb{R}^\infty$" $\ni$ $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$

$\Downarrow$

$(a_1, a_2, a_3, \dots)$

$(a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) =$

$(a_1 + \cancel{a_1}\,b_1, a_2 + b_2, \dots)$

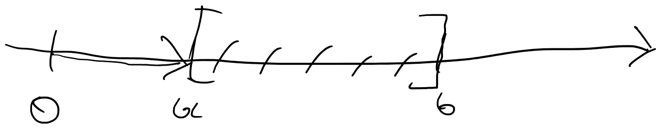
$\lambda \cdot (a_1, a_2 \dots) = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \dots)$

$$\text{"}\mathbb{R}^{\infty}\text{"} \supset l_p := \left\{ (a_n)_{n=1}^{+\infty} : \right.$$

$$1 \le p < +\infty \qquad \left. \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty \right\}$$

# LINIE I ODCINKI

, $n = 1$




$[a, b] \ni a, b$

$(a, b) \not\ni a, b$

$(a, b] \ni b$

$\not\ni a$

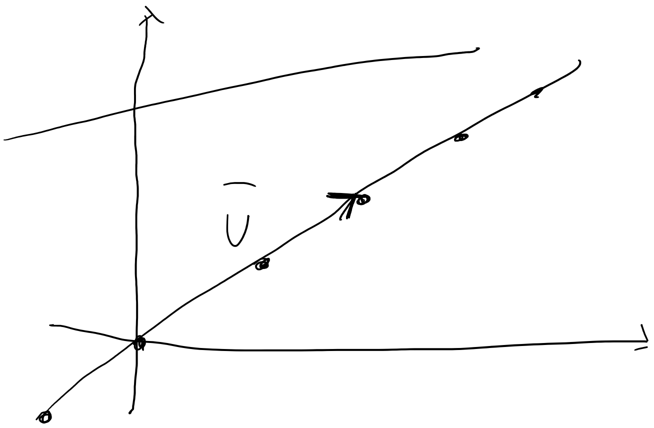
PROSTA PRZECHODZĄCA

~~LINIA~~ — PRZEZ $\overline{AB}$ TO CAŁE $\mathbb{R}$,

A ODCINEK TO $[a, b]$

Tuesday, March 28, 2023 15:04

$\cdot\ n = 2$




1) $y = ax + b$

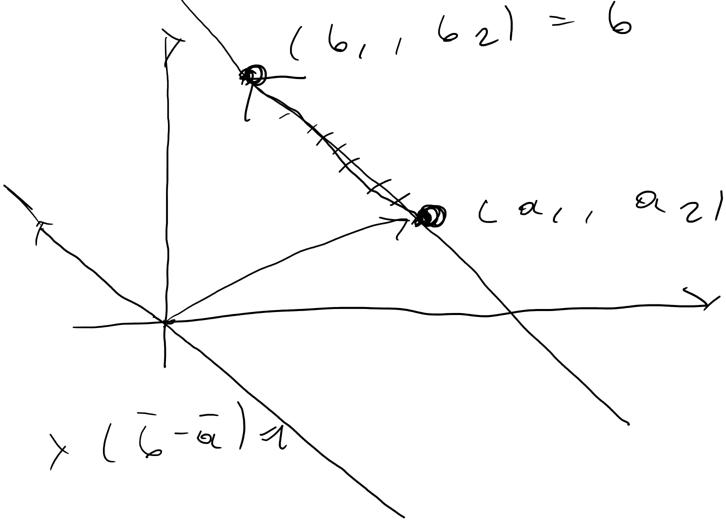
2) $\{ \lambda \bar{v} : \lambda \in \mathbb{R} \}$

PRZYKŁAD

$y = 2x$

WEKTOR $(1, 2)$
LEŻY NA TEJ
PROSTEJ, CZYLI
TĘ PROSTĄ MOŻEMY
OPISAĆ JAKO $\{ (\lambda, 2\lambda) : \lambda \in \mathbb{R} \}$

JEŻELI CHCEMY PROSTĄ, KTÓRA PRZECHODZI PRZEZ PUNKTY $\bar{a}$, $\bar{b}$ (ZAMIAST PRZEZ $\bar{a}$ i $(0,0)$)




$\bar{b} - \bar{a}$

JEŻELI ROZWAŻYMY $\{x(\bar{b} - \bar{a})\}$ TO DOSTANIEMY PROSTĄ RÓWNOLEGŁĄ

NASZA ORGINALNA PROSTA JEST DANA PRZEZ

$$\{\bar{a} + \lambda(\bar{b} - \bar{a}) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\parallel$$

$$\{(1-\lambda)\bar{a} + \lambda\bar{b} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

