M. C. Escher – artysta, który w XX wieku odkrył twierdzenia nieznane matematykom

Tomasz Żak

Politechnika Wrocławska

24 marca 2011

Starożytna Grecja:

- Platon i harmonia sfer,

Starożytna Grecja:

- Platon i harmonia sfer,
- złoty podział,

Starożytna Grecja:

- Platon i harmonia sfer,
- złoty podział,
- kanon rzeźby (Poliklet) itp.

Sztuka wyprzedza naukę:

- Perspektywa w malarstwie:

Sztuka wyprzedza naukę:

- Perspektywa w malarstwie:
- rok 1425 pomysły Bruneleschiego (podobno wykreślił linie zbieżne) na obrazie Masaccia *Trójca święta*

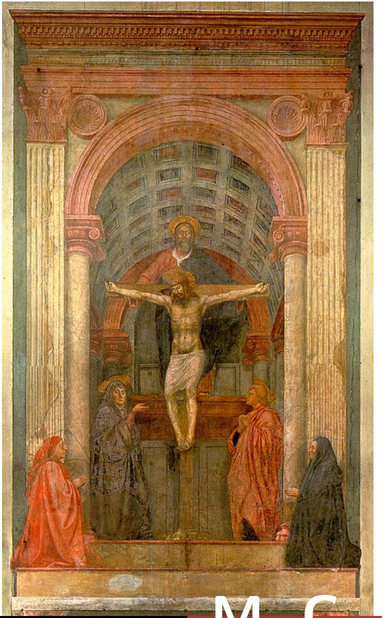
Sztuka wyprzedza naukę:

- Perspektywa w malarstwie:
- rok 1425 pomysły Bruneleschiego (podobno wykreślił linie zbieżne) na obrazie Masaccia *Trójca święta*
- rok 1435 Leon Battista Alberti w traktacie *De pictura* podaje teoretyczne podstawy perspektywy linearnej

Sztuka wyprzedza naukę:

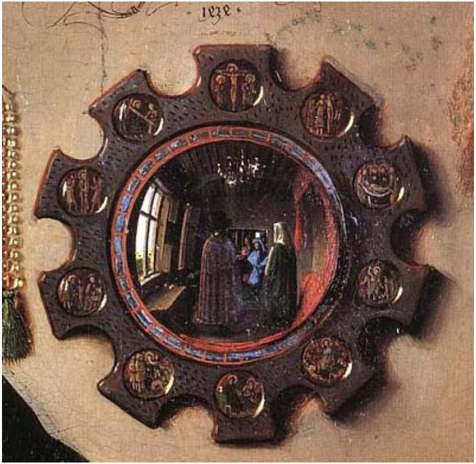
- Perspektywa w malarstwie:
- rok 1425 pomysły Bruneleschiego (podobno wykreślił linie zbieżne) na obrazie Masaccia *Trójca święta*
- rok 1435 Leon Battista Alberti w traktacie *De pictura* podaje teoretyczne podstawy perspektywy linearnej
- Piero della Francesca i Leonardo da Vinci

Masaccio



Jan van Eyck: *Portret Arnolfinich*

Jan van Eyck: *Portret Arnolfinich*

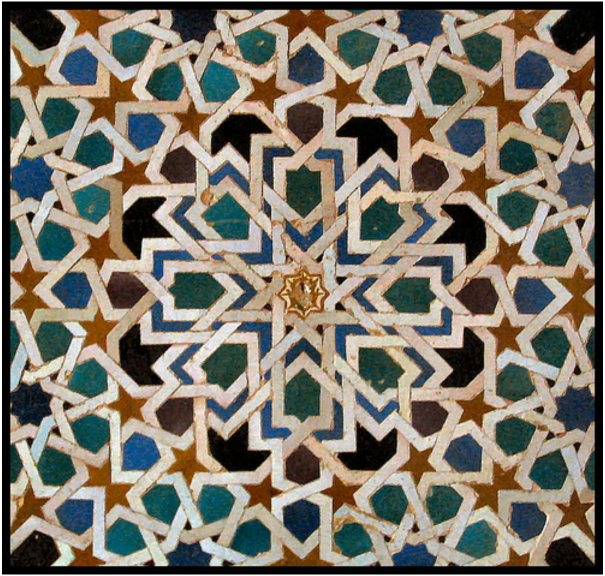


Światło: Vermeer

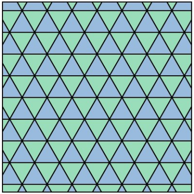
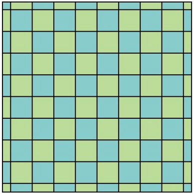
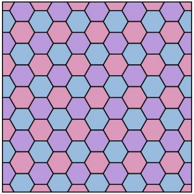
Światło: impresjoniści

Impression: Sunrise, Claude Monet, 1873

Symetria w sztuce: mozaiki Alhambry



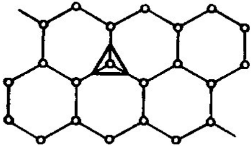
Parkietażem nazywamy pokrycie płaszczyzny takimi wielokątami, które nie zachodzą na siebie.

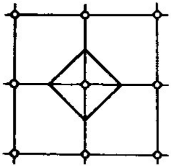
Parkietaż foremny składa się z przystających wielokątów foremnych.

Parkietaże foremne

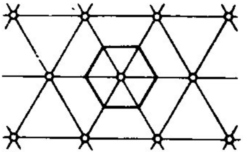
Każdy parkietaż ma swój symbol Schläfliego $\{p, q\}$, symbol ten oznacza, że płaszczyzna pokryta jest wielokątami o p bokach, a w każdym wierzchołku schodzi się q wielokątów.



$\{6, 3\}$



$\{4, 4\}$



$\{3, 6\}$

Twierdzenie: Istnieją tylko 3 parkietaże wielokątne foremne.

