

Komputerowa analiza szeregów czasowych 2016/2017

Lista 2

1. Rozpatrzmy model regresji dany następującym wzorem:

$$Y_i = \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie ϵ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ są niezależnymi błędami o rozkładzie $N(0, \sigma)$.

- a) Wyznacz postać estymatora $\hat{\beta}_1$ współczynnika kierunkowego metodą najmniejszych kwadratów.
 - b) Sprawdź czy wyznaczony estymator jest estymatorem nieobciążonym parametru β_1 .
 - c) Wyznacz wariancję estymatora.
 - d) Policz $cov(\bar{Y}, \hat{\beta}_1)$.
2. W modelu regresji

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{1}$$

gdzie ϵ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $N(0, \sigma)$, za pomocą metody Monte Carlo sprawdź rozkład estymatorów $\hat{\beta}_0$ oraz $\hat{\beta}_1$ i porównaj go z rozkładem teoretycznym przy ustalonej wielkości σ .

3. Wykorzystując tą samą metodę co w poprzednim zadaniu, sprawdź rozkłady studentyzowanych estymatorów $\hat{\beta}_0$ oraz $\hat{\beta}_1$ i porównaj je z rozkładami teoretycznymi.
4. Skonstruuj przedziały ufności dla parametrów β_0 i β_1 z równania (1) na danym poziomie ufności α . Następnie za pomocą metody Monte Carlo, sprawdź jakie jest prawdopodobieństwo, że teoretyczne wartości parametrów należą do wyznaczonych przedziałów ufności. Wyniki wykonaj dla różnych długości prób oraz w dwóch przypadkach, kiedy σ jest znana i nieznana.
5. Dla danych z zadania 1/lista 1 skonstruuj prostą regresji na podstawie 990 najmniejszych obserwacji. Skonstruuj przedział ufności dla prognozy w modelu regresji (1) dla ostatnich

10 największych obserwacji i porównaj z danymi. Zadanie wykonaj przy założeniu, że σ jest znana i nieznana.

6. Wsymuluj dwuwymiarowy wektor (x, Y) opisany równaniem (1). Wyznacz przedziały ufności dla wartości średniej zmiennej $Y(x_0)$ dla $x_0 = \bar{x}$ dla różnych wielkości n przy założeniu, że σ jest wielkością znaną.