I TO W PRZECIWIEŃSTWIE DO RÓWNAŃ UOGÓLNIA SIĘ DO $\mathbb{R}^n$

# ODCINEK

$(1-\lambda)\,\overline{a} + \lambda\,\overline{b}$

- $\lambda = 0$ $\quad \overline{a}$
- $\lambda = 1$ $\quad \overline{b}$

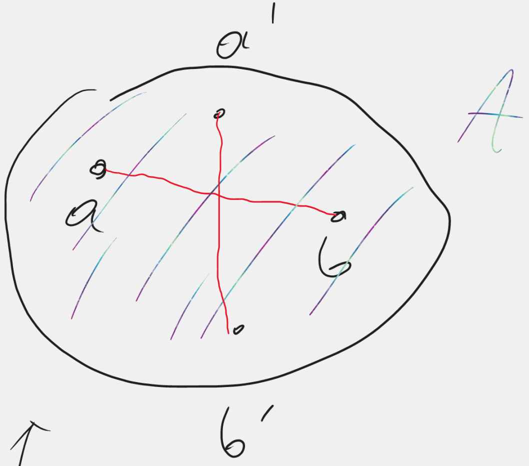
$\{ (1-\lambda)\,\overline{a} + \lambda\,\overline{b} : \lambda \in [0, 1] \}$

$\quad \parallel$

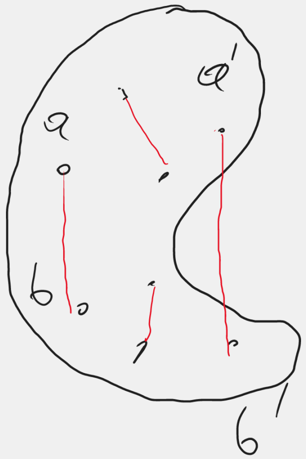
$[\,\overline{a}, \overline{b}\,]$

**DEF** ZBIÓR $A \subset \mathbb{R}^n$ JEST **WYPUKŁY** JEŚLI DLA KAŻDEJ PARY PUNKTÓW $a, b \in A$ ODCINEK $[a, b] \subset A$.

**PRZ**




JEST WYPUKŁY



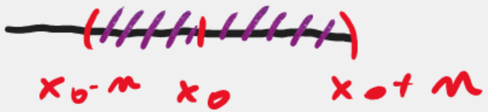

NIE JEST WYPUKŁY.

## PRZYKŁADY

· $B_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) < r \}$ ODLEGŁOŚĆ

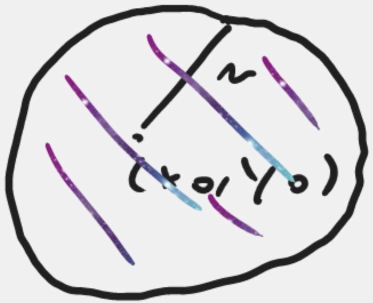
KULA O PROMIENIU $r$ W $\mathbb{R}^n$

· dim = 1




$B_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$

· dim = 2




$B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n$

SĄ WYPUKŁE

· dim = 3

- $n$-KĄTY FOREMNY / WIELOKĄTY FOREMNE

$n = 3$


$n = 4$


$n = 5$

...

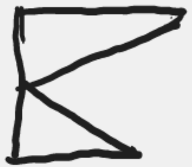
- WIELOŚCIANY FOREMNE / PÓŁFOREMNE

- 

CZWOROŚCIAN ,

SZEŚCIAN , ...

- UOGÓLNIENIA NA WYMIAR $n$ ...



SUMA ZBIORÓW WYPUKŁYCH
NIE MUSI BYĆ WYPUKŁA

<u>TW</u> PRZECIĘCIE DOWOLNEJ RODZINY ZBIORÓW WYPUKŁYCH
JEST ZBIOREM WYPUKŁYM.

PRZECIECIE ZB. WYPUKŁYCH
MUSI BYĆ WYPUKŁE.

__DW:__ $\{X_i\}_{i\in I}$ - RODZINA ZBIORÓW WYPUKŁYCH

ROZWAŻMY $a, b \in \bigcap_{i\in I} X_i$ I CHCEMY POKAZAĆ, ŻE

$[a,b] \subset \bigcap_{i\in I} X_i$. DLA DOWOLNEGO $i \in I$ $a, b \in X_i$

ALE $X_i$ SĄ WYPUKŁE, WIĘC $[a,b] \subset X_i$.