Dowód

Kąt wewnętrzny p-kąta foremnego ma miarę$(1 - \frac{2}{p})\pi$, jeśli q takich kątów schodzi się w wierzchołku, a wielokąty mają wypełniać całą płaszczyznę, to

$$\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi = \frac{2\pi}{q}, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$$

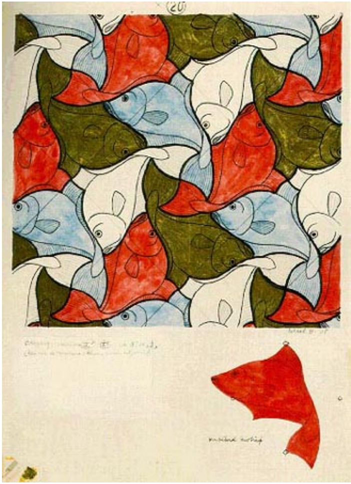
czyli

$$(p-2)(q-2) = 4.$$

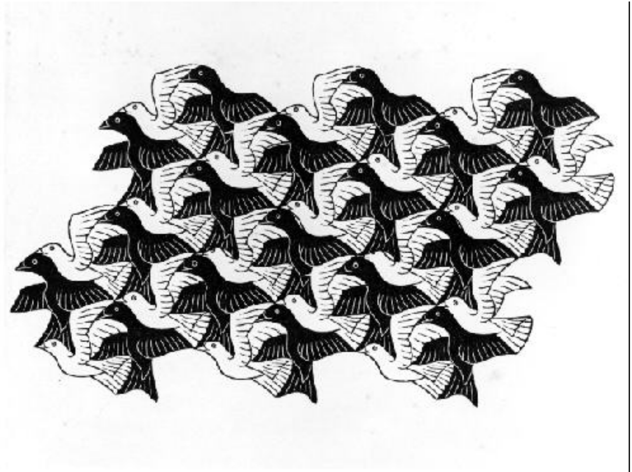
To równanie ma tylko 3 rozwiązania w liczbach naturalnych: $p = 6, q = 3$, oraz pary $4,\ 4$ i $3,\ 6$, a one dają trzy opisane parkietaże.

Niewielokątne pokrycia płaszczyzny

Rozszerzmy definicję parkietażu, dopuszczając figury przystające, które nie są wielokątami. I tu wkracza sztuka.



Dwie różne figury.



Figury coraz mniejsze

Ile jest **istotnie różnych** parkietaży płaszczyzny?

- Klasyczny parkietaż jest **okresowy**, gdyż powstaje przez przesuwanie, obracanie i odbijanie (symetrię) pewnego zestawu figur, tworzących tzw. **obszar fundamentalny**. Te przekształcenia tworzą grupę przekształceń.

Parkietaże

Ile jest **istotnie różnych** parkietaży płaszczyzny?

- Klasyczny parkietaż jest **okresowy**, gdyż powstaje przez przesuwanie, obracanie i odbijanie (symetrię) pewnego zestawu figur, tworzących tzw. **obszar fundamentalny**. Te przekształcenia tworzą grupę przekształceń.
- Ile jest różnych (nieizomorficznych) takich grup?

Ile jest **istotnie różnych** parkietaży płaszczyzny?

- Klasyczny parkietaż jest **okresowy**, gdyż powstaje przez przesuwanie, obracanie i odbijanie (symetrię) pewnego zestawu figur, tworzących tzw. **obszar fundamentalny**. Te przekształcenia tworzą grupę przekształceń.
- Ile jest różnych (nieizomorficznych) takich grup?
- 17.

Ile jest **istotnie różnych** parkietaży płaszczyzny?

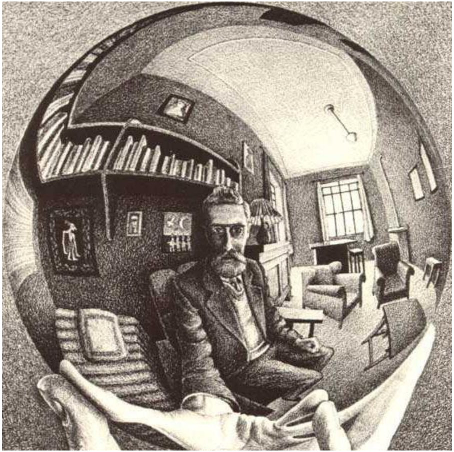
- Klasyczny parkietaż jest **okresowy**, gdyż powstaje przez przesuwanie, obracanie i odbijanie (symetrię) pewnego zestawu figur, tworzących tzw. **obszar fundamentalny**. Te przekształcenia tworzą grupę przekształceń.
- Ile jest różnych (nieizomorficznych) takich grup?
- 17.
- W Alhambrze są przykłady wszystkich siedemnastu.

Ile jest **istotnie różnych** parkietaży płaszczyzny?

- Klasyczny parkietaż jest **okresowy**, gdyż powstaje przez przesuwanie, obracanie i odbijanie (symetrię) pewnego zestawu figur, tworzących tzw. **obszar fundamentalny**. Te przekształcenia tworzą grupę przekształceń.
- Ile jest różnych (nieizomorficznych) takich grup?
- 17.
- W Alhambrze są przykłady wszystkich siedemnastu.
- W pewnym sensie są to „płaskie kryształy”.

