Teoria i metody optymalizacji

Automatyka i Robotyka

2. zestaw zadań

1. ([AEP07]) Zapisz następujący problem jako zadanie programowania całkowitoliczbowego: Sieć supermarketów planuje wybudować pewną liczbę centrów przeładunkowych dla zaopatrzenia 30 istniejących supermarketów. Wytypowano 10 możliwych lokalizacji. Wiadomo, że wybudowanie centrum w miejscu i ($i = 1, \ldots, 10$) wiąże sie z kosztem c_i oraz że przepustowość takiego centrum będzie umożliwiała rozesłanie z niego k_i dostaw towarów w tygodniu. Z drugiej strony wiadomo, że supermarket j potrzebuje e_j dostaw tygodniowo i że te potrzeby muszą zostać spełnione. Dodatkowo znane są odległości w kilometrach d_{ij} pomiędzy każdą z potencjalnych lokalizacji centrów przeładunkowych i a każdym supermarketem j, $i = 1, \ldots, 10$, $j = 1, \ldots, 30$. Planujący inwestycję zakładają, że centra powinny być położone nie dalej niż D km od każdego z supermarketów, które zaopatrują. Należy zaplanować, w których z 10 lokalizacji wybudować centra przeładunkowe tak, aby zminimalizować koszty inwestycji przy spełnieniu wszystkich opisanych ograniczeń.

2. n zadań należy przydzielić do 1 z 4 identycznych procesorów P_1, P_2, P_3 oraz P_4. Zadanie i zajmuje na dowolnym procesorze $t_i > 0$ nanosekund. Naszym celem jest utworzenie czterech podzbiorów S_1, S_2, S_3 i S_4 zbioru $\{1, \ldots, n\}$, spełniających $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \{1, \ldots, n\}$ oraz takich żeby całkowity czas wykonania wszystkich zadań (zadania na różnych procesorach wykonywane są równolegle)
$$T_{\max} = \max\left\{\sum_{i\in S_1} t_i, \sum_{i\in S_2} t_i, \sum_{i\in S_3} t_i, \sum_{i\in S_4} t_i\right\}$$
był najmniejszy możliwy. Zapisz zadanie programowania całkowitoliczbowego umożliwiające znalezienie optymalnej wartości $T_{\max}$.

3. Na maszynę składają się 3 moduły: A, B i C. Każdy moduł można wykonać z podzespołów 5 typów (typu 1., typu 2., itd.) Liczby podzespołów typu 1. i 2.. potrzebnych do stworzenia każdego z modułów opisuje tabela:

Moduł	Podzespołów typu 1.	Podzespołów typu 2.
A	2	2
B	1	4
C	3	5

Alternatywnie, można wykonać zamienniki podzespołów typu 1. i 2. z prostszych podzespołów typu 3., 4. i 5. i posłużyć się tymi zamiennikami przy produkcji maszyny. Zamiennik podzespołu 1. typu wykonujemy z 2 podzespołów typu 4. oraz 1 typu 5. Zamiennik podzespołu 2. typu wykonujemy z 3 podzespołów typu 3., 1 typu 4. i 1 typu 5. Koszty zakupu pojedynczego podzespołu każdego z typów oraz jego pobór mocy podane są w tabeli:

	Typ 1.	Typ 2.	Typ 3.	Typ 4.	Typ 5.
Coszt [PLN]	16	25	3	5	2
Pobór mocy [W/h]	52	83	24	17	32

Ile podzespołów którego typu powinno być wykorzystanych do produkcji poszczególnych modułów, jeśli celem projektanta jest minimalizacja kosztu produkcji (zakładamy, że cena robocizny jest niezależna od tego, z jakich podzespołów wykonamy naszą maszynę) maszyny przy ograniczeniu całkowitego zużycia mocy do E watów na godzinę. Zapisz (bez rozwiązywania) zadanie programowania całkowitoliczbowego umożliwiające odpowiedź na to pytanie.

4. Zapisz następujący problem jako zadanie programowania całkowitoliczbowego: Pewien przewoźnik planuje, ilu kierowców zatrudnić i jak przydzielić ich do pracy w różnych godzinach. Może zatrudnić kierowców na pełen etat – wtedy pracują przez 8 kolejnych godzin. Może zatrudnić kierowców na pół etatu, którzy pracują przez 4 kolejne godziny. Zapotrzebowanie na kierowców zmienia się w ciągu dnia. W okresie między 6 a 10 potrzeba 3 kierowców, w godzinach 10–14 – 8, od 14 do 18 – 6, natomiast między 18 a 22 – 4. Zakładamy, że każdy kierowca zaczyna pracę o 6, 10, 14 lub 18 i powtarza swój plan każdego dnia. Pracownicy zatrudnieni na pełen etat dostają 10PLN za godzinę, natomiast ci zatrudnieni na pół etatu – 12PLN za godzinę. Liczba kierowców możliwych do zatrudnienia na pełen etat jest ograniczona do 10. Celem przewoźnika jest zminimalizowanie kosztów przy zapewnieniu obsady dla wszystkich autobusów.

5. Rozwiąż zadanie

$$\begin{array}{ll} \text{Zmaksymalizuj} & x_1 + 3x_2 \\ \text{przy ograniczeniach} & 2x_1 + x_2 \leqslant 8, \\ & -x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \text{ i całkowite} \end{array}$$

przy pomocy metody podziału i ograniczeń. Każde z zadań programowania liniowego, które będziesz musiał rozwiązać po drodze, ma być rozwiązane przy pomocy metody graficznej.

6. Rozwiąż zadanie

$$\begin{array}{ll} \text{Zmaksymalizuj} & 4x_1 + 3x_2, \\ \text{przy ograniczeniach} & x_1 + 3x_2 \leqslant 12, \\ & 3x_1 + 2x_2 \leqslant 21, \\ & -2x_1 + 6x_2 \leqslant 7, \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \text{ i całkowite} \end{array}$$

przy pomocy metody podziału i ograniczeń. Każde z zadań programowania liniowego, które będziesz musiał rozwiązać po drodze, ma być rozwiązane przy pomocy metody graficznej.

Literatura:

[AEP07] N. Andreasson, A. Evgrafov, M. Patriksson, An Introduction to Continuous Optimization, Studentlitteratur AB, 2007,