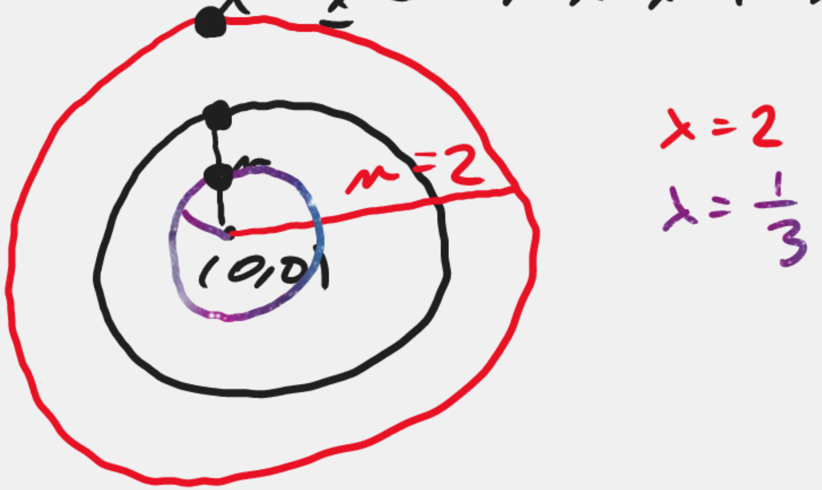
PONIEWAŻ TO PRAWDA DLA DOWOLNEGO $i$ TO

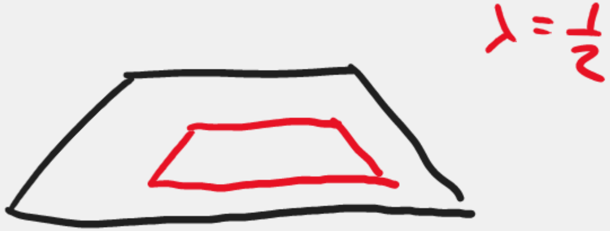
$[a,b] \subset \bigcap_{i\in I} X_i$

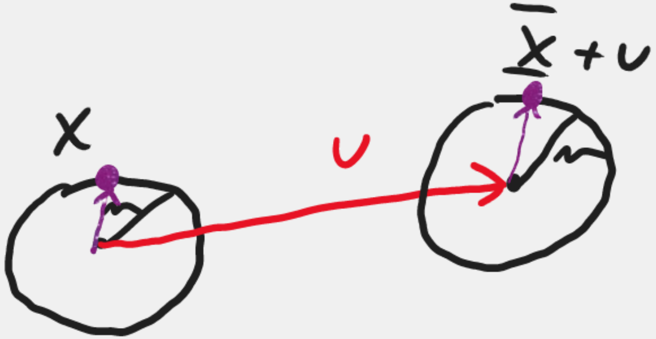
$\square$

FAKT: 1) $\overline{X} \subset \mathbb{R}^n$ WYPUKŁY, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \cdot \overline{X} = \{ \lambda \cdot x \mid x \in \overline{X} \}$ TEŻ JEST WYPUKŁY.




2) $\overline{X} \subset \mathbb{R}^n$ WYPUKŁY

$\overline{v} \in \mathbb{R}^n$ ,70

$\overline{X} + \overline{v} = \{ x + v \mid x \in \overline{X} \}$ TEŻ JEST WYPUKŁY

**DEF** UWYPUKLENIE ZBIORU $A \subset \mathbb{R}^n$ TO NAJMNIEJSZY ZBIÓR WYPUKŁY ZAWIERAJĄCY A.

**KONSTRUKCJA:** ROZWAŻMY $\mathcal{F}_A$ - RODZINĘ ZBIORÓW WYPUKŁYCH ZAWIERAJĄCYCH A. $A \subset \mathbb{R}^n$ I $\mathbb{R}^n$ JEST ZBIOREM WYPUKŁYM, WIĘC $\mathcal{F}_A$ JEST NIEPUSTĄ RODZINĄ. ROZWAŻMY $\bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F = C$. Z TW 1 ZBIÓR C JEST ZBIOREM WYPUKŁYM.

$A \subset F$ DLA $F \in \mathcal{F}_A$, WIĘC $A \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F =$

TWIERDZIMY, ŻE C JEST UWYPUKLENIEM A. ZAŁÓŻMY, ŻE TAK NIE JEST I ISTNIEJE B. T. ŻE $A \subset B \subset C$ I B WYPUKŁY. WIĘC $B \in \mathcal{F}_A$. $C = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F \subset B$

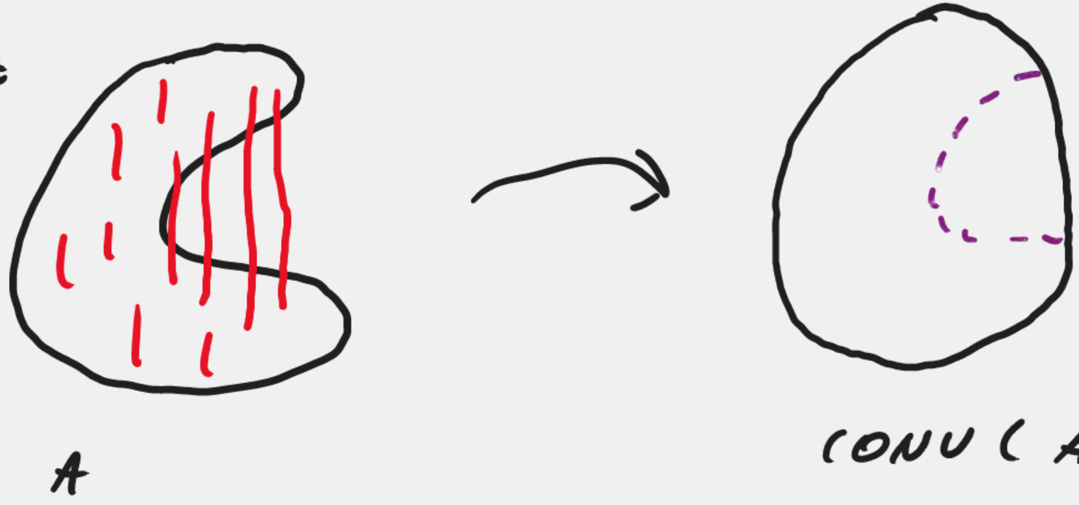
PONIEWAŻ $B \subset C$ i $C \subset B$ TO $B = C$. $\square$