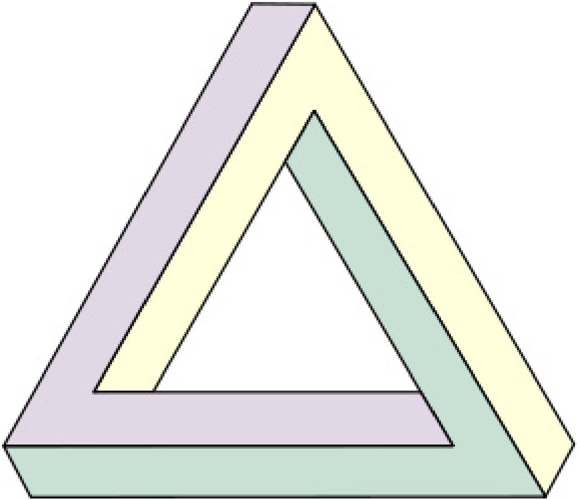
Maurits Cornelis Escher (1898–1972)

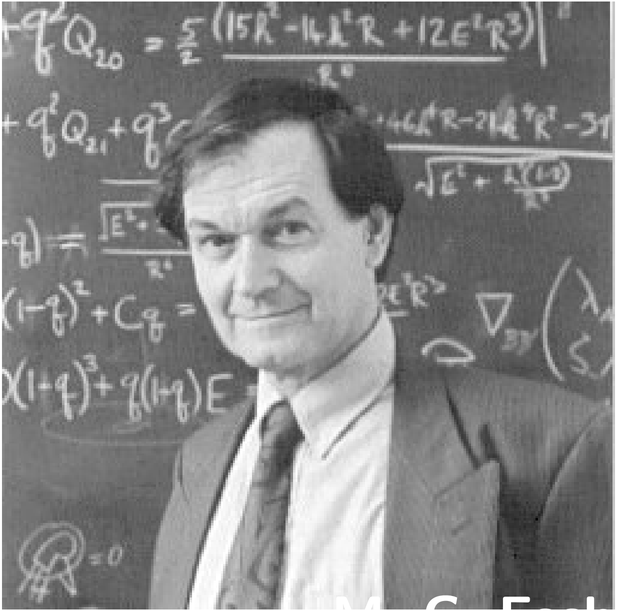
448 prac (litografie, drzeworyty), http://www.mcescher.com/



Escher i jego figury niemożliwe

Trójkąt Penrose'a





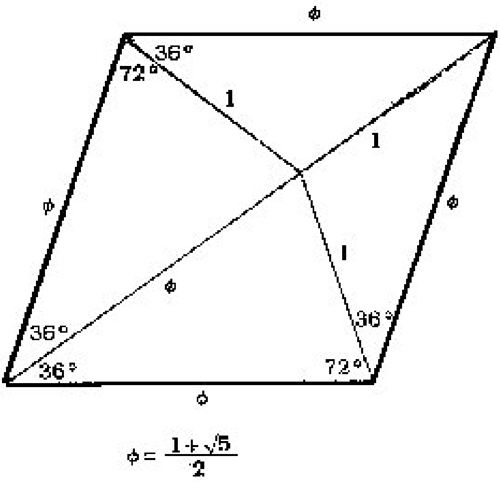
W latach 60-tych XX wieku odkryto zestaw wielokątów, którymi można pokryć płaszczyznę w sposób nieokresowy, tzn. nie ma on „symetrii translacyjnej". Taki zestaw miał ponad 20 000 figur. (Hao Wang, Berger)

Na początku lat 70-tych XX wieku Roger Penrose podał zestaw **dwu** wielokątów, które tworzą parkietaż nieokresowy.

Słowa kluczowe dla wyszukiwarki: Penrose tiling, Penrose tesselation

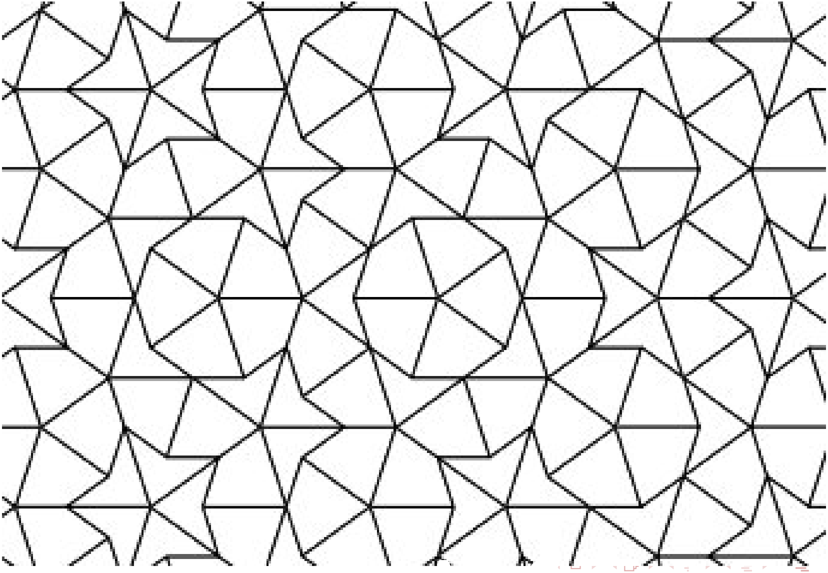
Parkietaż Penrose'a

Ten zestaw to *latawiec* (kite) i *strzałka* (dart):



Uwaga: $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61$ to *złota liczba*!

Parkietaż Penrose'a

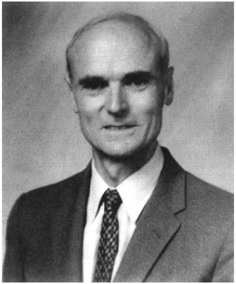


Parkietaż Penrose'a

The history of quasicrystals begins with the 1984 paper "Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry" where D. Shechtman et al. demonstrated a clear diffraction pattern with a fivefold symmetry.

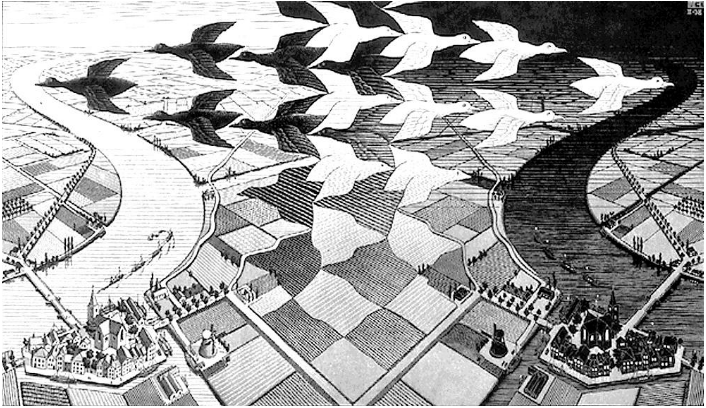
Zastosowania kwazikryształów.

