Badania operacyjne

Matematyka Stosowana

5. zestaw zadań

1. Pewna firma zajmuje się kupnem i sprzedażą artykułów jednego rodzaju. Firma ta posiada magazyn na 500 sztuk powyższego towaru. Na początku każdego kwartału może po podanych niżej cenach zamówić dostawy dowolnej wielkości nie przekraczającej aktualnie dostępnego miejsca w magazynie. Produkty są następnie sprzedawane w cenach ustalonych dla całego kwartału (również podanych poniżej). W każdym kwartale trzeba sprzedać tyle produktu, ile wynosi jego podaż (również podana w tabeli). W przypadku, gdy w magazynie jest miejsce, można zakupić więcej produktu i sprzedać w kolejnych miesiącach. Ile firma powinna kupować w poszczególnych miesiącach, żeby maksymalizować swój roczny zysk (kwotę uzyskaną ze sprzedaży minus kwotę wydaną na zakup)?

Kwartał	Podaż	Cena zakupu	Cena sprzedaży
I	280	140	165
II	320	150	170
III	210	155	175
IV	340	130	160

Zadanie rozwiąż korzystając z programowania dynamicznego (za stan przyjmij liczbę produktów zakupionych w poszczególnych kwartałach znajdującą się w magazynie na początku poszczególnych kwartałów).

2. ([JS20]) Zakład produkcyjny winien pokryć zapotrzebowanie na pewien produkt w ciągu 6 pierwszych miesięcy pewnego roku. Zapotrzebowanie na produkt w każdym miesiącu wynosi 3 jednostki. W każdym miesiącu zakład może uruchomić produkcję produktu. Uruchomienie produkcji pociąga za sobą koszt 13 tysięcy PLN. Zakład może wyprodukować w każdym miesiącu co najwyżej 5 jednostek produktu, przy czym wytwarzanie ułamków jednostki produktu jest niedopuszczalne. Wytworzenie pierwszej jednostki produktu kosztuje 3 tys. PLN, drugiej - 2 tys. PLN, zaś trzeciej i czwartej po 1 tys. PLN Produkowanie piątej jednostki wymaga uruchomienia dodatkowych urządzeń, a stąd koszt jej uruchomienia wynosi 4 tys. PLN Reasumując, funkcja $f(x)$ kosztów produkcji x jednostek w danym miesiącu przyjmuje wartości podane w tablicy.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	16	18	19	20	24

Zapotrzebowanie w każdym miesiącu może być pokrywane produktem wytworzonym w danym miesiącu lub w miesiącach poprzednich. W tym drugim przypadku zakład ponosi dodatkowy koszt magazynowania wynoszący 2 tys. PLN za jednostkę magazynową w ciągu miesiąca. Pojemność magazynu pozwala na magazynowanie co najwyżej 4 jednostek.
Jakie ilości produktu należy wytwarzać, aby łączne koszty produkcji i magazynowania były jak najmniejsze, jeśli zapas na początku stycznia i w końcu czerwca ma wynosić 0 jednostek? Odpowiedz na to pytanie przy użyciu programowania dynamicznego.

3. Załóżmy, że drobne przedsiębiorstwo rybackie ma jako jedyne dostęp do akwenu, w którym znajduje się $s_0 = 100$ ton ryb. W każdym miesiącu t może odłowić dowolną ilość $x_t \leqslant s_t$ ryb. Ryby następnie rozmnażają się – możemy przyjąć, że z pozostałych $s_t - x_t$ ryb w kolejnym miesiącu do odłowienia będzie $s_{t+1} = 10\sqrt{s_t - x_t}$ ryb. Załóżmy, że dzierżawa łowiska kończy się po 4 miesiącach. Ile ryb przedsiębiorstwo powinno odłowić w 1., 2., 3. i 4. miesiącu, żeby zmaksymalizować sumę użyteczności z połowów w kolejnych miesiącach przy założeniu, że użyteczność ze złowienia x ryb wynosi $u(x) = \ln(x)$? Rozwiązanie znajdź, korzystając z programowania dynamicznego.

4. Załóżmy, że masz do zainwestowania 10 000PLN i chcesz podzielić swoją inwestycję pomiędzy 4 programy inwestycyjne. Wiesz, że zwrot z inwestycji x tys. PLN w 1. program wynosi $\frac{1}{2}x + 3\mathbb{1}\{x \geqslant 1\}$ (tys. PLN), zwrot z 2. programu, x, z 3. programu, $\frac{14}{5}x - \frac{x^2}{10}$, natomiast z 4. programu, $\frac{1}{5}x^2$. Oblicz, jakie kwoty należy zainwestować w poszczególne programy, aby zmaksymalizować zwrot z inwestycji. Zrób to, korzystając z programowania dynamicznego.
Wskazówka: W programowaniu dynamicznym potraktuj numer inwestycji jak czas.