PRZYPOMNIENIE $[a, b] = \{ \lambda a + (1-\lambda) b \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

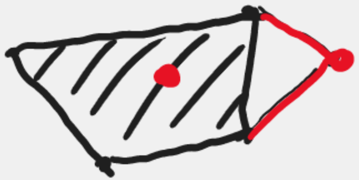
<u>TW</u> WYPUKLENIE CONV(A) ZBIORU A OPISUJEMY:

$$\mathrm{CONV}(A) = \{ \lambda a + (1-\lambda) b \mid a, b \in A, \ \lambda \in \mathbb{R} \}$$

PRZYKŁ



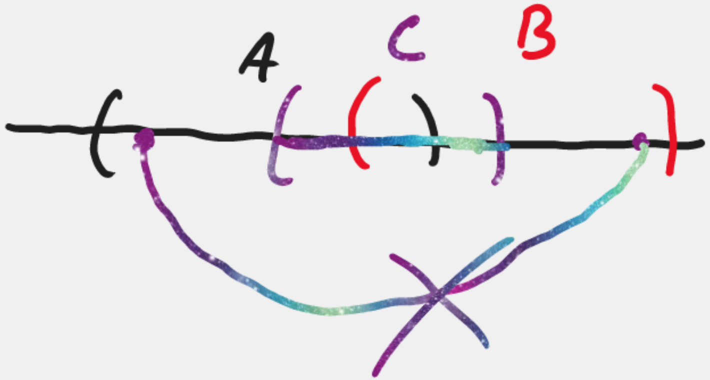

DLA NAS
n-GON
TO WYPUKLENIE
n-NIEZALEŻNYCH
PUNKTÓW



# TW HELLY'EGO

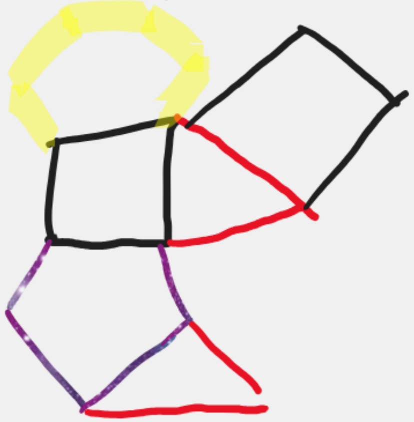
NIECH $\mathcal{F}$ BĘDZIE RODZINĄ CO NAJMNIEJ $n+1$ ZBIORÓW WYPUKŁYCH W $\mathbb{R}^n$ T. ŻE KAŻDE $n+1$ Z NICH MA NIEPUSTE PRZECIĘCIE. WTEDY PRZECIĘCIE CAŁEGO $\mathcal{F}$ JEST NIEPUSTE.

- $n = 1$



# PARKIETARZE

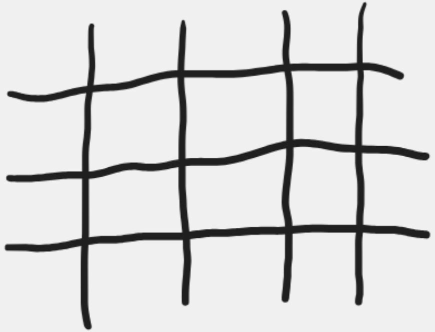
**DEF** PARKIETARZ PŁASZCZYZNY $\mathbb{R}^2$ TO RODZINA ROZŁĄCZNYCH WIELOKĄTÓW, KTÓRE POKRYWAJĄ $\mathbb{R}^2$



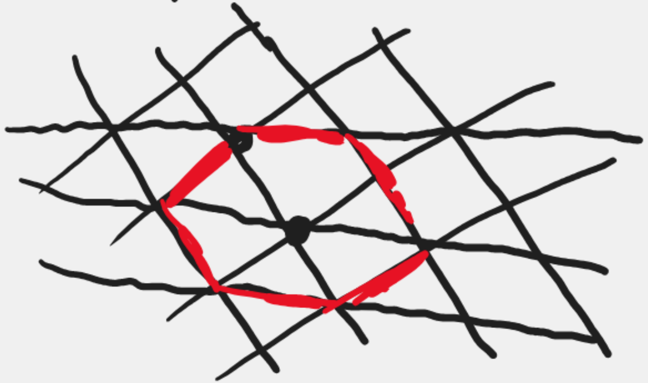
OK ✓

NIE ✗

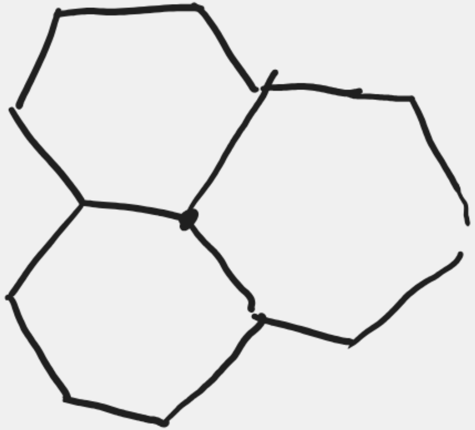
PARKIETARZ NAZYWAMY <u>REGULARNYM</u> JEŚLI KAŻDY WIELOKĄT JEST TYM SAMYM WIELOKĄTEM FOREMNYM