Studiował w Cambridge, potem większość życia spędził w Toronto (Kanada). Był jednym z wielkich geometrów XX wieku.



Zajmował się wielościanami, teorią grup dyskretnych, kombinatoryką i geometrią nieeuklidesową. Napisał 12 książek, w tym o geometrii nieeuklidesowej.

W roku 1954 ICM odbył się w Amsterdamie. Z tej okazji zorganizowano wystawę prac Eschera. Poniżej praca *Dzień i noc*.

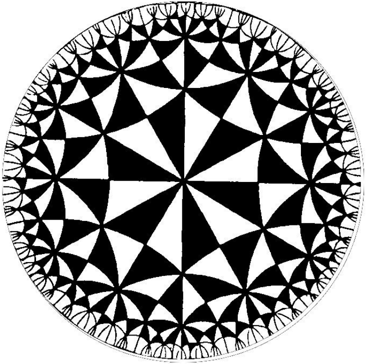


W czasie tego Kongresu Coxeter i Escher poznali się osobiście, znajomość była tym łatwiejsza, że żona Coxetera była Holenderką.

W roku 1957 Coxeter, będąc Prezesem Royal Society of Canada, wygłosił wykład plenarny poświęcony symetrii przestrzeni euklidesowych i hiperbolicznych. Pamiętając o twórczości Eschera, poprosił go o pozwolenie zilustrowania wykładu niektórymi grafikami Eschera. Oczywiście Escher zgodził się, w rewanżu Coxeter posłał mu odbitkę artykułu, który powstał na bazie tego wykładu.

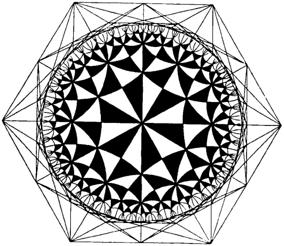
Escher i Coxeter

Escher był bardzo dumny z ukazania się jego grafik w pracy matematycznej. Jednak to nie ich opublikowanie wywarło ogromne wrażenie na Escherze, a jeden z rysunków we wspomnianej pracy Coxetera.



W roku 1958 Escher napisał w liście do Coxetera:
„Mimo że tekst Pańskiej pracy okazał się o wiele za trudny dla prostego samouka, który tylko nauczył się pokrywać płaszczynę wzorami, kilka ilustracji, a zwłaszcza jedna, wstrząsnęły mną.

Od kilku lat interesują mnie wzory z malejącymi motywami, których rozmiary ciągle maleją wraz ze zbliżaniem się motywów do granicy. To zadanie jest łatwe, gdy granicą jest punkt w centrum wzoru. Nieobca jest mi również granica, która jest linią prostą, ale nigdy nie byłem w stanie wykonać wzoru, w którym motywy malałyby wraz ze zbliżaniem się do okręgu, tak, jak to jest na Pańskim rysunku."



„Próbowałem zrozumieć, jak skonstruowany jest ten wzór, ale zdołałem tylko znaleźć środki i promienie największych okręgów. [...]
Czy istnieją inne sposoby zbliżania się do granicznego okręgu? [...]
Mimo mej niewiedzy, użyłem Pańskiego modelu w dużym drzeworycie (wykonawszy tylko wycinek 120°, odbiłem go trzykrotnie). Przesyłam Panu kopię."

Circle limit I

Odpowiadając na list Eschera, Coxeter napisał, że płaszczyznę euklidesową można pokryć białymi i czarnymi trójkątami na trzy tylko sposoby:

jeśli kąty każdego trójkąta z danego parkietażu płaszczyzny mają miary $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$, $\frac{\pi}{r}$ i w jednym wierzchołku spotyka się p białych i p czarnych trójkątów, w innym q białych i q czarnych, a w trzecim r i r, to, ponieważ suma miar kątów trójkąta jest równa π, więc

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1,$$

stąd jedynymi trzema sposobami są: $(3, 3, 3)$, $(4, 4, 2)$ oraz $(6, 3, 2)$.

Jeśli rozważamy geometrię na sferze, to rolę prostych odgrywają koła wielkie (przecięcia sfery płaszczyznami, przechodzącymi przez jej środek). Wtedy suma kątów trójkąta (tzn. takiej figury na sferze, której bokami są spójne fragmenty kół wielkich) musi być większa od π, więc wszystkie grupy symetrii określa nierówność

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1,$$

której rozwiązaniami są trójki liczb $(p, 2, 2)$, $(3, 3, 2)$, $(4, 3, 2)$ oraz $(5, 3, 2)$.

Natomiast w geometrii hiperbolicznej suma kątów trójkąta jest zawsze mniejsza od π, więc możliwości jest nieskończenie wiele, albowiem nierówność

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych większych niż 2.

W liście do syna Escher napisał: *Coxeter pisze, że istnieje nieskończenie wiele sposobów zbliżania się do okręgu i daje przykład wartości trzy i siedem. Jednak liczba siedem, jako nieparzysta, jest bezużyteczna dla moich celów. Wydaje mi się, że Coxeterowi bardzo trudno jest pisać w sposób zrozumiały dla laika, bo jego wyjaśnienie nic mi nie dało. Zapewne jedno słowo Coxetera pomogłoby mi, jednak postanowiłem zgłębić problem samodzielnie. Ponieważ jestem entuzjastycznie nastawiony do zadania, mam nadzieję, że ostatecznie uda mi się to rozwiązać*.

A pracę nad rozwiązaniem tego problemu nazywał „coxeterowaniem”.

H. Poincare zaproponował następujący model płaszczyzny hiperbolicznej:

- Uniwersum to jednostkowe koło $\mathbb{D}$ na płaszczyźnie, bez brzegu.

Model Poincarego

H. Poincare zaproponował następujący model płaszczyzny hiperbolicznej:

- Uniwersum to jednostkowe koło $\mathbb{D}$ na płaszczyźnie, bez brzegu.
- „Prostymi" są średnice oraz łuki okręgów ortogonalnych do brzegu $\mathbb{D}$.