5. ([JS20]) Dany jest obiekt, będący zespołem urządzeń U1, U2, U3 połączonych równolegle (awaria układu jest równoważna awarii wszystkich urządzeń). Poniżej przedstawiono prawdopodobieństwa tego, że jeśli na remont i-tego urządzenia przeznaczono j tysięcy PLN, to nie ulegnie ono awarii.

wydatek	0	1	2	3	4
U1	0.2	0.2	0.4	0.6	0.7
U2	0.1	0.3	0.5	0.7	0.8
U3	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8

Urządzenia ulegają awariom niezależnie od siebie. Przedsiębiorstwo przeznaczyło 4000PLN na remont całego obiektu. Z pomocą programowania dynamicznego określić optymalny przydział środków maksymalizujący prawdopodobieństwo braku awarii całego obiektu po dokonaniu remontu poszczególnych urządzeń.
Wskażówka: Podobnie jak w poprzednim zadaniu, wybór kwoty przeznaczonej na remont k-tego urządzenia potraktuj jako k-ty etap programowania dynamicznego.

6. Rozważ następującą sytuację: Zysk z produkcji pewnej firmy zależy od stanu, w jakim znajdują się maszyny, na których produkowane są jej produkty. Stan możemy określić jako liczbę naturalną z przedziału od 0 do 5. Jeśli jest on większy bądź równy 3, o ile maszyny nie są w danym miesiącu serwisowane, miesięczny zysk wynosi 100 000PLN, dla stanu 2 efektywność działania maszyn spada (co jakiś czas praca musi być przerywana z powodu usterek), co zmniejsza zysk do 90 000PLN. Dla stanu 1 spada do 60 000PLN, natomiast stan 0 oznacza, że zysk jest zerowy. W każdym miesiącu (o ile stan maszyn jest różny od 0 – wtedy maszyna jest całkowicie zepsuta i nic już się nie da zrobić) dyrekcja przedsiębiorstwa podejmuje decyzję o tym, czy maszyny mają zostać poddane serwisowi. W takiej sytuacji miesięczny zysk spada o połowę (uwzględniając w tym koszt serwisu). Ma to jednak dodatkowo następujący skutek: jeśli maszyna była serwisowana, jej stan wzrasta z s do $\min\{s+3,5\}$, o ile $s \geqslant 3$ lub do $s+2$, jeśli jej stan wynosił 1 lub 2. Z drugiej strony, stan maszyny, która nie jest serwisowana, spada w kolejnym miesiącu o 1. Dodatkowo zakładamy, że w każdym miesiącu z niewielkim prawdopodobieństwem $1-\beta$ przedsiębiorstwo przestaje działać z przyczyn niezwiązanych ze stanem maszyn.

   Korzystając z programowania dynamicznego określ, dla jakich stanów maszyny należy zlecać prace serwisowe, aby zmaksymalizować zysk firmy.

7. Załóżmy, że drobne przedsiębiorstwo rybackie ma jako jedyne dostęp do akwenu, w którym znajduje się $s_0 = 100$ ton ryb. W każdym miesiącu t może odłowić dowolną ilość $x_t \leqslant s_t$ ryb. Ryby następnie rozmnażają się – możemy przyjąć, że z pozostałych $s_t - x_t$ ryb w kolejnym miesiącu do odłowienia będzie $s_{t+1} = 10\sqrt{s_t - x_t}$ ryb. Tym razem załóżmy, że dzierżawa łowiska jest na czas nieokreślony. Znajdź politykę stacjonarną, której używać powinno przedsiębiorstwo, aby zmaksymalizować zdyskontowaną sumę użyteczności z połowów na kolejnych etapach, jeśli użyteczność mierzona jest przy pomocy funkcji $u(x) = \ln(x)$ (zrób to dla dowolnego współczynnika dyskonta $\beta \in (0,1)$). Rozwiązanie znajdź, korzystając z programowania dynamicznego.
Wskazówka: $V(s)$ będzie postaci $A\ln(Bs)$.

8. Załóżmy, że zysk pewnej firmy na przestrzeni miesiąca t ze sprzedaży produkowanych przez nią wyrobów zależy od stanu $s_t \in [0,\infty)$ posiadanych urządzeń wykorzystywanych w produkcji w następujący sposób: $f(s_t) = 50\sqrt{s_t}$. Aktualny stan urządzeń w $t+1$. miesiącu zależy od stanu w poprzednim miesiącu s_t oraz pieniędzy zainwestowanych w t. miesiącu $x_t \in \mathbb{R}$ w następujący sposób: $s_{t+1} = \frac{4}{5}s_t + \frac{1}{10}x_t$.

   (a) Znajdź politykę stacjonarną umożliwiającą maksymalizację zdyskontowanej sumy zysków ze sprzedaży na poszczególnych miesiącach pomniejszonych o sumy pieniędzy wydanych na poprawę stanu urządzeń.
   Wskazówka: $V(s)$ będzie postaci $As + B\sqrt{s} + C$.

   (b) Oczywiście w praktyce $x_t \geqslant 0$. Założenie o możliwej ujemności inwestycji jest jednak potrzebne do znalezienia optymalnej polityki stacjonarnej. Dla jakich wartości stanu s uzyskany wynik będzie mimo wszystko poprawny, jeśli założymy, że $x_t \geqslant 0$?

Literatura:

[JS20] K. Jakowska-Suwalska, Programowanie dynamiczne. Przykłady i zadania. Dostępne na stronie Politechniki Śląskiej, 2020.