$n = 4$



$n = 3$



$n = 6$

$n$ - KĄTY

<u>TW</u> TE 3 PARKIETARZE TO JEDYNIE PARKIETARZE REGULARNE

## n - KĄT FOREMNY


$n = 3$, $\alpha = 60^\circ$

$n = 4$, $\alpha = 90^\circ$

$n = 5$, $\alpha = 108$

$n = 6$, $\alpha = 120^\circ$

. . .


$$\beta = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

KĄT WEWNĘTRZNY W n-KĄCIE FOREMNYM

ROŚNIE Z n

$n$ - WIELOKĄTÓW

JAKO, IŻE $\alpha < 180^\circ$

$$\underbrace{\alpha + \alpha + \dots + \alpha}_{n \geq 3} = 360^\circ$$

POPATRZMY NA OTOCZENIE DOWOLNEGO WIERZCHOŁKA

$n \cdot \alpha = 360^\circ \qquad n \geq 3 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \leq 120^\circ$

CZYLI $n = 3, 4, 5, 6$ TO NASI KANDYDACI

ALE $108^\circ \nmid 360^\circ$ WIĘC ODRZUCAMY $n = 5$.

DEF PARKIETARZ JEST PÓŁ-REGULARNY JEŚLI WSZYSTKIE WIELOKĄTY SĄ (POTENCJALNIE RÓŻNYMI) WIELOKĄTAMI FOREMNYMI

ROZWAŻAMY PRZYPADKI W ZALEŻNOŚCI OD LICZBY WIELOKĄTÓW W JEDNYM WIERZCHOŁKU.

- 3-WIELOKĄTY $k, l, m$ - TO ILOŚĆ ICH KRAWĘDZI

$$\underbrace{\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{k}\right)}_{\alpha} + \underbrace{\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{l}\right)}_{\beta} + \underbrace{\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{m}\right)}_{\gamma} = 360$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$$

$(6,6,6)$, $(4,8,8)$, $(4,6,12)$, $(3,12,12)$,

$(5,5,10) \leftarrow$ ROZWIĄZANIE RÓWNANIA ALE BEZ PARKIETARZU.

- 4 WIELOKĄTY O LICZBIE KRAWĘDZI $k, l, m, n$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

(4, 4, 4, 4)
(3, 3, 6, 6)
(3, 4, 6, 4)

- 5 WIELOKĄTÓW

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$$

(3, 4, 3, 4, 3)
(3, 3, 3, 4, 4)
(3, 3, 3, 3, 6)

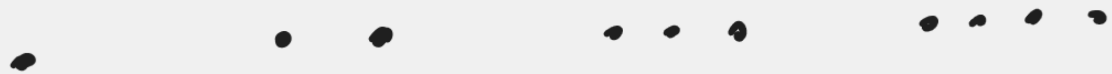
- 6 WIELOKĄTÓW

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 2$$

(3, 3, 3, 3, 3, 3)

PRZYKŁADY

• GRAFY PUSTE $A_n = (\overset{V}{\overset{\shortparallel}{\{1,2,\dots n\}}}, \overset{E}{\overset{\shortparallel}{\emptyset}})$



$A_1$ $A_2$ $A_3$ $A_4$

• GRAF PEŁNY / KLIKA $V(K_n) = \{1,2,\dots n\}$

$E(K_n)$ TO WSZYSTKIE MOŻLIWE KRAWĘDZIE

$K_1$ $K_2$ $K_3$ $K_4$ $K_5$

$$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

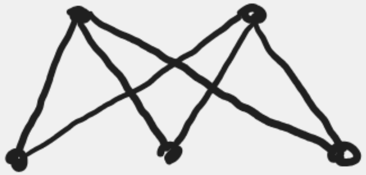
## GRAFY DWUDZIELNE

TO GRAFY GDZIE $\overline{V} = \overline{V}_1 \cup \overline{V}_2$

JEŻELI $(v, w) \in E \Rightarrow v \in \overline{V}_1 , w \in \overline{V}_2$

$V_1$

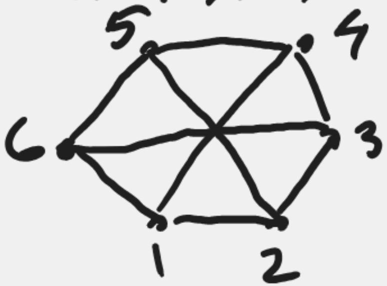
$V_2$



$K(2, 3)$

PEŁNE GRAFY DWUDZIELNE - TO GRAFY DWUDZIELNE $K(n, m)$ $|\overline{V}_1| = n$, $|\overline{V}_2| = m$, KRAWĘDZIE ISTNIEJĄ DO MIĘDZY KAŻDYMI $v_1 \in \overline{V}_1$ i KAŻDYM $v_2 \in \overline{V}_2$.