H. Poincare zaproponował następujący model płaszczyzny hiperbolicznej:

- Uniwersum to jednostkowe koło $\mathbb{D}$ na płaszczyźnie, bez brzegu.
- „Prostymi" są średnice oraz łuki okręgów ortogonalnych do brzegu $\mathbb{D}$.
- Uwaga: okręgi są ortogonalne $\iff$ promienie w punktach przecięcia okręgów tworzą kąt prosty.

H. Poincare zaproponował następujący model płaszczyzny hiperbolicznej:

- Uniwersum to jednostkowe koło $\mathbb{D}$ na płaszczyźnie, bez brzegu.
- „Prostymi" są średnice oraz łuki okręgów ortogonalnych do brzegu $\mathbb{D}$.
- Uwaga: okręgi są ortogonalne $\iff$ promienie w punktach przecięcia okręgów tworzą kąt prosty.
- Izometriami są:

H. Poincare zaproponował następujący model płaszczyzny hiperbolicznej:

- Uniwersum to jednostkowe koło $\mathbb{D}$ na płaszczyźnie, bez brzegu.
- „Prostymi” są średnice oraz łuki okręgów ortogonalnych do brzegu $\mathbb{D}$.
- Uwaga: okręgi są ortogonalne $\iff$ promienie w punktach przecięcia okręgów tworzą kąt prosty.
- Izometriami są:
- symetrie względem średnic,

Model Poincarego

H. Poincare zaproponował następujący model płaszczyzny hiperbolicznej:

- Uniwersum to jednostkowe koło $\mathbb{D}$ na płaszczyźnie, bez brzegu.
- „Prostymi” są średnice oraz łuki okręgów ortogonalnych do brzegu $\mathbb{D}$.
- Uwaga: okręgi są ortogonalne $\iff$ promienie w punktach przecięcia okręgów tworzą kąt prosty.
- Izometriami są:
- symetrie względem średnic,
- obroty względem środka koła $\mathbb{D}$,

Model Poincarego

H. Poincare zaproponował następujący model płaszczyzny hiperbolicznej:

- Uniwersum to jednostkowe koło $\mathbb{D}$ na płaszczyźnie, bez brzegu.
- „Prostymi" są średnice oraz łuki okręgów ortogonalnych do brzegu $\mathbb{D}$.
- Uwaga: okręgi są ortogonalne $\iff$ promienie w punktach przecięcia okręgów tworzą kąt prosty.
- Izometriami są:
- symetrie względem średnic,
- obroty względem środka koła $\mathbb{D}$,
- inwersje względem okręgów ortogonalnych do brzegu $\mathbb{D}$,

Model Poincarego

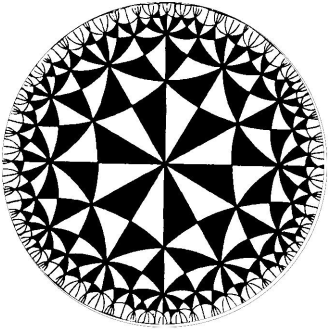
H. Poincare zaproponował następujący model płaszczyzny hiperbolicznej:

- Uniwersum to jednostkowe koło $\mathbb{D}$ na płaszczyźnie, bez brzegu.
- „Prostymi" są średnice oraz łuki okręgów ortogonalnych do brzegu $\mathbb{D}$.
- Uwaga: okręgi są ortogonalne $\iff$ promienie w punktach przecięcia okręgów tworzą kąt prosty.
- Izometriami są:
- symetrie względem średnic,
- obroty względem środka koła $\mathbb{D}$,
- inwersje względem okręgów ortogonalnych do brzegu $\mathbb{D}$,
- złożenia powyższych przekształceń.

Model Poincarego

Model Poincarego jest konforemny, tzn. odległości euklidesowe są zniekształcone, ale **kąty euklidesowe są zachowane**.

Trójkąt to figura, której trzema bokami są fragmenty prostych (łuków okręgów ortogonalnych do brzegu koła lub średnic). Podobnie określamy czworokąt i inne wielokąty. Suma kątów każdego trójkąta ma **mniej** niż 180°.

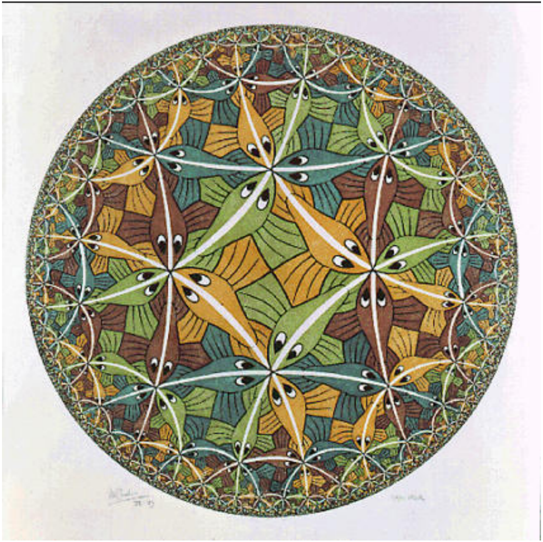


Niedoskonałości Circle limit I

Escher pisze w liście do Coxetera: *Będąc pierwszą próbą, Circle Limit I zawiera wiele niedoskonałości: nie dość, że kształty ryb, będąc wielokątnymi abstrakcjami, pozostawiają wiele do życzenia, to na dodatek ich ustawienie jest złe. Nie ma ani ciągłości przepływu, ani jednorodności koloru w każdym rzędzie.”*

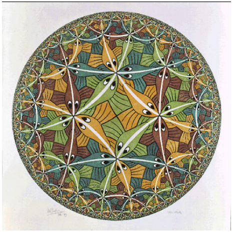
Circle limit III

Od tych niedoskonałości wolny jest Circle limit III z roku 1959.