$$|E(K(n,m))| = n \cdot m$$



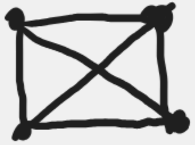
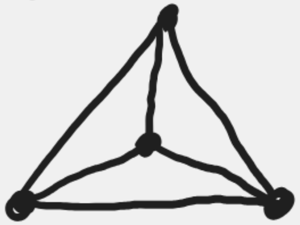

$\cong$ $K(3,3)$

## GRAFY PLANARNE

GRAF NAZYWAMY PLANARNYM JEŚLI MOŻEMY NARYSOWAĆ GO NA PŁASZCZYŹNIE $\mathbb{R}^2$ BEZ ŻADNYCH PRZECIĘĆ.

BRAK PRZECIĘĆ

$\Rightarrow$ PLANARNY

 $\cong$ 

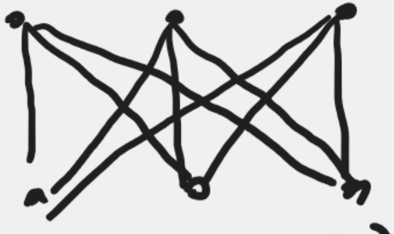
$K_4$

JEST PLANARNY CHOCIAŻ REP. GEOMETRYCZNA PO LEWEJ STRONIE MA PRZECIĘCIA

TW (KURATOWSKI)

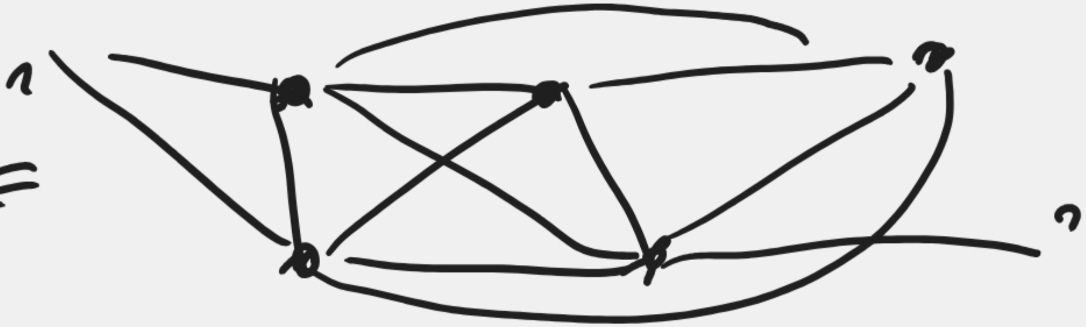
GRAF JEST PLANARNY WTEDY I TYLKO WTEDY GDY NIE ZAWIERA KOPII $K_5$ LUB $K_{3,3}$

$K_5$



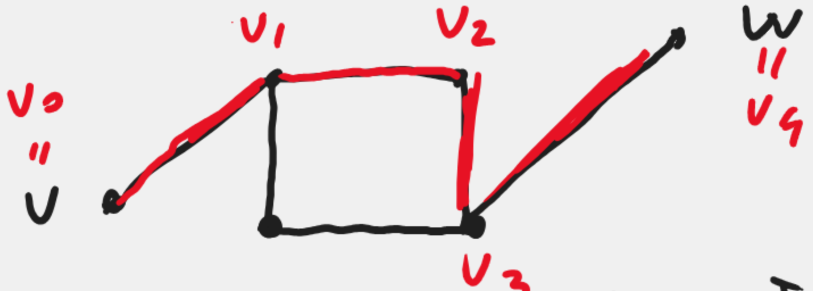
$K(3,3)$

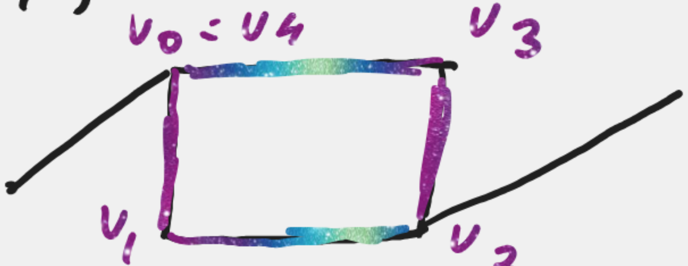
NIE JEST PLANARNY $\Leftarrow$



$\supset K_5$

• DROGA W GRAFIE POMIĘDZY $v$ i $w$ O DŁUGOŚCI $m$ TO WYBÓR WIERZCHOŁKÓW $v = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m = w$ T. ŻE $(v_i, v_{i+1}) \in E$



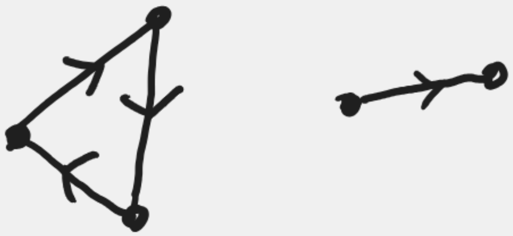

• CYKL W GRAFIE TO DROGA, GDZIE POCZĄTEK I KONIEC SĄ TAKIE SAME i.e. $v_0 = v_m$

• DROGA JEST PROSTA JEŚLI NIE ODWIEDZA ONA ŻADNEJ KRAWĘDZI WIĘCEJ NIŻ RAZ.