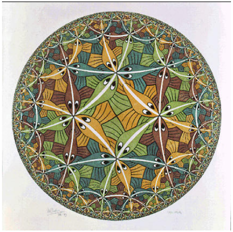
W liście z maja 1960 Escher pisze do Coxetera:

Cały obszar wypełniony jest serią teoretycznie nieskończenie wielu ryb, płynących jedna za drugą i mających ten sam kolor. Białe linie, przechodzące przez środki ich ciał podkreślają ciągłość każdej serii. Potrzebowałem 4 drewnianych bloków – po jednym dla każdego koloru i piątego dla linii czarnych. Każdy blok kolorowy był 90-stopniowym wycinkiem koła. Zatem pełny rysunek wymagał $4 \times 5 = 20$ *odbitek.*



I dalej:

Każda seria ryb wystrzeliwuje niczym rakieta z nieskończoności, **prostopadle do brzegu** *i znika też w nieskończoności, przy czym żaden element nie osiąga brzegu. Na zewnątrz jest „absolutnia nicość”. A jednak ten okrągły świat nie mógłby istnieć bez otaczającej go pustki, nie tylko dlatego, że „wnętrze” zakłada istnienie „zewnętrza”, ale również dlatego, że w tej pustce znajduje się „rusztowanie”, wyznaczające z geometryczną precyzją środki okręgów, tworzących szkielet pracy.*



Circle limit III

Gdy Coxeter otrzymał odbitkę, posłał Escherowi list pełen zachwytu nad głębią matematyki, zawartej w *Circle limit III*.

Circle limit III

Gdy Coxeter otrzymał odbitkę, posłał Escherowi list pełen zachwytu nad głębią matematyki, zawartej w *Circle limit III*.

Escher napisał do syna: *Dostałem entuzjastyczny list od Coxtera, dotyczący moich kolorowych ryb. Trzy strony wyjaśnień, co tak naprawdę udało mi się zrobić. Szkoda, że niczego, absolutnie niczego, z tych wyjaśnień nie zrozumiałem..*

Escher rozwinął własną metodę przekształcenia koła w kwadrat, co zaowocowało pracą *Square limit* z roku 1964.

Circle limit III

W Hadze w roku 1968 odbyła się retrospektywa twórczości Eschera. Do katalogu tej wystawy esej opisujący matematyczne aspekty w twórczości Eschera napisał oczywiscie H.S.M. Coxeter. Znalazło się w nim zdanie dotyczące *Circle limit III*:

Moim zdaniem, drzeworyt byłby jeszcze piękniejszy bez tych białych łuków, które w sposób sztuczny dzielą każdą rybę na dwie nierówne części ***i nie mają matematycznego znaczenia****.*

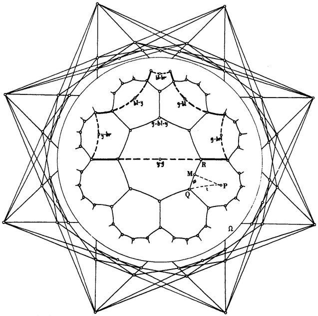
Kiedy po trzech latach esej wszedł w skład książki *The World of M.C. Escher*, Coxeter usunął ostatnie 5 słów.

Matematyka ukryta w Circle limit III

Escher nie dożył niestety momentu, w którym ukazały się dwie matematyczne prace Coxetera poświęcone dziełu *Circle limit III*.

Otóż w roku 1964, Coxeter opisał regularne wielokątne parkietaże płaszczyzny hiperbolicznej.

Już po śmierci Eschera, w jednej z prac analizujących *Circle Limit III* z punktu widzenia matematyki, Coxeter zauważył, że Escher 5 lat przed nim odkrył i umieścił w *Circle limit III* parkietaż typu $\{3, 8\}$, $[6\{8, 8\}]$, $\{8, 3\}$.



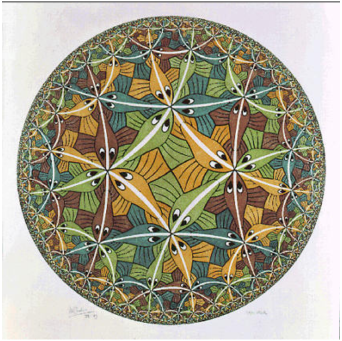
Jak wspomniałem, Escher uważał, że białe linie są prostopadłe do brzegu koła: „Każda seria ryb wystrzeliwuje niczym rakieta z nieskończoności, **prostopadle do brzegu, ...**”

W innej pracy, poświęconej *Circle Limit III* Coxeter postanowił zbadać szczegółowo sposób, w jaki Escher zbudował ten „kolisty wszechświat”.

Wykonał w ten sposób pracę odwrotną do tej, którą uprzednio musiał zrobić Escher. Miał jednak tę przewagę, że znał doskonale geometrię hiperboliczną.

Białe linie w Circle limit III

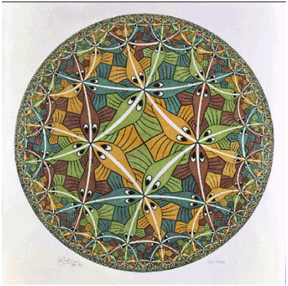
Na pierwszy rzut oka wydaje się, że białe linie tworzą parkietaż płaszczyzny hiperbolicznej, złożony z trójkątów i czworokątów, w których wszystkie kąty mają po 60°. Ale tak być nie może, bo trójkąt o kątach 60° jest trójkątem euklidesowym, a nie hiperbolicznym. Czym zatem są białe linie, o których Coxeter twierdził z początku, że „nie mają matematycznego znaczenia"?

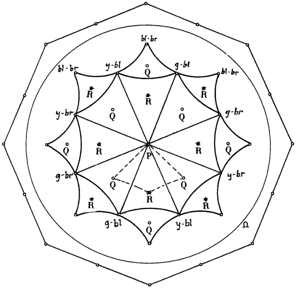


Analiza Circle Limit III

Zauważmy przede wszystkim, że w*Circle Limit III* matematycznie najważniejsze są trzy rodzaje punktów (każdy z typów powtarza się nieskończenie wiele razy):

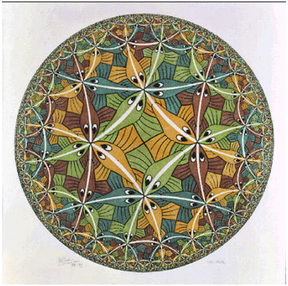
- punkty P, w których zbiegają się prawe płetwy 4 ryb (jak w centrum – zawsze dwa kolory),

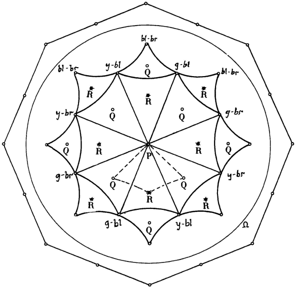




Zauważmy przede wszystkim, że w*Circle Limit III* matematycznie najważniejsze są trzy rodzaje punktów (każdy z typów powtarza się nieskończenie wiele razy):

- punkty P, w których zbiegają się prawe płetwy 4 ryb (jak w centrum – zawsze dwa kolory),
- punkty Q, zbiegu lewych płetw 3 ryb (3 z 4 kolorów),

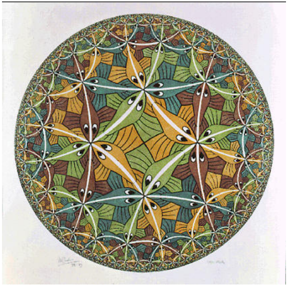


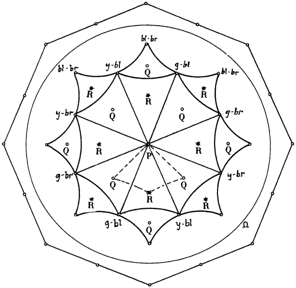


Analiza Circle Limit III

Zauważmy przede wszystkim, że w*Circle Limit III* matematycznie najważniejsze są trzy rodzaje punktów (każdy z typów powtarza się nieskończenie wiele razy):

- punkty P, w których zbiegają się prawe płetwy 4 ryb (jak w centrum – zawsze dwa kolory),
- punkty Q, zbiegu lewych płetw 3 ryb (3 z 4 kolorów),
- punkty R, gdzie pyski 3 ryb spotykają 3 ogony innych ryb (3 z 4 kolorów)

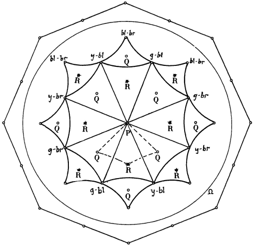


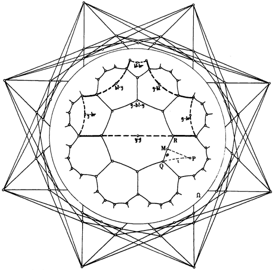


Punkty P są wierzchołkami trójkątów równobocznych (z punktu widzenia metryki hiperbolicznej), przy czym środkiem takiego trójkąta jest zawsze punkt Q lub R.

Każdy punkt P należy do 8 takich trójkątów, mamy więc parkietaż hiperboliczny typu $\{3,\ 8\}$, złożony z przystających trójkątów równobocznych. Ponieważ kąt takiego trójkąta ma 45°, więc w wierzchołku schodzi się ich 8.

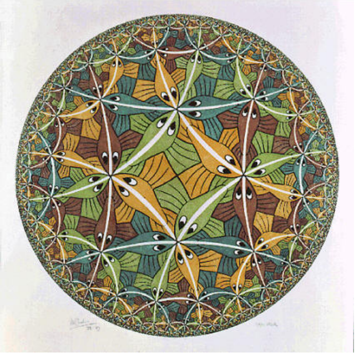
Punkty Q i R są wierzchołkami parkietażu dualnego $\{8,\ 3\}$.

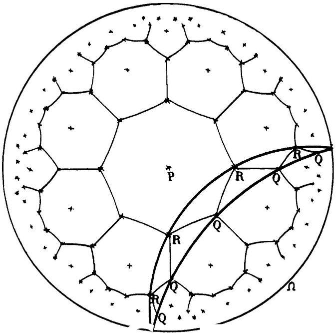




Na rysunku widzimy fragment parkietażu $\{8,\ 3\}$ z pogrubionymi liniami ...RRRR... oraz ...QQQQ..., a między nimi „łamaną” ...QRQRQRQR... Z punktu widzenia geometrii hiperbolicznej fragmenty QR i RQ są odcinkami prostych i wszystkie mają **jednakową długość**.

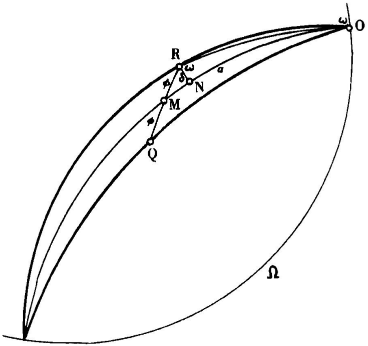
Jednak łuki ...RRRR.... oraz ..QQQQ... nie są ortogonalne do brzegu dysku.





Białe linie

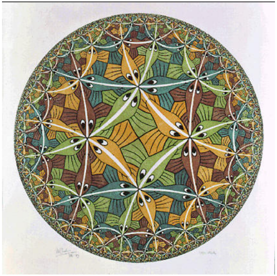
Jak stwierdziliśmy, długości odcinków RQ i QR są jednakowe, oznaczmy tę odległość liczbą 2ϕ. Przyporządkowanie R $\longrightarrow$ Q przekształca jedną z tych linii na drugą. Ponieważ odległości są zachowywane, więc z symetrii wynika, że rozszerzenie tego przekształcenia zachowuje środki odcinków QR i RQ i jest izometrią. Stąd środki odcinków leżą na hiperbolicznej prostej tzn. na łuku okręgu ortogonalnego do brzegu koła. Nazwijmy ten łuk *a*.