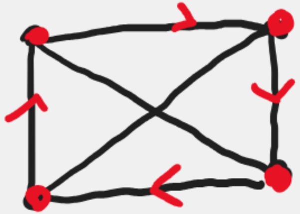
KÖNINSBERG.

**DEF** GRAF NAZYWAMY GRAEM EULER'A JEŚLI MOŻEMY ZNALEŹĆ CYKL, KTÓRY PRZECHODZI PRZEZ KAŻDĄ KRAWĘDŹ DOKŁADNIE RAZ

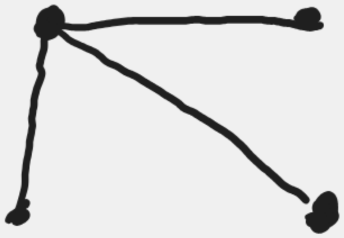
**TW** GRAF JEST EULER'A WTEDY I TYLKO WTYDY KIEDY Z KAŻDEGO WIERZCHOŁKA WYCHODZI PARZYSTA ILOŚĆ KRAWĘDZI I GRAF JEST SPÓJNY (TZN. ISTNIEJE DROGA POMIĘDZY DOWOLNĄ PARĄ WIERZCHOŁKÓW).



**DEF** GRAF NAZYWAMY GRAFEM HAMILTONA JEŚLI ISTNIEJE CYKL, KTÓRY ODWIEDZA KAŻDY WIERZCHOŁEK DOKŁADNIE RAZ



GRAF HAMILTONA



NIE JEST HAMILTONA

**TW** (ORE 1960)

PROSTY GRAF O PRZYNAJMNIEJ 3 WIERZCHOŁKACH T. ŻE DLA DOWOLNYCH WIERZCHOŁKÓW $v, w \in V$

$\deg(v) + \deg(w) \geq |V| \implies$ GRAF JEST HAMILTO-NA.

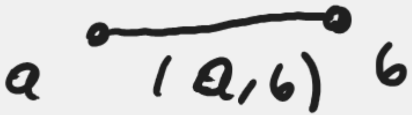
$\deg$ ← ILE KRAWĘDZI WYCHODZI Z $v$

$\Gamma = (V, E)$

V - WIERZCHOŁKI

E - KRAWĘDZIE

$E \subset V \times V$




$(a,b) \in E \subset V \times V$



GRAF NAZYWAMY PROSTYM JEŚLI NIE MA ON PODWÓJNYCH KRAWĘDZI ORAZ PĘTLI.

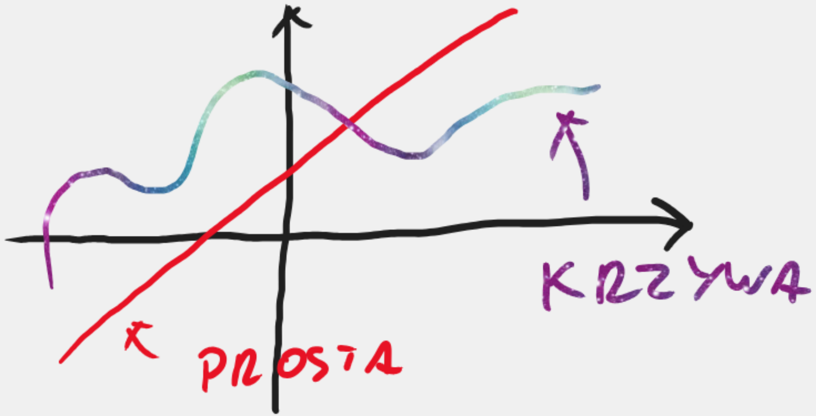
$\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$