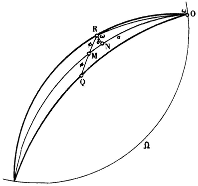


Na płaszczyźnie euklidesowej dwie proste równoległe to takie, które się nie przecinają. Są one też **równoodległe**.

Na płaszczyźnie hiperbolicznej linię **równoodległą** od danej prostej (czyli łuku okręgu ortogonalnego) nazywamy ekwidystantą tej prostej. Ekwidystanta ma dwie gałęzie i nie jest prostą hiperboliczną!

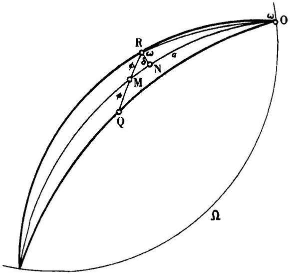
Białe linie w *Circle Limit III* to właśnie ekwidystanty, przy czym Escher użył tylko gałęzi ...RRRR...





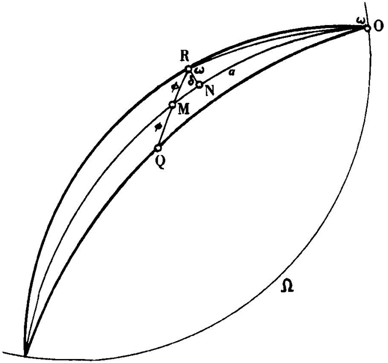
Jaki kąt tworzą białe linie z brzegiem koła?

Popatrzmy na rysunek:



Oznaczmy ω kąt, jaki tworzy ekwidystanta ...RRR... z okręgiem Ω, będącym brzegiem koła.
Ten sam kąt pojawia się w punkcie R, jako kąt pomiędzy dwiema prostymi, czyli łukami RN i RO, okręgów ortogonalnych do Ω. Łuk RN, będąc ortogonalnym zarówno do prostej *a*, jak i ekwidystanty ...RRR... wyznacza odległość ekwidystanty od prostej *a*.

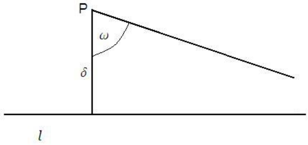
Jaki kąt tworzą białe linie z brzegiem koła?



W geometrii hiperbolicznej łuk RN prostopadły do a i łuk RO równoległy do a wyznaczają tak zwany kąt równoległości dla $|RN| = \delta$:

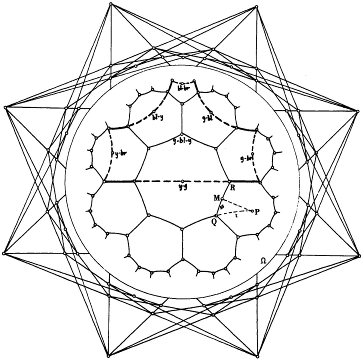
$$\omega = \Pi(\delta) = 2 \operatorname{arc\,tg} e^{-\delta}.$$

Kąt równoległości — przedstawiony schematycznie.



Jaki kąt tworzą białe linie z brzegiem koła?

Popatrzmy na rysunek:



Punkt P jest środkiem ośmiokąta. Niech 2ϕ będzie długością boku tego ośmiokąta. Wówczas punkt M, będąc środkiem boku QR wyznacza wraz z P i Q trójkąt prostokątny, o kątach $\frac{\pi}{8}$ w wierzchołku P oraz $\frac{\pi}{3}$ w wierzchołku Q.

Porównajmy euklidesowe i hiperboliczne wzory sinusów i cosinusów:

Jeśli a, b i c są długościami boków trójkąta o kątach odpowiednio α, β i γ, to

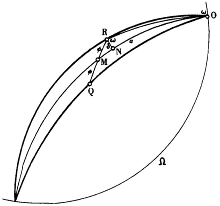
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}, \qquad \frac{\sin\alpha}{\sinh a} = \frac{\sin\beta}{\sinh b} = \frac{\sin\gamma}{\sinh c},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma, \qquad \cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos\gamma,$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Dysponując powyższymi wzorami, możemy „rozwiązywać trójkąty”.

Jaki kąt tworzą białe linie z brzegiem koła?



Trójkąt MRN jest prostokątny, o kącie $\frac{\pi}{3}$ przy wierzchołku R i bokach $|MR| = \phi$ oraz $|RN| = \delta$, zatem

$$\operatorname{tgh}\delta = \operatorname{tgh}\phi\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\operatorname{tgh}\phi,$$

a ze wzoru na kąt równoległości

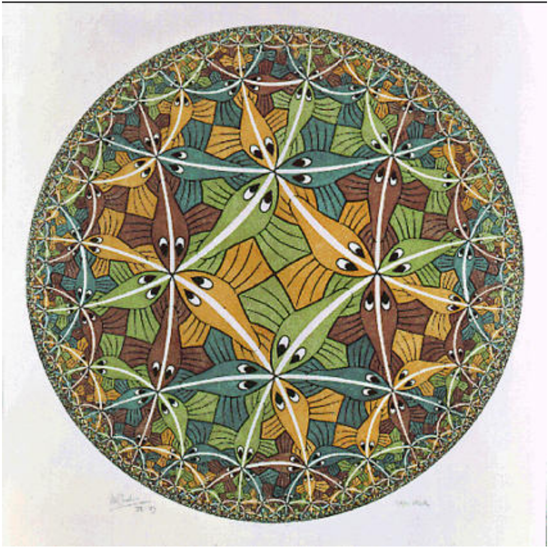
$$\operatorname{tgh}\delta = \cos\omega.$$

Ostatecznie

$$\omega = \Pi(\delta) = \arccos \frac{2^{1/4} - 2^{-1/4}}{2} = \arccos 0,17417.. = 79^\circ 58'.$$

I rzeczywiście pomiary na rysunku dają 80°, wbrew temu, co myślał Escher.

Circle limit III



Circle limit IV