$y = ax + b$ ← RÓWNANIE

$t \in \mathbb{R}$

$(x_0 + at, y_0 + bt)$

↑ PARAMETRYZACJA



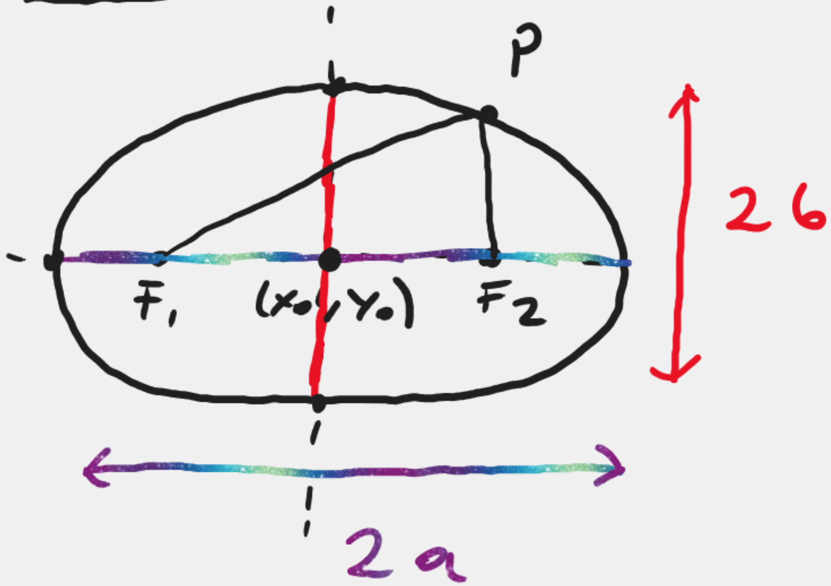

PARAMETRYZACJI $(x(t), y(t))$

RÓWNANIE $F(x, y) = 0$

ROZWAŻYMY $x(t), y(t), F(x,y)$
WIELOMIANY STOPNIA 2

JEŚLI TE WIELOMIANY
MIAŁY BY STOPIEŃ 1 LUB
0 TO DOSTALIBYŚMY
SYTUACJĘ Z LEWEJ CZYLI
GEOMETRYCZNIE PROSTE

# ELIPSA




JEŻELI $a = b$
TO WTEDY
ELIPSA JEST
OKRĘGIEM

ELIPSA: PUNKTY P. T. ŻE
$d(P, F_1) + d(P, F_2) = \text{const}$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

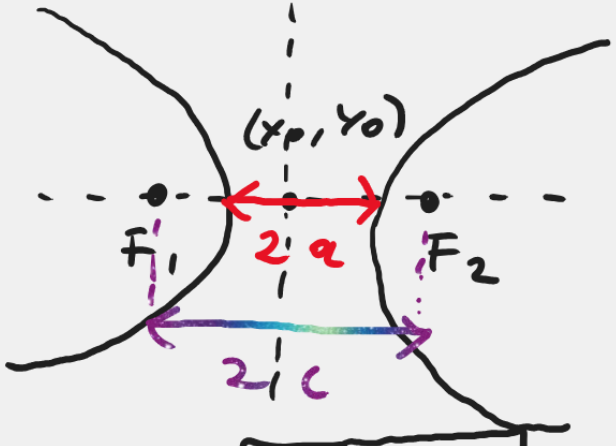
RÓWNANIE ELIPSY

$$(x_0 + a\cos(t),\ y_0 + b\sin(t))$$

PARAMETRYZACJA

# HIPERBOLA

PUNKTY P T. ŻE $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = \text{const}$




$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

RÓWNANIE HIPERBOLI:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

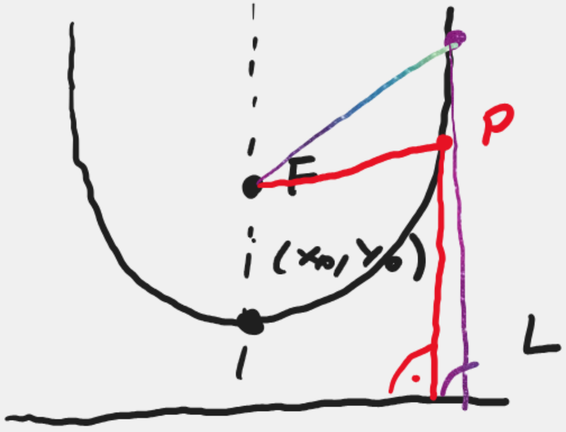
PARAMETRYZACJA:

$$(x_0 + a\cosh(t), \; y_0 + b\sinh(t))$$

sinh, cosh SPEŁNIAJĄ:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

# PARABOLA




PUNKTY P T. ŻE $d(P,F) = d(P,L)$

RÓWNANIE: $y = ax^2 + bx + c$

PARAMETRYZACJĘ $(t,\ at^2 + bt + c)$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$y_0 = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

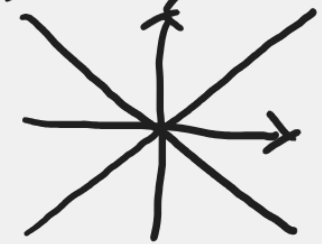
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

KRZYWE
STOŻKOWE

$$x^2 - y^2 = 0$$



# POWIERZCHNIE W $\mathbb{R}^3$

$F(x, y, z) = \text{const}$ RÓWNANIE PŁASZCZYZNY

$(x(s,t),\ y(s,t),\ z(s,t))$ PARAMETRYZACJA POWIERZCHNI

$z = 0$ PŁASZCZYZNA $xy$

$y = 0$ PŁ. $xz$

$x = 0$ PŁ. $yz$

W OGÓLNOŚCI RÓWNANIE LINIOWE $(x + 2y - 3z = 5)$ DAJĄ NAM NIE-ZAKRZYWIONE PŁASZCZYZNY

ROZWAŻYMY SYTUACJĘ KIEDY $F(x,y,z)$ JEST WIELOMIANEM STOPNIA DWA (POWIERZCHNIE KWADRATOWE)